Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fernando Sansò

Carta conforme con minime deformazioni areali. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 197–205.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_197_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Cartografia. — *Carta conforme con minime deformazioni areali.* Nota I di FERNANDO SANSÒ, presentata (*) dal Socio L. SOLAINI.

SUMMARY. — The problem we investigate concerns the choice, among conformal cartographic representations, of the one that causes as small areal deformations as possible.

To that aim, we define an index of the global areal deformation through a functional T depending on the form of the cartographic representation.

Since conformal representations are realized by a couple of harmonic functions, one of which depends on the other, we introduce a suitable topological space E of harmonic functions. The problem now becomes the minimization of the functional T of the space E.

In this paper a theorem of existence of the minimum of T on E is demonstrated by means of classic variational techniques.

1. – *Posizione del problema.*

Come è noto, uno dei grossi problemi della cartografia consiste nel fatto che la condizione di conformità è incompatibile con quella di equivalenza, cosicché, per ogni carta conforme (u , λ) (x , y) si avrà un modulo di deformazione lineare

$$m = \frac{\sqrt{x_u^2 + x_\lambda^2}}{r} = \frac{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}}{r} \tag{1.1}$$

e quindi un modulo di deformazione areale m^2, variabile da punto a punto.

Scopo di questa ricerca è di dimostrare che esiste una carta conforme che produce le minori deformazioni d'area possibili.

Definiamo come indice della deformazione totale d'area della carta (x , y) su un campo Σ dell'ellissoide il seguente funzionale

$$\mathrm{T} = \int_\Sigma (m^2 - 1)^2 \, d\sigma \tag{1.2}$$

l'elemento d'area $d\sigma$ sarà dato, ove si usino le coordinate isoterme (u , λ), dalla formula

$$\begin{cases} d\sigma = r^2 \, du \, d\lambda \\ r(\varphi) = \dfrac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \qquad du \leq \rho/r \, d\varphi \, . \end{cases} \tag{1.3}$$

Tenuto conto che una carta conforme è definita da una coppia di funzioni armoniche $x (u , \lambda)$, $y (u , \lambda)$ e che la y è individuata dalla x a meno di una costante arbitraria, il problema posto può essere così formulato: cer-

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

chiamo nello spazio delle funzioni armoniche su Σ, la minimante del funzionale

$$T(x) = \int_{\Omega} \left[\frac{x_u^2 + x_\lambda^2}{r^2} - 1\right]^2 r^2 \, du \, d\lambda \tag{1.4}$$

ove Ω è l'insieme del piano dei parametri (u, λ) corrispondente alla porzione Σ dell'ellissoide.

Per semplicità prendiamo come Ω l'insieme aperto

$$\Omega \equiv \{0 < u < U \quad ; \quad 0 < \lambda < \Lambda\} . \tag{1.5}$$

Alcune considerazioni di simmetria ci conducono ad imporre alle test-functions $x(u, \lambda)$ la condizione al contorno

$$x(0, \lambda) = 0 \quad ; \quad 0 < \lambda < \Lambda . \tag{1.6}$$

Tali osservazioni ci portano ad ambientare il problema nello spazio lineare topologico E definito nel seguente modo

$$E \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x(u, \lambda) \;\; ; & \Delta x(u, \lambda) = 0 & \text{in } \Omega \\ & x(0, \lambda) = 0 & 0 < \lambda < \Lambda \end{array} \right\} \tag{1.7}$$

ove una base di intorni dello zero è data da

$$\begin{gathered} I(0) \equiv \{x \;\; ; \;\; \| x \|_{\Omega_n} = \operatorname*{Max}_{\Omega_n} |x(u, \lambda)| < c_n\} \\ \Omega_n \equiv \left\{ \frac{1}{n} \leq u \leq U - \frac{1}{n} \;\; ; \;\; \frac{1}{n} \leq \lambda \leq \Lambda - \frac{1}{n} \right\} . \end{gathered} \tag{1.8}$$

Ovviamente la nozione di limite in tale spazio sarà

$$x \xrightarrow[E]{} 0 \Longleftrightarrow \| x \|_{\Omega_n} \longrightarrow 0 \qquad \forall n \text{ fissato} . \tag{1.9}$$

Il nostro problema può dunque essere enunciato come segue: cerchiamo il minimo del funzionale $T(x)$ nello spazio E.

