Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pier Vittorio Ceccherini, Achim Dragomir

Dimostrazione di alcune q-identità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 599–606.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_599_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Dimostrazione di alcune q–identità* (*). Nota di PIER VITTORIO CECCHERINI e ACHIM DRAGOMIR, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Some new identities, connecting q–binomial coefficients ($q \neq 1$), are proved.

1. Ricordiamo che, se q è un prefissato intero positivo, e se n, k sono interi non negativi, si pone;

$$[0]_q = 0 \quad , \quad [n]_q = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1 ,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1 \quad , \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = n \quad , \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0 \quad \text{se} \quad k > n ,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} [n-i]_q / [k-i]_q \qquad \text{se} \quad 1 \leq k \leq n .$$

In particolare, per $q = 1$ si ottiene

$$[n]_1 = n \quad , \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{k} .$$

I numeri $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ si chiamano *q–coefficienti binomiali*; essi hanno un semplice significato algebrico–geometrico e verificano formule che estendono quelle dell'usuale calcolo combinatorio; cfr. [1] (cui si rinvia anche per la bibliografia sull'argomento), dove le formule per gli $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ vengono dimostrate ricorrendo sistematicamente al loro significato geometrico.

Nel presente lavoro si stabiliscono direttamente talune formule, valide per i q–coefficienti binomiali sotto l'ipotesi essenziale $q \neq 1$. (Per dedurne q–identità valide per ogni valore intero di $q \geq 1$, basterebbe moltiplicarne ambo i membri per $q - 1$).

Nel seguito scriveremo semplicemente $[n]$ ed $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ in luogo di $[n]_q$ ed $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

2. Per brevità, introduciamo le espressioni (ove a, n denotano interi con $1 \leq a \leq n$):

$$\text{(1)} \qquad A(a, n) = q^{a(a-1)/2} (q-1)^{a-1} \prod_{i=1}^{a} [n - a + i] ,$$

$$\text{(2)} \qquad A(a) = A(a, a) = q^{a(a-1)/2} (q-1)^{a-1} \prod_{i=1}^{a} [i] ;$$

(*) Lavoro eseguito parzialmente nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (Sezione n. 4) del C.N.R..

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

le (1), (2) hanno interesse solo per $q \neq 1$, perché per $q = 1$ esse o si annullano (se $a \neq 1$) o sono indeterminate (se $a = 1$). Per esse sussiste la formula di collegamento

$$A(a\,,n) = \begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} A(a)\,; \tag{3}$$

si hanno poi le seguenti relazioni induttive per $A(a)$:

$$A(1) = 1\,, \tag{4}$$

$$A(a) = q^{a-1}(q-1)\,[a]\,A(a-1), \tag{5}$$

e le seguenti relazioni induttive per $A(a\,,n)$:

$$A(1\,,n) = [n] \quad , \quad A(1\,,1) = 1\,,$$
$$A(a+1\,,n) = q^a(q-1)\,[n-a]\,A(a\,,n)\,,$$
$$A(a\,,n+1) = \frac{[n+1]}{[n+1-a]}\,A(a\,,n)\,.$$

3. Ci proponiamo di provare i Teoremi ed i Lemmi appresso elencati.

TEOREMA 2.1. *Supponiamo* $q \neq 1$, *e si ponga*

$$S(n\,,c) = \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n+c \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} A(a) \quad , \quad R(n\,,c) = [n(n+c)]\,,$$

dove $a\,,c\,,n$ *sono interi tali che* $1 \le a \le n\,, 0 \le c$. *Allora risulta*

$$S(n\,,c) = R(n\,,c) \qquad (q \neq 1)\,. \tag{6}$$

Questa, per $c = 0$, *fornisce*

$$\sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix}^2 A(a) = [n^2] \qquad (q \neq 1)\,. \tag{6'}$$

Dimostrazione. Per $q \neq 1$, risulta $S(1\,,c) = \begin{bmatrix} c+1 \\ 1 \end{bmatrix}$; ed in ogni caso (anche se $q = 1$) risulta $R(1\,,c) = [c+1]$. Pertanto la (6) è vera per $n = 1$ e c qualsiasi, talché dimostreremo il teorema per induzione supponendolo vero nel caso n (e c qualunque) e dimostrandolo nel caso $n+1$ (e c qualunque).

