Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mehmet Namik Oğuztöreli, Demetrio Mangeron, Kin-Vinh Leung

Calcolo con calcolatrici elettroniche delle soluzioni delle equazioni polivibranti e polivibranti generalizzate ed applicazioni. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.4, p. 479–484.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_4_479_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Calcolo con calcolatrici elettroniche delle soluzioni delle equazioni polivibranti e polivibranti generalizzate ed applicazioni* (*). Nota I di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI, DEMETRIO MANGERON (**) e KIN–VINH LEUNG, presentata (***) dal Socio M. PICONE.

A Mauro Picone

SUMMARY. — In this Note polynomial solutions of a class of self–adjoint polyvibrating equations are established and their connections with certain ordinary differential equations are considered.

1. Gli Autori, soli, oppure in collaborazione soprattutto con L. E. Krivoshein, hanno studiato, per i primi, una vasta mole di problemi concernenti sistemi polivibranti, il cui prototipo è dato dal problema al contorno [1]–[5]

$$\text{(1.1)} \quad \begin{gathered} D_m [A(x)\, D_m u(x) + \lambda B(x)\, u(x)] + \lambda\, [B(x)\, D_m u(x) + C(x)\, u(x)] = 0, \\ u(x)\Big|_{\mathrm{Fr}\,R} = 0, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \end{gathered}$$

oppure dal suo equivalente variazionale

$$\text{(1.2)} \quad \begin{gathered} M[f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} A(x)\, [D_m f(x)]^2\, dx, \qquad f(x)\Big|_{\mathrm{Fr}\,R} = 0, \\ P[f(x)] = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} [2\, B(x)\, f(x)\, D_m f(x) + C(x)\, f^2(x)]\, dx = 1, \\ dx = dx_1\, dx_2 \cdots dx_m \end{gathered}$$

e di cui la novità consiste nel fatto che il dominio di esistenza e di unicità delle soluzioni corrispondenti ai vari problemi considerati è ad m dimensioni, riducendosi, in particolare, agli iperrettangoli delle caratteristiche reali multiple $R\{a_i \leq x_i \leq b_i,\, i = 1, 2, \cdots, m\}$, ed ove il simbolo D_m denota la derivata totale di Picone [6]–[9], $D_m \equiv \dfrac{\partial^m}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_m}$.

Nelle loro Note [10]–[11] gli Autori hanno presentato, avendo in vista le necessità odierne di determinazione delle soluzioni di vari sistemi poli-

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under the Grant NRC –A–4345 through the University of Alberta.

(**) The Author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

(***) Nella seduta dell'8 aprile 1972.

vibranti (1), che hanno trovato, tra l'altro, applicazioni nel dominio della costruzione automatica di superfici di forma qualunque [12]–[15], con approssimazioni di un ordine prefissato, vaste serie di funzioni speciali, che includono quelle classiche di una sola variabile e derivano dalle considerazioni spettanti a varie equazioni polivibranti o polivibranti generalizzate, oppure risultano soluzioni di certi sistemi matematici con strutture composite [16]–[17].

In questa prima Nota, concernente il calcolo con calcolatrici elettroniche delle soluzioni delle equazioni polivibranti e polivibranti generalizzate ed applicazioni si presentano una serie di soluzioni polinomiali di una classe di equazioni polivibranti lineari, omogenee ed autoaggiunte e si danno le equazioni ordinarie che ammettono tra l'altro le medesime soluzioni polinomiali ove si è posto $\prod_{i}^{1,m} x_i = t$.

2. Sia data l'equazione polivibrante lineare, omogenea ed autoaggiunta

$$
(2.1)\qquad \begin{gathered}
\sum_{i}^{1,q} \mathrm{D}_{k_i m}\left[\mathrm{P}_{2k_i}(\theta_m)\,\mathrm{D}_{k_i m}\, u(x)\right] + \lambda_{n,m;2k_1,2k_2,\cdots,2k_q}\, u(x) = 0\,,\\
\mathrm{D}_{k_i m} = \mathrm{D}_m\,\mathrm{D}_{(k_i-1)m}\quad,\quad \theta_m = \prod_{i}^{1,m} x_i\,,\qquad k_1 > k_2 > \cdots > k_q\,,
\end{gathered}
$$

