
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FERNANDO SANSÒ

**Carta conforme con minime deformazioni areali.
Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.4, p. 513–517.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_4_513_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Cartografia. — *Carta conforme con minime deformazioni areali.*

Nota II di FERNANDO SANSÒ, presentata (*) dal Socio L. SOLAINI.

SUMMARY. — The solution of the variational problem investigated in a preceding paper (« Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 52, 197–205 (1972)) is found by means of series development of the coordinate λ .

1. In una precedente Nota ⁽¹⁾ è stato dimostrato quanto segue:

definito come indice globale di deformazione areale di una carta conforme $x(u, \lambda)$, $y(u, \lambda)$ il funzionale

$$(1.1) \quad T(x) = \int_{\Omega} \left[\frac{x_u^2 + x_\lambda^2}{r^2} - 1 \right]^2 r^2 d\Omega$$

ove $\Omega \equiv \{0 < u < U; 0 < \lambda < \Lambda\}$

esiste almeno una $x(u, \lambda)$ e quindi una carta conforme soddisfacente alle condizioni

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x(0, \lambda) &= 0 & 0 < \lambda < \Lambda \\ \frac{\partial x(u, 0)}{\partial \lambda} &= 0 & 0 < u < U \end{aligned}$$

che rende minimo il funzionale $T(x)$.

Il problema che ci proponiamo di risolvere nel presente lavoro è quello di indicare un metodo per il calcolo approssimato di tale carta mediante lo sviluppo in serie della funzione $x(u, \lambda)$ rispetto ad una delle due variabili.

Quanto svolgeremo qui di seguito si riferisce allo sviluppo di x nella variabile λ , ma sarebbe assai semplice dimostrare che analoghe considerazioni si possono fare sviluppando x nella variabile u .

2. Sia dunque x la funzione minimante di $T(x)$. Tenuto conto che tale funzione deve essere armonica in Ω e ricordando la condizione

$$\frac{\partial x(u, 0)}{\partial \lambda} = 0$$

si avrà lo sviluppo in serie

$$(2.1) \quad x(u, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_{\Lambda}(u)}{2^n n!} \lambda^{2n} \quad (2)$$

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1972.

(1) F. SANSÒ, *Carta conforme con minime deformazioni areali*. Nota I. « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », 52, 197–205 (1972).

(2) Indicheremo con l'indice in alto tra parentesi l'ordine di derivazione.

dove si è indicato con l'indice Λ la dipendenza di $F_\Lambda(u)$ dalla variabile Λ , considerata come un parametro, che definisce l'ampiezza del fuso in cui la carta viene calcolata.

Tenendo conto della condizione

$$x(0, \lambda) = 0,$$

dalla (2.1) ricaviamo

$$F_\Lambda^{(2n)}(0) = 0.$$

Per semplicità di calcolo conviene passare nella (2.1) dalla funzione $F_\Lambda(u)$ alla sua derivata, ponendo

$$(2.2) \quad F_\Lambda(u) = \int_0^u f_\Lambda(u) du;$$

dal fatto che $F_\Lambda(u)$ è dispari discenderà che $f_\Lambda(u)$ è pari e quindi

$$(2.3) \quad f_\Lambda^{2n+1}(0) = 0.$$

Consideriamo ora che la soluzione calcolata nel campo Ω , date le condizioni (1.3), è estendibile per simmetria al campo

$$\Omega' \equiv \{0 < u < U; -\Lambda < \lambda < 0\}$$

ne segue che potremo porre $f_\Lambda(u) = f_{-\Lambda}(u)$ e quindi, tenendo conto di tale simmetria, si avrà uno sviluppo in serie nel parametro Λ del seguente tipo:

$$(2.4) \quad f_\Lambda(u) = \sum_0^\infty f_k(u) \Lambda^{2k}.$$

Consideriamo ora il fatto che $x(u, \lambda)$ è minimante di $T(x)$, per cui si avrà

$$(2.5) \quad \delta T = 4 \int_0^U du r^2 \int_0^\Lambda d\lambda \left(\frac{|\nabla x|^2}{r^2} - 1 \right) \frac{\nabla x \cdot \nabla \delta x}{r^2} = 0 \quad (3)$$

per ogni variazione δx scelta nello stesso spazio in cui si minimizza T .