Applicando, oltre all'ipotesi induttiva, la (5), nonché note q–identità binomiali (cfr. [1]), si ottiene:

$$S(n+1\,,c) = \sum_{a=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ a \end{bmatrix} A(a) = \begin{bmatrix} n+c+1 \\ n+1 \end{bmatrix} A(n+1) +$$
$$+ \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ a \end{bmatrix} A(a) = \frac{[n+c+1]}{[n+1]} \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} q^n(q-1)\,[n+1]\,A(n) +$$
$$+ \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ a \end{bmatrix} A(a) \left(\begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ a-1 \end{bmatrix} q^{n-a+1} \right) =$$
$$= [n+c+1] \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} q^n(q-1)\,A(n) + \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} A(a) +$$

$$+ q^n \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a-1 \end{bmatrix} A(a)\, q^{-a+1} = \text{idem} + S(n, c+1) +$$

$$+ q^n [n+c+1] + q^n \sum_{a=2}^{n} \frac{[n+c+1]}{[a]} \begin{bmatrix} n+c \\ a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a-1 \end{bmatrix} A(a)\, q^{-a+1} =$$

$$= \text{idem} + R(n, c+1) + q^n [n+c+1] +$$

$$+ q^n [n+c+1](q-1) \sum_{a=2}^{n} \begin{bmatrix} n+c \\ a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a-1 \end{bmatrix} A(a-1) =$$

$$= \text{idem} + \text{idem} + \text{idem} + q^n [n+c+1](q-1)\left(S(n, c) - \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} A(n)\right) =$$

$$= \text{idem} + \text{idem} + \text{idem} + q^n [n+c+1](q-1)\, R(n, c) -$$

$$- q^n [n+c+1](q-1) \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} A(n) =$$

$$= [n+c+1] \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} q^n (q-1)\, A(n) + [n(n+c+1)] + q^n [n+c+1] +$$

$$+ q^n [n+c+1](q-1)[n(n+c)] - q^n [n+c+1](q-1) \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} A(n) =$$

$$= [n(n+c+1)] + \{q^n [n+c+1](1 + (q-1)[n(n+c)])\} =$$

$$= [n(n+c+1)] + \{q^n [n+c+1](1 + q^{n(n+c)} - 1)\} =$$

(per la (6) di [1])

$$= [n(n+c+1)] + q^{n(n+c+1)}[n+c+1] = [(n+1)(n+c+1)] = R(n+1, c),$$

come asserito.

Useremo in seguito il seguente risultato (cfr. [2], p. 229):

LEMMA 2.2. *Posto*

$$F(n, p) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} q^{s(s-1)/2-ps},$$

$$G(n, p) = q^{-n(2p-n+1)/2} (q^p - 1) \cdots (q^{p-m+1} - 1)$$

sussiste la formula

(7) $$F(n, p) = G(n, p),$$

la quale, per $0 \le p \le n-1$, *diventa*

(7′) $$F(n, p) = 0 \qquad (0 \le p \le n-1)$$

e per $p < 0$ *diventa*

(7″) $$F(n, p) = (-1)^n (q^{-p} - 1) \cdots (q^{-p+1} - 1) \cdots (q^{-p+n-1} - 1), \quad (p < 0).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di (7) rinviamo a [2], p. 229. Se $0 \leq p \leq n - 1$, uno dei fattori di $G(n, p)$ si annulla talché la (7) dà luogo alla (7′). Se $p < 0$, scriviamo $G(n, p)$ nella forma

$$G(n, p) = G(n, p) \frac{q^{-p} q^{1-p} \cdots q^{(n-1)-p}}{q^{-p} q^{1-p} \cdots q^{(n-1)-p}} =$$

$$= q^{-n[2p-(n-1)]/2} \frac{(1 - q^{-p})(1 - q^{1-p}) \cdots (1 - q^{(n-1)-p})}{q^{-p} q^{1-p} \cdots q^{(n-1)-p}} =$$

$$= (-1)^n (q^{-p} - 1)(q^{-p+1} - 1) \cdots (q^{-p+(n-1)} - 1),$$

donde la (7″).