(k_i , $i = 1 , 2 ,\cdots, q$ sono numeri interi positivi), oppure la sua equivalente

$$
(2.2)\qquad \begin{aligned}
&\sum_{i}^{1,q}\Big\{\mathrm{P}_{2k_i}(\theta_m)\,\mathrm{D}_{2k_i m}\, u(x) + \mathrm{D}_{k_i m}\,\mathrm{P}_{2k_i}(\theta_m)\,\mathrm{D}_{k_i m}\, u(x) +\\
&+\sum_{l_{1,k_i}}^{0,k_i}\sum_{l_{2,k_i}}^{0,k_i}\cdots\sum_{l_{m,k_i}}^{0,k_i}\left(\prod_{s}^{1,m}\mathcal{C}_{k_i}^{l_{s,k_i}}\right)\frac{\partial^{\sum_s^{1,m} l_{s,k_i}}\,\mathrm{P}_{2k_i}(\theta_m)}{\partial x_1^{l_{1,k_i}}\,\partial x_2^{l_{2,k_i}}\cdots\partial x_m^{l_{m,k_i}}}\times\\
&\times\frac{\partial^{2k_i m-\sum_s^{1,m} l_{s,k_i}}\, u(x)}{\partial x_1^{2k_i-l_{1,k_i}}\cdot\partial x_2^{2k_i-l_{2,k_i}}\cdots\partial x_m^{2k_i-l_{m,k_i}}}\,,
\end{aligned}
$$

ove si è posto $\sum_{s}^{1,m} l_{s,k_i} = 1\,,\,2\,,\cdots,\,2\,k_i - 1\,,$

$$
(2.3)\qquad \mathrm{P}_{2k_i}(\theta_m) = \sum_{j}^{0,2k_i} a_{2k_i-j,m,2k_i}\,\theta_m^{2k_i-j}
$$

e, come al solito, $\mathcal{C}_{k_i}^{l_{s,k_i}} \equiv \binom{k_i}{l_{s,k_i}}$.

(1) Le equazioni polivibranti sono state chiamate da vari Autori « equazioni di Mangeron » [18]–[21].

Ha luogo il seguente risultato:

L'equazione polivibrante (2.1) oppure (2.2) possiede, essendovi coefficienti $a_{2k_i-j,m,2k_i}$ $(j = 0, 1, \cdots, 2k_i; i = 1, 2, \cdots, q)$ costanti dati, indipendenti dall'indice n, ed m un intiero positivo, per i valori del parametro

$$\lambda_{n,m;2k_1,2k_2,\cdots,2k_q}(n) = -\sum_i^{1,q} a_{2k_i,m,2k_i} \prod_r^{0,2k_i-1} (n + k_i - r)^m, \tag{2.4}$$

soluzioni polinomiali di grado n, di forma

$$P_n(\theta_m) = \alpha_{n,n}\,\theta_m^n + \alpha_{n,n-1}\,\theta_m^{n-1} + \cdots + \alpha_{n,n-l}\,\theta_m^{n-l} + \cdots + \alpha_{n,0}, \quad \alpha_{n,n} \neq 0, \tag{2.5}$$

ove i coefficienti $\alpha_{n,l}$ sono dati dalle formule

$$\alpha_{n,n-l} = \frac{\sum\limits_i^{1,q} \prod\limits_j^{1,k_i} (n-l+j)^m \sum\limits_r^{1,2k_i} a_{2k_i-r,m,2k_i} \dfrac{\alpha_{n,n-l+r}}{\alpha_{n,n}} \prod\limits_s^{0,k_i-1} (n-l+r-s)^m}{\lambda_{n,m;2k_1,2k_2,\cdots,2k_q}(n) - \lambda_{n,m;2k_1,2k_2,\cdots,2k_q}(n-l)}\,\alpha_{n,n}, \tag{2.6}$$

$$(l = 1, 2, \cdots, n).$$

3. L'equazione differenziale ordinaria d'ordine $2k_1 m$

$$\sum_i^{1,q} \mathcal{O}_m^{(k_i)} [P_{2k_i}(t)\, \mathcal{O}_m^{(k_i)} u(t)] + \lambda_{n,m;2k_1,2k_2,\cdots,2k_q} u(t) = 0, \tag{3.1}$$

ove gli operatori differenziali lineari $\mathcal{O}_m^{(k_i)}$ sono definiti come segue

$$\mathcal{O}_m^{(k_i)} = \mathcal{O}_m\, \mathcal{O}_m^{(k_i-1)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, q;\ k_1 > k_2 > \cdots > k_q), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_m = {} & \sum_{i_1,\cdots,i_{m-1}}^{1} i_1 i_2 \cdots i_{m-1} \frac{d}{dt} + \sum_{i_1,\cdots,i_{m-2}}^{1,2} i_1 i_2 \cdots i_{m-2}\, t \frac{d^2}{dt^2} + \cdots + \\ & + \sum_{i_1,\cdots,i_l}^{1,m-l} i_1 i_2 \cdots i_l\, t^{m-l-1} \frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}} + \cdots + \sum_{i_1,i_2}^{1,m-2} i_1 i_2\, t^{m-3} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} + \\ & + \sum_{i_1}^{1,m-1} i_1\, t^{m-2} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + t^{m-1} \frac{d^m}{dt^m},\end{aligned} \tag{3.3}$$

ammette, tra l'altro, soluzioni polinomiali (2.5), (2.6) in cui si deve sostituire, come già si è accennato nel p. 1, $\theta_m \equiv x_1 x_2 \cdots x_m$ col t.