2. – Prima di passare al Teorema di esistenza del minimo occorre studiare alcune caratteristiche del dominio di T in E. La prima osservazione è che il funzionale T non è limitato in E; in particolare, tenuto conto che

$$a \leq r(u) \leq b \quad ; \quad 0 \leq u \leq U \tag{2.1}$$

posto $p = \frac{\partial x}{\partial u}$ $q = \frac{\partial x}{\partial \lambda}$, vale la disuguaglianza

$$\begin{gathered} a^2 \int_{\Omega} (p^2 + q^2)^2 \, d\Omega + b^2 \cdot \Omega \geq T(x) \geq \\ \geq b^2 \int_{\Omega} (p^2 + q^2)^2 \, d\Omega - 2\sqrt{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} (p^2 + q^2)^2 \, d\Omega \right\}^{1/2} + a^2 \cdot \Omega \end{gathered} \tag{2.2}$$

da cui si rileva che il dominio D di T in E è l'intersezione insiemistica tra E e lo spazio di Sobolef $H^{1,4}$:

$$D = E \cap H^{1,4}. \tag{2.3}$$

Più precisamente indicheremo con D l'insieme $E \cap H^{1,4}$ come sottoinsieme topologico di E, con D' l'insieme $E \cap H^{1,4}$ come sottoinsieme topologico di $H^{1,4}$.

Sempre dalla (2.2) rileviamo che in ogni insieme limitato di D', $T(x)$ si mantiene limitato e viceversa. Premesso ciò, vale la seguente proprietà fondamentale: l'immersione di D' in D è completamente continua. Cioè, considerata una qualsiasi successione x_n, limitata in D', da essa è sempre possibile estrarre una sottosuccessione convergente in D ad un elemento $\bar{x}$ di D.

Infatti sia x_n una successione limitata in D', ne segue che, posto

$$p_n = \frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad q_n = \frac{\partial x}{\partial \lambda} ,$$

$$\|p_n\|_{L^4} , \|q_n\|_{L^4} < C \tag{2.4}$$

potremo quindi estrarre da p_n, supponiamo sia la p_n stessa, una successione debolmente convergente in L^4 ad un elemento g.

$$p_n \xrightarrow[L^4]{*} g . \tag{2.5}$$

In particolare, ricordando che le p_n essendo funzioni armoniche soddisfano il Teorema della media

$$p_n(P_0) = \frac{1}{S_\delta} \int_{S_\delta} p_n \, dS \tag{2.6}$$

S_δ = cerchio di centro P_0 e raggio δ qualunque purché $S_\delta \subset \Omega$

indicata con χ_{S_δ} la funzione caratteristica di S_δ, avremo

$$p_n(P_0) = \frac{1}{S_\delta} \langle \chi_{S_\delta}, p_n \rangle \longrightarrow \frac{1}{S_\delta} \langle \chi_{S_\delta}, g \rangle = \frac{1}{S_\delta} \int_{S_\delta} g \, dS . \tag{2.7}$$

Ne segue che p_n è puntualmente convergente in Ω e che chiamato $\varphi(P)$ il suo limite puntuale si ha

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{S_\delta} \int_{S_\delta} g \, dS$$

da cui passando al limite per $\delta \to 0$ si trova

$$\varphi(P) = g(P) = \lim_{n \to \infty} p_n(P) \quad \text{in} \quad \Omega . \tag{2.8}$$

Vogliamo ora dimostrare che una sottosuccessione di p_n tende a $g(\mathrm{P})$ uniformemente su ogni Ω_l fissato.

Osserviamo che dalla (2.6), usando la disuguaglianza di Hölder, si trova

$$|p_n(\mathrm{P}_0)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{S}_\delta}} \left\{ \int_{\mathrm{S}_\delta} |p_n|^4 \, d\mathrm{S} \right\}^{1/4} \leq \frac{\mathrm{C}}{\sqrt[4]{\mathrm{S}_\delta}} \tag{2.9}$$

perciò, fissato Ω_l e scelto $\delta < 1/l$, si trova che p_n è equilimitata su Ω_l.

