Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 1–8.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1972 (Luglio–Agosto)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante.* Nota I [(*)] di MARCO BIROLI [(**)], presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si enunciano due teoremi riguardanti il problema di Cauchy e la soluzione ad energia limitata della equazione (non lineare) della corda vibrante con termine dissipativo discontinuo nella velocità e si dimostrano un lemma preliminare ed il Teorema 1.

§ 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉES

Soit $]a, b[$ un interval ouvert borné et $\beta(z)$ une fonction monotone croissante, définie sur l'interval $]c, d[$ $(-\infty \leq c < 0 < d \leq +\infty)$, continue dans 0 avec $\beta 0 = 0$; dans la suite on regardera $\beta(z)$ comme un graphe maximal monotone de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Nous supposons que $\forall z_1, z_2 \in]a, b[$, $s_1 \in \beta z_1$, $s_2 \in \beta z_2$ on ait

$$(1,1) \qquad (s_1 - s_2)(z_1 - z_2) \geq \alpha |z_1 - z_2|^\rho, \quad \rho \geq 2, \quad \alpha > 0.$$

Soit $E = \{U = (u_0(x), u_1(x)) \mid u_0(x) \in H_0^1(a, b), u_1(x) \in \mathfrak{L}^2(a, b)\}$, doué de la norme

$$\|U\|_E^2 = \|u_0(x)\|_{H_0^1}^2 + \|u_1(x)\|_{\mathfrak{L}^2}^2.$$

On dit que E est l'espace de l'energie et que $\| \|_E$ est la norme de l'energie.

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1972.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

Soit maintenant $y(t, x) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ avec $\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) \in \mathfrak{L}^2(a, b)$; lorsque on parlera de $y(t, x)$ dans l'espace de l'energie, on considérera le couple $\left(y(t, x), \frac{\partial}{\partial t} y(t, x)\right)$.

Considérons le problème

$$
(1,2) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\right) \ni f(t, x) \\
&\text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [0, \mathrm{T}] \times]a, b[\\
&u(t, a) = u(t, b) = 0 \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans } [0, \mathrm{T}] \\
&u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = u_1(x) \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans }]a, b[.
\end{aligned}
$$

Le problème (1,2) a été traité par Amerio L. et Prouse G., [2], dans sa formulation forte et par Brézis H., [3], dans sa formulation faible que, cependant, est trop affaiblie pour le but que nous nous proposons dans ce travail. Supposons maintenant que $f(t, x) \in \mathfrak{L}^{\rho'}(0, \mathrm{T}; \mathfrak{L}^{\rho'}(a, b))$ (ρ' index conjugué à ρ), $u_0(x) \in \mathrm{H}_0^1(a, b)$, $u_1(x) \in \mathfrak{L}^2(a, b)$ et $c < u_1(x) < \mathrm{d}$ p.p. sur $]a, b[$; posons $\mathrm{A} : \mathrm{H}_0^1(a, b) \to \mathrm{H}^{-1}(a, b)$ $\mathrm{A} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et considérons la suivante formulation affaiblie du problème (1, 2)

$$
(1,3) \qquad \begin{aligned}
&u''(t) + \mathrm{A}u(t) + \sigma(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathrm{H}^{-1}(a, b) \quad \text{p.p. sur } [0, \mathrm{T}] \\
&u(t, \cdot) \in \mathrm{E} \qquad \text{sur } [0, \mathrm{T}] \\
&u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_1 \\
&\sigma(t) \in \mathfrak{L}^1(0, \mathrm{T}; \mathfrak{L}^1(a, b)) \quad , \quad \sigma(t, x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\right) \\
&\text{p.p.} \qquad \text{sur } [0, \mathrm{T}] \times]a, b[;
\end{aligned}
$$

on dit que $\mathrm{U} = (u_0, u_1)$ et $f(t)$ sont les données de (1,3).