4. Sia ora, tanto per fissare le idee, abbreviare la scrittura e vedere più da vicino tali soluzioni, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = k_4 = \cdots = k_q = 0$. L'equazione polivibrante

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2 \cdots \partial x_m^2} \left(P_4(x_1 x_2 \cdots x_m) \frac{\partial^{2m} u(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2 \cdots \partial x_m^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^m}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_m} \left(P_2(x_1 x_2 \cdots x_m) \frac{\partial^m u(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_m} \right) + \\ & + \lambda_{n,m;4,2}\, u(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

oppure la sua analoga in una sola variabile indipendente t,

$$
\begin{aligned}
(4.2) \qquad & \mathcal{O}_m^{(2)}\left((a_{4,m,4}\,t^4 + \cdots + a_{0,m,4})\,\mathcal{O}_m^{(2)}\,u(t)\right) + \\
& + \mathcal{O}_m^{(1)}\left((a_{2,m,2}\,t^2 + \cdots + a_{0,m,2})\,\mathcal{O}_m^{(1)}\,u(t)\right) + \lambda_{n,m;4,2}\,u(t) = 0\,,
\end{aligned}
$$

ove l'operatore differenziale lineare $\mathcal{O}_m^{(2)}$ è definito tramite

$$
(4.3) \qquad \sum_s^{1,m} \sum_{i_1,\cdots,i_{m-s}}^{1,s} i_1\,i_2\cdots i_{m-s} \sum_l^{m-l-1,-s}
$$

$$
\left\{\left[\sum_{j=0}^{s} \mathcal{C}_s^{s-j}(m-l-s+j-1)\cdots(m-l-s) \sum_{i_1,\cdots,i_{l+s-j}}^{1,m-l-s+j} i_1\,i_2\cdots i_{l+s-j}\right] t^{m-l-2}\,\frac{\mathrm{d}^{m-l}}{\mathrm{d}t^{m-l}}\right\}
$$

ed $\mathcal{O}_m^{(1)} \equiv \mathcal{O}_m$ di cui sopra (3.3), ammette, tra l'altro, per ogni

$$
\begin{aligned}
(4.4) \qquad & \lambda_{n,m;4,2} \equiv \lambda_{n,m;4,2}(n) = \\
& - a_{4,m,4}(n+2)^m\,(n+1)^m\,n^m\,(n-1)^m - a_{2,m,2}(n+1)^m\,n^m,
\end{aligned}
$$

le soluzioni polinomiali (2.5) aventi come variabile θ_m oppure, rispettivamente, t, i cui coefficienti sono dati dalla formula

$$
\begin{aligned}
(4.5) \qquad & - [\lambda_{n,m;4,2}(n) - \lambda_{n,m;4,2}(n-l)]\,\alpha_{n,n-l} = \\
& + a_{3,2,4}\,\alpha_{n,n-l+1}(n-l+2)^m\,(n-l+1)^{2m}\,(n-l)^m + \\
& + a_{2,2,4}\,\alpha_{n,n-l+2}(n-l+2)^{2m}\,(n-l+1)^{2m} + \\
& + a_{1,2,4}\,\alpha_{n,n-l+3}(n-l+3)^m\,(n-l+2)^{2m}\,(n-l+1)^m + \\
& + a_{0,2,4}\,\alpha_{n,n-l+4}(n-l+4)^m\,(n-l+3)^m\,(n-l+2)^m\,(n-l+1)^m + \\
& + a_{1,2,2}\,\alpha_{n,n-l+1}(n-l+1)^{2m} + a_{0,2,2}\,\alpha_{n,n-l+2}(n-l+2)^m\,(n-l+1)^m, \\
& \qquad (l = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n)\,.
\end{aligned}
$$