Dunque δx sarà una funzione armonica soddisfacente le condizioni (1.3) ed in particolare, data la sua arbitrarietà, potremo sceglierlo in modo che sia indipendente da Λ ; avremo così

$$(2.6) \quad \delta x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{G^{(2n)}(u)}{2^n n!} \lambda^{2n}$$

(3) Indichiamo con ∇x il vettore a due componenti

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right); \quad \text{perciò} \quad |\nabla x|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2.$$

ove porremo

$$(2.7) \quad G(u) = \int_0^u g(u) du,$$

essendo $g(u)$ una arbitraria funzione pari, cioè tale che

$$(2.9) \quad g^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Dalle (2.4), (2.2), (2.1) possiamo calcolare lo sviluppo in serie di $|\nabla x|^2$ nelle due variabili λ, Λ ; otteniamo:

$$(2.10) \quad |\nabla x|^2 = \sum_{s,p}^{\infty} \lambda^{2p} \Lambda^{2s} \Gamma^{ps}$$

ove (4)

$$(2.11) \quad \Gamma^{ps} = (-1)^p \left\{ \sum_0^p \sum_0^s \frac{f_k^{(2n)} f_{s-k}^{(2p-2n)}}{(2n)! (2p-2n)!} + \right. \\ \left. - (1 - \delta_{p0}) \cdot \sum_0^{p-1} \sum_0^s \frac{f_k^{(2n+1)} f_{s-k}^{(2p-2n-1)}}{(2n+1)! (2p-2n-1)!} \right\}.$$

Pertanto posto

$$(2.12) \quad \bar{\Gamma}^{ps} = \frac{\Gamma^{ps}}{r^2} - \delta_{s0} \delta_{p0}$$

si avrà ovviamente

$$(2.13) \quad \frac{|\nabla x|^2}{r^2} - 1 = \sum_{p,s}^{\infty} \lambda^{2p} \Lambda^{2s} \bar{\Gamma}^{ps}.$$

Ancora dalle (2.7), (2.6), (2.4), (2.2), (2.1) si trova

$$(2.14) \quad \nabla x \cdot \nabla \delta x = \sum_{p,s}^{\infty} \lambda^{2p} \Lambda^{2s} Q^{ps}$$

ove

$$(2.15) \quad Q^{ps} = (-1)^p \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{f_s^{(2n)} g^{(2p-2n)}}{(2n)! (2p-2n)!} + \delta_{p0} \sum_0^{p-1} \frac{f_s^{(2n+1)} g^{(2p-2n-1)}}{(2n+1)! (2p-2n-1)!} \right\}.$$

Si avrà pertanto

$$(2.16) \quad \left(\frac{|\nabla x|^2}{r^2} - 1 \right) \nabla x \cdot \nabla \delta x = \sum_{\alpha,\beta}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \Lambda^{2\beta} \sum_0^{\alpha} \sum_0^{\beta} \bar{\Gamma}^{ps} Q^{\alpha-p,\beta-s}$$

$$(4) \text{ Ricordiamo che } \delta_{hk} = \begin{cases} 0 & h \neq k \\ 1 & h = k \end{cases} \quad \text{così che} \quad \delta_{p0} = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ 1 & p = 0. \end{cases}$$

da cui integrando sulla variabile λ

$$(2.17) \quad \int_0^\Lambda d\lambda \left(\frac{|\nabla x|^2}{r^2} - 1 \right) \nabla x \cdot \nabla \delta x = \\ = \sum_0^\infty \Lambda^{2\gamma+1} \sum_0^\gamma \frac{1}{2\alpha+1} \sum_0^\alpha \sum_0^{\gamma-\alpha} \bar{\Gamma}^{\rho s} Q^{\alpha-\rho, \gamma-\alpha-s}.$$

Se ora poriamo

$$(2.18) \quad \delta T_\gamma = \int_0^U d\mu \sum_0^\gamma \frac{1}{2\alpha+1} \sum_0^\alpha \sum_0^{\gamma-\alpha} \bar{\Gamma}^{\rho s} Q^{\alpha-\rho, \gamma-\alpha-s}$$

otteniamo lo sviluppo di δT nella variabile Λ

$$(2.19) \quad \delta T = 4 \sum_0^\infty \Lambda^{2\gamma+1} \delta T_\gamma$$

e dovendo essere nullo δT per ogni δx , ovvero per ogni g , dovranno esserlo anche tutti i δT_γ . Annullando successivamente δT_0 , δT_1 ecc. si ottengono i primi termini dello sviluppo in serie di x nelle due variabili λ e Λ .