On démontre le résultat suivant

THÉORÈME 1. *Le problème* (1,3) *a une unique solution* $u(t) \in \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{E})$ *et on a*

$$
(\mathrm{I}) \qquad \|u(\bar{t})\|_{\mathrm{E}}^2 - \|\mathrm{U}\|_{\mathrm{E}}^2 \leq 2 \int_0^{\bar{t}} \int_a^b \left(f(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \sigma(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\right) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x .
$$

Soient $(\mathrm{U}, f(t))$, $(\overline{\mathrm{U}}, \bar{f}(t))$ *deux couples des données pour* (1, 3) *et* $u(t)$, $\bar{u}(t)$ *les solutions correspondantes de* (1,3); *on a*

$$
(\mathrm{II}) \qquad \|u(\bar{t}) - \bar{u}(\bar{t})\|_{\mathrm{E}}^2 - \|\mathrm{U} - \overline{\mathrm{U}}\|_{\mathrm{E}} \leq
$$

$$
\leq 2 \int_0^{\bar{t}} \int_a^b \left\{ (f(t, x) - \bar{f}(t, x)) \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(t, x)\right) - \right.
$$

$$
\left. - (\sigma(t, x) - \bar{\sigma}(t, x)) \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(t, x)\right) \right\} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x .
$$

Considérons maintenant le problème

$$(1,4)\qquad u''(t)+\mathrm{A}u(t)+\sigma(t)=f(t)\quad \text{p.p. dans } \mathrm{H}^{-1}(a\,,b)\,,\ u(t\,,\cdot)\in \mathrm{E}\ \text{p.p.}$$

$$\sigma(t)\in \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))\quad;\quad \sigma(t\,,x)\in\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x)\right)\quad \text{p.p. dans } \mathbf{R}\times]a\,,b[.$$

On démontre le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $f(t)$ $\mathrm{S}^{\rho'}$*–bornée et* $\mathrm{S}^{\rho'}$*–uniformement continue dans* $\mathfrak{L}^{\rho'}(a\,,b)$; *le problème* (1,4) *a une unique solution* $u(t)$ *bornée et uniformement continue dans l'espace de l'energie.*

Du Théorème 2 découlent deux Corollaires:

COROLLAIRE 1. *Soit* $f(t)$ *comme au Théorème 2 et périodique de période* T; *alors* $u(t)$ *est périodique de période* T.

COROLLAIRE 2. *Soit* $f(t)$ *comme au Théorème 2 et* $\mathrm{S}^{\rho'}$*–presque périodique dans* $\mathfrak{L}^{\rho'}(a\,,b)$; *alors* $u(t)$ *est presque périodique dans l'espace de l'energie.*

Remarque 1. Dans ce cas le Théorème 1 donne un résultat sur le problème (1,2) plus fort que ce de Brézis H., [3].

Remarque 2. Dans ce cas le Corollaire 1 donne un résultat qui étende celui de Prodi G., [4], qui considère des fonction $\beta(z)$, à croissance polynomiale; le résultat de Prodi est, cependant, valable aussi pour diménsion >1; dans le cas où $\beta(z)$ est discontinue il y a un résultat de Buzzetti F. [6], qui fait, cependant, des hypothèses plus restrictives sur $f(t)$ et $\beta(z)$.

Remarque 3. Dans ce cas le Théorème 2 et le Corollaire 2 donnent des résultats qui étendent ceux de Prouse G., [5], qui considère des fonctions $\beta(z)$ à croissance polynomiale d'ordre ρ quelconque; Prouse obtient aussi des résultats dans le cas de dimension m de l'espace avec $2\le m\le 5$ et $2\le\rho\le 2+\dfrac{4}{m-1}$.