LEMMA 2.3. *Qualunque siano gli interi a, n, si ha*

$$\sum_{j=0}^{a} (-1)^j \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{(a-j)n+j(j-1)/2} = (q - 1) A(a, n). \tag{8}$$

Questa, per $n = a$, fornisce

$$\sum_{j=0}^{a} (-1)^j \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{(a-j)a+j(j-1)/2} = (q - 1) A(a). \tag{8′}$$

Dimostrazione. Usando la (7) otteniamo

$$\sum_{j=0}^{a} (-1)^j \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{(a-j)n+j(j-1)/2} = q^{an} \cdot F(a, n) =$$

$$= q^{an} G(a, n) = q^{an} q^{-a(2n-a+1)/2} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-a+1} - 1) =$$

$$= q^{a(a-1)/2} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-a+1} - 1) =$$

$$= q^{a(a-1)/2} (q - 1)^a \prod_{i=1}^{a} [n - a - i] = (q - 1) A(a, n).$$

TEOREMA 2.4. *Qualunque siano gli interi n, c e $q \neq 1$, si ha*

$$\sum_{a=0}^{n} \sum_{j=0}^{a} (-1)^j \begin{bmatrix} n + c \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{(a-j)n+j(j-1)/2} = q^{n(n+c)} \qquad (q \neq 1). \tag{9}$$

Dimostrazione. Risulta

$$\sum_{a=0}^{n} \sum_{j=0}^{a} \cdots = 1 + \sum_{a=1}^{n} \sum_{j=0}^{a} \cdots = 1 +$$

$$+ \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n + c \\ a \end{bmatrix} \left(\sum_{j=0}^{a} (-1)^j \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} q^{(a-j)n+j(j-1)/2} \right) =$$

(per la (8), la (3))

$$= 1 + \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n + c \\ a \end{bmatrix} (q - 1) A(a, n) = 1 + (q - 1) \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix} n + c \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} A(a) =$$

(per la (6))

$$= 1 + (q - 1)[n(n + c)] = 1 + q^{n(n+c)} - 1 = q^{n(n+c)}.$$

LEMMA 2.5. *Poniamo* (1)

$$C(n, c) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{bmatrix} n+c \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} \quad , \quad D(n, c) = (-1)^n \begin{bmatrix} n+c-1 \\ n \end{bmatrix} q^{n(n+1)/2}$$

Per ogni scelta degli interi $n \geq 0$ *e* $c \geq 0$ (*con* $n + c > 0$), *risulta*

$$C(n, c) = D(n, c). \tag{10}$$

Dimostrazione. Per $c = 0$ ed $n > 0$ arbitrario, la (10) è vera perché si riduce alla

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} = 0$$

che è ben nota (cfr. [1], p. 155). Procediamo allora per induzione, supponendo vera la

$$C(n, c) = D(n, c) \qquad (c \geq 0 ; n \geq 0 \text{ arbitrario})$$

e dimostrando la

$$C(n, c+1) = D(n, c+1) \qquad (c \geq 0 ; n \geq 0 \text{ arbitrario}).$$

Risulta

$$C(n, c+1) = C(n+1, c) - (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ n+1 \end{bmatrix} q^{n(n+1)/2} =$$

$$= D(n+1, c) - \text{idem} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} n+c \\ n+1 \end{bmatrix} q^{(n+1)(n+2)/2} +$$

$$- (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} n+c+1 \\ n+1 \end{bmatrix} q^{n(n+1)/2} = (-1)^n \left\{ - \begin{bmatrix} n+c \\ n+1 \end{bmatrix} q^{n+1} + \begin{bmatrix} n+c+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \right\} q^{n(n+1)/2} =$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} n+c \\ n \end{bmatrix} q^{n(n+1)/2} = D(n, c+1) \qquad \text{(per la (20) di [1])}.$$