5. Gli Autori, pur rinunciando a dare qui dettagli concernenti la ripartizione degli zeri di questi $\infty^{\sum_i^{1,q} 2k_i - 1}$ polinomi, i dominii di ortogonalità e le corrispondenti funzioni peso ed altri ancora, sottolineano l'interesse di uno studio accurato concernente queste soluzioni particolari spettanti alla classe or ora indicata delle equazioni polivibranti, utile, tra l'altro, nell'ambito delle approssimazioni, e si ripromettono di ritornare con una serie di dati relativi a questo ordine di idee, ricavati dall'impiego delle calcolatrici elettroniche dell'Università di Alberta. Vari dettagli algoritmici connessi alle questioni sopra esposte come pure le indicazioni espresse riferentesi ai legami tra le serie di polinomi determinati e varie classi di classici polinomi, che figurano tra le funzioni speciali sin'ora note, saranno inseriti nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași*.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. MANGERON, *Problemi al contorno per un'equazione alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli », ser. IV, *2*, 29–40 (1932). Vedasi anche « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », ser. VI, *16*, 305–310 (1932); « C. r. Acad. Sci., Paris », *204*, 94–96; 544–546; 1022–1024; 266A (1937), 870–873; 976–979; 1050–1052; 1103–1106; 1121–1124 (1968); « J. Math. Anal. a. Appl. », *9*, 141–146 (1964).

[2] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an « F–equation »*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *67*, 1488–1492 (1970).

[3] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Sur les solutions d'une classe d'équations intégro–fonctionnelles et opérateurs polyvibrants*, « C. r. Acad. Sci., Paris », *271 A*, 309–312 (1970).

[4] M. N. OĞUZTÖRELI, D. MANGERON, L. E. KRIVOSHEIN e F. S. ROSSI, *Calcolo con calcolatrici elettroniche delle funzioni speciali spettanti ai sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati ed applicazioni*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *48*, 160–169 (1970).

[5] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *Problemi concernenti varie equazioni integro–differenziali con operatori ereditari e derivate totali di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *33*, 226–266 (1963); *34*, 344–368 (1964); *35*, 341–364 (1965).

[6] M. N. OĞUZTÖRELI, *Eigenvalue problems for Mangeron's polyvibrating equations, I*, « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », New series, *17* (21), 3–4, 61–66 (1971).

[7] S. EASWARAN, *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron* Doctoral Dissertation. Sci. adviser prof. M. N. Oğuztöreli. Dept. of Mathematics, University of Alberta, 1972.

[8] M. N. OĞUZTÖRELI e S. EASWARAN, *A Goursat problem for a high order Mangeron equation*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *50*, 650–653, (1971).

[9] JU. M. BEREZANSKI, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, « Amer. Math. Soc. tranls. Monographs », 1968, cap. IV, p. 756, 787.

[10] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Sobre las relaciones entre las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales de diferentes tipos y sobre ciertas clases nuevos de funcciones relativas a las ecuaciones polivibrantes*, « Math. Notae », *21*, (3–4), 95–103 (1968–1969).

[11] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Polynomes orthogonaux polyvibrants généralisés et quelques théorèmes qui s'y rattachent*, « Bull. Acad. R. Sci. Belgique », ser. V, *56*, 258–266 (1970).

[12] W. GORDON, *Automatic Design of free form surfaces*. General Motors Res. Lab., Warren. Mich., 1968.

[13] C. HUIU, *Nuovi metodi grafici ed analitici ed applicazioni* (in Romeno con sunto in Franc.). Tesi di Laurea sotto la Direzione del prof. D. Mangeron, Istituto Politecnico di Iași, 1971.

[14] G. BIRKHOFF e W. GORDON, *On the Draftsman's equations*, « Intern. J. Approx. Theory », *1*, 199–208 (1968).

[15] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Sur certaines équations fonctionnelles–différentielles–aux différences à plusieurs variables indépendentes*, « Proc. Japan Acad. Sci », *46*, 524–528 (1970).

[16] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Sur les solutions de certaines équations fonctionnelles–différentielles–aux différences*, « Revue Roumaine Math. pures et appl. », *15*, 1471–1479 (1970).

[17] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Problèmes concernant les systèmes mathématiques aux structures entremêlées. Sur les solutions d'une classe d'équations fonctionnelles à retardement*, « Bull. Soc. Roy. Sci. Liège », *30*, 214–217 (1970).

[18] L. E. KRIVOSHEIN, *Metodo di Mangeron spettante alla risoluzione di certe classi di equazioni integro–differenziali* (in Russo). Trudy tretiei Sibirskoi Konferentsii po Matematike i Mehanike, Tomsk, 1964.

[19] F. S. ROSSI, *Il metodo di Mangeron nella risoluzione di certe equazioni alle derivate totali di Picone*, « Bollettino dell'Ist. Politecnico di Iaşi », ser. nuova, *12* (16), 17–24 (1965).

[20] G. BIRKHOFF, pp. 209–210. Nel volume *Approximations with special emphasis on Spline functions*. Ed. I. J. Schoenberg, Academic Press, N.Y., 1969.

[21] W. GORDON, pp. 236, 276. Nel volume *Approximations with special emphasis on Spline functions*. Ed. I. J. Schoenberg, Academic Press, N.Y., 1969.