§ 2. UN LEMME PRÉLIMINAIRE

Démontrons d'abord un Lemme:

LEMME 1. *Soit* β *comme au* § 1 *et* $\{v_n(t\,,x)\}$ *une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t\,,x)=v(t\,,x)$$

dans $\mathfrak{L}^2(0\,,\mathrm{T}\,;\mathfrak{L}^2(a\,,b))$; *soit* $\sigma_n(t\,,x)\in\beta(v_n(t\,,x))$ *et* $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}}\int_a^b \sigma_n(t\,,x)\,v_n(t\,,x)\cdot$ $\cdot\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\le Cst.$ *Alors* $\{\sigma_n(t\,,x)\}$ *est bornée dans* $\mathfrak{L}^1(0\,,\mathrm{T}\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))$ *et on peut extraire une sous–uite, que nous indiquons encore par* $\{\sigma_n(t\,,x)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ \sigma_n=\sigma\quad \textit{dans}\quad \mathfrak{L}^1([0\,,\mathrm{T}]\times]a\,,b[)$$

et $\sigma \in \mathfrak{L}^1(0\,,T\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))$ *avec*

$$\sigma(t\,,x) \in \beta(v(t\,,x))$$

p.p. dans $[0\,,T]\times]a\,,b[$.

On peut supposer $[t_1\,,t_2] \subset]c\,,d[$ et que $|\beta(z)| \leq c_1$ sur $[t_1\,,t_2]$ $(t_1 < 0 < t_2\,, |t_1| < |t_2|)$. On a

$$\int_0^T\int_a^b |\sigma_n(t\,,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leq \tag{1,5}$$

$$\leq \int_{\{(t,x)|(t,x)\in[0,T]\times]a,b[\ t_1\leq v_n(t,x)\leq t_2\}} |\sigma(t\,,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\{(t,x)|(t,x)\in[0,T]\times]a,b[\ v_n(t,x)\notin[t_1,t_2]\}} |\sigma_n(t\,,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq c_1 T(b-a) + \int_{\{(t,x)|(t,x)\in[0,T]\times]a,b[\ v_n(t,x)\notin[t_1,t_2]\}} \frac{\sigma_n(t\,,x)\,v_n(t\,,x)}{|v_n(t\,,x)|}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq c_1 T(b-a) + \frac{1}{t_2}\,c \leq c_2\,.$$

Observons que on a $H^{-1}([0\,,T]\times]a\,,b[) \hookrightarrow \mathfrak{L}^1(0\,,T\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))$.

On peut alors extraire une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{\sigma_n(t\,,x)\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ \sigma_n = \sigma \quad \text{dans} \quad H^{-1}([0\,,T]\times]a\,,b[).$$

Démontrons que, si $b < +\infty$, $v(t\,,x) < b$ p.p. dans $[0\,,T]\times]a\,,b[$.

Supposons qu'il y ait un ensemble Q avec mes. $Q > 0$, $Q \subset [0\,,T]\times]a\,,b[$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t\,,x) = v(t\,,x) = b \qquad \text{dans Q p.p.}$$

On a alors

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma_n(t\,,x)| = +\infty \qquad \text{p.p.}$$

et pour le lemme de Fatout

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T\int_a^b |\sigma_n(t\,,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = +\infty$$

dont l'absurde; la thèse est ainsi démontrée.

D'une maniere analogue on démontre que $a < v(t\,,x)$ p.p. sur $[0\,,T]\times]a\,,b[$.

On peut alors, fixé $\varepsilon > 0$, choisir un ensemble fermé $S_\varepsilon \subset [0\,,T]\times]a\,,b[$, tel que $T(b-a) - m(S_\varepsilon) < \varepsilon$ et

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t\,,x) = v(t\,,x)$$

uniformément sur S_ε, et

$$a + \delta < v(t, x) < b - \delta \qquad \text{sur} \quad S_\varepsilon, \delta > 0.$$

On a donc

$$|\sigma_n(t, x)| \leq c_3 \qquad \text{sur} \quad S_\varepsilon$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}{}^{**} \sigma_n = \chi \tag{1,6}$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(S_\varepsilon)$.

Etant $\mathfrak{L}^\infty(S_\varepsilon) \hookrightarrow \mathfrak{L}^\infty([0, T] \times]a, b[)$ on a $\chi = \sigma$.