TEOREMA 2.6. *Qualunque siano gli interi* $n \geq 0$, $c > 0$ *e* $q \neq 1$, *risulta*

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ n-s \end{bmatrix} q^{s(s-1)/2} = q^{nc+n(n-1)/2} \qquad (q \neq 1). \tag{9'}$$

(Si noti che per $s = n$ e $c = 0$ il primo membro di (9') non sarebbe definito).

Dimostrazione. Per la (18) e la (25) di [1] si ha

$$\begin{bmatrix} n+c \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+c \\ a-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-(a-j)+c \\ j \end{bmatrix};$$

operando il cambiamento di variabile $a - j = s$, il *primo membro della* (9) si scrive pertanto

$$\sum_{a=0}^{n} \sum_{s=0}^{a} (-1)^{a-s} \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c \\ a-s \end{bmatrix} q^{ns+(a-s)(a-s-1)/2}.$$

(1) Si noti che D (0, 0) non è definito.

Questa – poiché risulta $s \leq a \leq n$, mentre poi per $s > a$ si ha $\begin{bmatrix} n+s+c \\ a-s \end{bmatrix} = 0$ – si può riscrivere estendendo la seconda somma per s da 0 ad n, e cambiando poi l'ordine delle sommatorie:

$$\sum_{s=0}^{n} \sum_{a=0}^{n} (-1)^{a-s} \begin{bmatrix} n+s \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c \\ a-s \end{bmatrix} q^{ns+(a-s)(a-s-1)/2} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} q^{ns} \sum_{a=s}^{n} (-1)^{a-s} \begin{bmatrix} n-s+c \\ a-s \end{bmatrix} q^{(a-s)(a-s-1)/2} \right\} =$$

$$(j = a - s)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} q^{ns} \sum_{j=0}^{n-s} (-1)^{j} \begin{bmatrix} n-s+c \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} \right\} =$$

(per la (10), applicabile in quanto $c > 0$)

$$= \sum_{s=0}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} q^{ns} (-1)^{n-s} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ n-s \end{bmatrix} q^{(n-s)(n-s-1)/2} \right\} =$$

$$= q^{n(n+1)/2} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ n-s \end{bmatrix} q^{s(s-1)/2}.$$

Uguagliando l'espressione del primo membro della (9) testè ottenuta col secondo membro della (9) stessa, si ottiene subito la (9').

Il Teorema successivo riguarda la (43) di [1], data ivi senza dimostrazione.

TEOREMA 2.7. *Poniamo* (com'è lecito se $c > 0$):

$$T(n, c, p) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s} \begin{bmatrix} n+c \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} q^{s(s-2p-1)/2},$$

$$Q(n, c, p) = (-1)^{n} q^{(n-p)c+n(n-2p-1)/2}.$$

Qualunque siano gli interi $c > 0$ *ed* $n \geq p \geq 0$, *risulta per* $q \neq 1$

$$T(n, c, p) = Q(n, c, p) \qquad (q \neq 1). \tag{11}$$

Dimostrazione. Per ogni scelta degli interi $n \geq 0$ e $c > 0$ risulta $T(n, c, 0) = Q(n, c, 0)$, che è la (9'). Procediamo allora per induzione rispetto a p supponendo vera la (11) e dimostrando la

$$T(n, c, p+1) = Q(n, c, p+1). \tag{12}$$

Poiché per la (20) di [1] si ha

$$\begin{bmatrix} m+c \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+c+1 \\ s+1 \end{bmatrix} - q^{s+1} \begin{bmatrix} m+c \\ s+1 \end{bmatrix},$$

risulta

$$T(n, c, p) = T_1(n, c, p) - T_2(n, c, p), \tag{13}$$

dove

$$T_1(n, c, p) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \begin{bmatrix} n+c+1 \\ s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} q^{s(s-2p-1)/2},$$

$$T_2(n, c, p) = q \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \begin{bmatrix} n+c \\ s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} q^{(s-2p+1)/2}.$$