1) $\gamma = 0$

$$\delta T_0 = \int_0^U \bar{\Gamma}^{00} Q^{00} d\mu = \int_0^U \left[\frac{(f_0^{(0)})^2}{r^2} - 1 \right] f_0^{(0)} g^{(0)} d\mu = 0$$

per ogni $g^{(0)}(u)$: ne segue

$$(2.20) \quad f_0^{(0)}(u) = r(u) \quad (5)$$

cioè $\bar{\Gamma}^{00} = 0$

2) $\gamma = 1$

$$\delta T_1 = \int_0^U \left\{ \bar{\Gamma}^{00} \left(Q^{01} + \frac{1}{3} Q^{10} \right) + \left(\bar{\Gamma}^{01} + \frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{10} \right) Q^{00} \right\} d\mu = 0$$

da cui, tenuto conto che $\bar{\Gamma}^{00} = 0$ e che $Q^{00} = f_0^{(0)} g^{(0)}$ è una funzione arbitraria, si ha

$$(2.21) \quad \bar{\Gamma}^{01} + \frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{10} = 0$$

cioè

$$(2.22) \quad f_1^{(0)} = \frac{1}{6} \left[r'' - \frac{(r')^2}{r} \right]$$

(5) Delle due soluzioni $f_0^{(0)} = \pm r$ scegliamo quella che dà $x(u, \lambda) > 0$.

3) $\gamma = 2$

$$\delta T_2 = \int_0^U \left\{ \left(\bar{\Gamma}^{01} + \frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{10} \right) Q^{01} + \left(\bar{\Gamma}^{02} + \frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{11} + \frac{1}{5} \bar{\Gamma}^{20} \right) Q^{00} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{01} + \frac{1}{5} \bar{\Gamma}^{10} \right) Q^{10} \right\} du = 0.$$

Ovvero, tenuto conto della (2.21), (2.15), (2.11):

$$\int_0^U \left\{ \left(\bar{\Gamma}^{02} + \frac{1}{3} \bar{\Gamma}^{11} + \frac{1}{5} \bar{\Gamma}^{20} \right) r g^{(0)} + \frac{4}{15} r^2 r' g^{(2)} + \frac{8}{15} (r')^2 r g^{(1)} \right\} du = 0.$$

Da qui, tenuto conto che $g^{(2)} = (g^{(0)})''$ e $g^{(1)} = (g^{(0)})'$, integrando per parti troviamo

$$(2.23) \quad 2f_2^{(0)} + \frac{(f_1^{(0)})^2}{r} - \frac{1}{3r} (r f_1^{(2)} + r'' f_1^{(0)}) + \\ + \frac{2}{3} \frac{r'}{r} f_1^{(1)} + \frac{2}{5} \frac{r^{IV}}{4!} + \frac{1}{20} \frac{(r'')^2}{r} + \\ - \frac{1}{15} \frac{r' r'''}{r} - \frac{8}{15} \left[\frac{(r')^2}{r} \right]' + \frac{4}{15} r''' = 0$$

da cui si ricava molto facilmente $f_2^{(0)}$.

Procedendo in modo analogo per tutti i successivi valori di γ si possono ricavare tutti i termini $f_k^{(0)}(u)$ e quindi dalle (2.4), (2.2) e (2.1) si trovano le formule della carta.

I primi termini, arrestando lo sviluppo al 2° ordine, risultano essere

$$(2.24) \quad x = \int_0^u f_0(u) du + \Lambda^2 \int_0^u f_1(u) du - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^u f_0''(u) du + o_4 = \\ = \int_0^u r du + \frac{\Lambda^2}{6} \int_0^u \left[r'' - \frac{(r')^2}{r} \right] du - \frac{\lambda^2}{2} r' + o_4.$$

L'espressione della y è ricavata tenendo conto delle condizioni di equivalenza a cui aggiungiamo $y(u, 0) = 0$; il risultato è:

$$(2.25) \quad y = r \cdot \lambda + \left[r'' - \frac{(r')^2}{r} \right] \frac{\Lambda^2}{6} \cdot \lambda - \frac{\lambda^3}{6} r'' + o_5.$$

La corrispondente espressione del modulo di deformazione è

$$(2.26) \quad m = 1 + \left(\frac{\Lambda^2}{6} - \frac{\lambda^2}{2} \right) \left(\frac{r''}{r} - \frac{(r')^2}{r^2} \right) + o_4.$$