De (1,6) on a

$$\int_{S_\varepsilon} |\sigma_1(t, x)| \, dt \, dx \leq c_2$$

donc

$$\int_0^T \int_a^b |\sigma(t, x)| \, dt \, dx \leq c_2 .$$

On doit maintenant démontrer

$$\sigma(t, x) \in \beta(v(t, x)) \qquad \text{p.p. dans} \quad [0, T] \times]a, b[.$$

Soit $w(t, x) \in \mathfrak{L}^2(S_\varepsilon)$ et $\psi(t, x) \in \beta(w(t, x))$, $\psi(t, x) \in \mathfrak{L}^2(S_\varepsilon)$; on a

$$\int_{S_\varepsilon} (\sigma_n(t, x) - \psi(t, x)) (v_n(t, x) - w(t, x)) \, dt \, dx \geq 0$$

dont

$$\int_{S_\varepsilon} (\sigma(t, x) - \psi(t, x)) (v(t, x) - w(t, x)) \, dt \, dx \geq 0$$

dont $\sigma(t, x) \in \beta(v(t, x))$ p.p. sur S_ε, donc p.p. sur $[0, T] \times]a, b[$.

La thèse est ainsi démontrée.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I

Si $f(t, x) \in \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(a, b))$ avec $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \in \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(a, b))$ et s'il y a $\psi(x) \in \beta(u_1(x))$ avec $\psi(x) \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, alors il y a une unique solution du problème (1,3) continue dans la norme de l'energie, [3]; considérons maintenant une suite $\{f_n(t, x)\}$ dans $\mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(a, b))$ avec $\frac{\partial f_n}{\partial t}(t, x) \in \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(a, b))$ et

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t, x) = f(t, x) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^{\rho'}(0, T; \mathfrak{L}^{\rho'}(a, b))$$

et une suite $\{u_{1,n}(x)\}$ telle que $\exists \psi_n(x) \in \beta(u_{1,n}(x))$ $\psi_n(x) \in \mathcal{L}^2(a,b)$ et

$$\lim_{n\to\infty} u_{1,n}(x) = u_1(x) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(a,b).$$

Considérons les problèmes

$$(3,1_n) \qquad \begin{aligned} & u''(t) + \mathrm{A}u(t) + \sigma(t) = f_n(t) \quad \text{dans} \quad [0,\mathrm{T}] \quad \text{p.p. dans } \mathrm{H}^{-1}(a,b) \\ & u(t,\cdot) \in \mathrm{E} \quad \text{p.p. dans} \quad [0,\mathrm{T}] \\ & u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_{1,n} \\ & \sigma(t) \in \mathcal{L}^1(0,\mathrm{T};\mathcal{L}^1(a,b)) \quad ; \quad \sigma(t,x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\right) \\ & \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [0,\mathrm{T}] \times]a,b[. \end{aligned}$$

Le problème $(3,1_n)$ a une unique solution $u_n(t) \in \mathrm{C}(0,\mathrm{T};\mathrm{E})$.
On a

$$(3,2) \qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n(t)\|_{\mathrm{E}}^2 + \alpha \|u_n'(t)\|_{\mathcal{L}^\rho}^\rho - \mathrm{K} \le \|f(t)\|_{\mathcal{L}^{\rho'}} \|u_n'(t)\|_{\mathcal{L}^\rho}.$$

De (3,2) on a que $\{u_n'(t)\}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\rho(0,\mathrm{T};\mathcal{L}^\rho(a,b))$ et $\{u_n(t)\}$ est bornée dans $\mathcal{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{E})$.
Donc

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_a^b \sigma_n(t,x)\, u_n'(t,x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \le \mathrm{Cst}.$$

De $(3,1_n)$ on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n(t) - u_m(t)\|_{\mathrm{E}} \le \|f_n(t) - f_m(t)\|_{\mathcal{L}^{\rho'}} \cdot$$
$$\cdot \|u_n'(t) - u_m'(t)\|_{\mathcal{L}^\rho} - \alpha \|u_n'(t) - u_m'(t)\|_{\mathcal{L}^\rho}^\rho.$$