Calcoliamo T_1:

$$T_1(n, c, p) = q^{p+1} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \begin{bmatrix} n+c+1 \\ s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} q^{(s+1)(s+1-2p-3)} =$$

(ponendo $m = n+1$, $t = s+1$)

$$= -q^{p+1} \sum_{t=1}^{m} (-1)^t \begin{bmatrix} m+c \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-t-c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} q^{t(t-2p-3)/2} =$$

$$= -q^{p+1} \left\{ \sum_{t=0}^{m} \text{idem} - \begin{bmatrix} m+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= -q^{p+1} \left\{ T(m, c, p+1) - \begin{bmatrix} m+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Riassumendo:

$$(14) \qquad T_1(n, c, p) = -q^{p+1} \left\{ T_1(n+1, c, p+1) - \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Calcoliamo ora T_2, avendo riguardo a ciò che per le (18), (25) di [1] risulta:

$$\begin{bmatrix} n+c \\ s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+c \\ n+c-s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-s+c-1 \\ c-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+1 \\ n-s \end{bmatrix};$$

si ottiene così:

$$T_2(n, c, p) = q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \begin{bmatrix} n+1 \\ n-s \end{bmatrix} q^{(s+1)(s+1-2p-2)/2} =$$

(ponendo $m = n+1$, $t = s+1$)

$$= -q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \sum_{t=1}^{m} (-1)^t \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix} q^{t(t-2p-1)/2} = -q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \left\{ \sum_{t=0}^{m} \text{idem} - 1 \right\} =$$

$$= -q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \{F(m, p) - 1\} = q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix},$$

per la (7′). Riassumendo:

$$(15) \qquad T_2(n, c, p) = q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto delle (13), (14), (15), l'ipotesi induttiva (11) si scrive:

$$-q^{p+1} \left\{ T(n+1, c, p+1) - \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} \right\} - q^{p+1} \begin{bmatrix} n+c \\ c-1 \end{bmatrix} = Q(n, c, p),$$

cosicché

$$(16) \qquad T(n+1, c, p+1) = -Q(n, c, p) : q^{p+1}.$$

D'altra parte, essendo

$$n(n-2p-1)/2-(p+1)=(n+1)(n+1-2(p+1)-1)/2\,,$$

risulta

$$-Q(n,c,p):q^{p+1}=(-1)^{n+1}\,q^{(n-p)c+(n+1)(n+1-2(p+1)-1)/2}=Q(n+1,c,p+1)\,,$$

sicché dalla (16) si ha

$$T(n+1,c,p+1)=Q(n+1,c,p+1)\,. \tag{17}$$

La (17), data l'arbitrarietà di $n \geq 0$, coincide con la (12), onde la 2.7 resta così acquisita per $n \geq 1$. D'altra parte, per $n=0$, l'asserto è del pari vero perché in tale ipotesi $p=0$ e $T(0,c,0)=Q(0,c,0)=1$.

Bibliografia

[1] P. V. Ceccherini e A. Dragomir, *Combinazioni generalizzate, q–coefficienti binomiali e spazi grafici*, Atti del Convegno Internazionale di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni (Perugia, 11–17 settembre 1970), 137–158.

[2] A. Dragomir e P. Dragomir, *Conseguenze algebriche della formula che dà il numero dei sottospazi di un* $S_{n,q}$ *proiettivo*, Atti del Convegno Internazionale di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni (Perugia, 11–17 settembre 1970), 225–231.