On a alors que $\{u_n(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{C}(0,\mathrm{T};\mathrm{E})$; on peut donc supposer sans perdre de generalité que

$$(3,3) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathrm{C}(0,\mathrm{T};\mathrm{E})$$

$$(3,3') \qquad \lim_{n\to\infty} u_n'(t) = u'(t) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^\rho(0,\mathrm{T};\mathcal{L}^\rho(a,b)).$$

On a alors

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_a^b \sigma_n(t,x)\, u_n'(t,x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \le \mathrm{Cst}.$$

Du Lemme 1 on a alors

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_a^b |\sigma_n(t,x)|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \le c_1.$$

On peut donc supposer sans perdre de generalité que

$$(3,4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^1([0\,,T]\times]a\,,b[)$$

et, toujours du Lemme 1, on a $\sigma \in \mathfrak{L}^1(0\,,T\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))$ et $\sigma(t\,,x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x)\right)$ p.p. sur $[0\,,T]\times]a\,,b[$.

De (3,3) et (3,4) on deduit que $u(t)$ est solution de (1,3).

L'unicité suive par les mêmes methodes de [2].

Démontrons maintenant (I). Fixons $\bar{t} \in [0\,,T]$; il y a S_ε tel que $\bar{t}(b-a) - m\cdot S_\varepsilon \leq \varepsilon$ avec S_ε fermé, $S_\varepsilon \subset [0\,,\bar{t}]\times]a\,,b[$

$$(3,5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t\,,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t\,,x)$$

uniformément sur S_ε

$$a - \delta \leq \frac{\partial}{\partial t} u(t\,,x) \leq b + \delta\,,\ \delta > 0$$

p.p. sur S_ε.

On a alors, au moins d'extraction de sous-suites,

$$(3,6) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{**}\ \sigma_n = \sigma$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(S_\varepsilon)$.

De $(3,1_n)$ on a

$$\|u_n(\bar{t})\|_E^2 - \|U_n\|_E^2 \leq$$

$$\leq 2\int_0^{\bar{t}}\int_a^b \left\{f(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u_n(t\,,x) - \sigma_n(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u_n(t\,,x)\right\} dt\, dx \leq$$

$$\leq 2\int_0^{\bar{t}}\int_a^b f(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u_n(t\,,x)\, dt\, dx - 2\int_{S_\varepsilon}\sigma_n(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u_n(t\,,x)\, dt\, dx\,.$$

De (3,3), (3,3'), (3,5), (3,6) on a

$$\|u(\bar{t})\|_E^2 - \|U\|_E^2 \leq 2\int_0^{\bar{t}}\int_a^b f(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x)\, dt\, dx -$$

$$- 2\int_{S_\varepsilon}\sigma(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x)\, dt\, dx\,,$$

dont, pour le lemme de Fatout, suive

$$\|u(\bar{t})\|_E^2 - \|U\|_E^2 \leq$$

$$\leq 2\int_0^{\bar{t}}\int_a^b \left\{f(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x) - \sigma(t\,,x)\frac{\partial}{\partial t}u(t\,,x)\right\} dt\, dx\,.$$

La formule (I) est ainsi démontrée; on peut démontrer (II) par le mêmes méthodes utilisées pour (I).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional analysis*, Van Nostrand 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, I, II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BRÉZIS H., Thèse, Paris 1970.

[4] PRODI G., *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, « Rend. Sem. Mat. Padova », *36* (1966).

[5] PROUSE G., *Soluzioni quasi periodiche dell'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare*, I, II, III, IV, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *38–39* (1965).

[6] BUZZETTI F., *Soluzioni periodiche dell'equazione della corda vibrante con termine dissipativo discontinuo nella velocità*, « Rend. Ist. Lombardo », *A103* (1969).