Inoltre, sempre dalla (2.6), si ha

$$|p_n(\mathrm{P}) - p_n(\mathrm{P}')| \leq \frac{[\text{area}\,(\mathrm{S}_\delta - \mathrm{S}'_\delta)]^{3/4}}{\mathrm{S}_\delta} \cdot \tag{2.10}$$

$$\cdot \left\{ \left(\int_{\mathrm{S}_\delta - \mathrm{S}'_\delta} |p_n|^4 \, d\mathrm{S} \right)^{1/4} + \left(\int_{\mathrm{S}'_\delta - \mathrm{S}_\delta} |p_n|^4 \, d\mathrm{S} \right)^{1/4} \right\} \leq \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{S}_\delta} [\text{area}\,(\mathrm{S}_\delta - \mathrm{S}'_\delta)]^{3/4}$$

pertanto, scegliendo P e P′ in Ω_l in modo che $\overline{\mathrm{PP}'} < \rho_\varepsilon$ opportuno, si potrà far sì che i due cerchi S_δ ed S'_δ, di centri P e P′ e di egual raggio δ, siano abbastanza vicini da aversi $[\text{area}\,(\mathrm{S} - \mathrm{S}')]^{3/4} \leq \varepsilon$. Ne segue che la successione p_n è equicontinua in Ω_l fissato; potremo perciò da essa estrarre una successione p_n^l uniformemente convergente su Ω_l; da questa potremo estrarre una successione p_n^{l+1} uniformemente convergente su Ω_{l+1} e così via.

La successione diagonale p_n^n sarà perciò una sottosuccessione di p_n, uniformemente convergente a g su ogni Ω_l.

In modo analogo si può agire per q_n arrivando infine ad individuare una successione $\bar{x}_n$, contenuta nella x_n iniziale, tale che

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial u} \to g \\ \bar{q}_n &= \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \lambda} \to h \end{aligned} \qquad \text{uniformemente su ogni } \Omega_l \text{ fissato.} \tag{2.11}$$

Ora, ricordando le proprietà della convergenza uniforme di una successione di funzioni armoniche, avremo anche,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial \lambda} &\to \frac{\partial g}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \bar{q}_n}{\partial u} &\to \frac{\partial h}{\partial u} \end{aligned} \tag{2.12}$$

quindi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial u \, \partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \tag{2.13}$$

Esisterà perciò una funzione $\bar{x}$, definita a meno di una costante arbitraria, tale che

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = g \quad , \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \lambda} = h \, .$$

Tale funzione $\bar{x}$ è armonica in Ω, infatti

$$\Delta\bar{x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial \lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial u} + \frac{\partial \bar{q}_n}{\partial \lambda} = 0 . \tag{2.14}$$

Vogliamo ora dimostrare che si può scegliere la costante di $\bar{x}$ in modo tale che $\bar{x}_n$ tenda uniformemente ad $\bar{x}$ su ogni Ω_l fisso.

A tale scopo basta dimostrare che $\bar{x}_n$ converge almeno in un punto $P_0 \in \Omega$: infatti, supposto ciò, si può porre

$$\bar{x}(P_0) = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n(P_0) \tag{2.15}$$

e si avrà perciò, scelto ad arbitrio P in Ω_l fissato,

$$\begin{aligned} |\bar{x}(P) - \bar{x}_n(P)| &\leq |\bar{x}(P_0) - \bar{x}_n(P_0)| + \int_{P_0}^{P} |g - \bar{p}_n|\,|du| + \\ &+ \int_{P_0}^{P} |h - \bar{q}_n|\,|d\lambda| \leq |\bar{x}(P_0) - \bar{x}_n(P_0)| + U\cdot \operatorname*{Max}_{\Omega_l} |g - \bar{p}_n| + \\ &+ \Lambda\cdot \operatorname*{Max}_{\Omega_l} |h - \bar{q}_n| \qquad \forall P \in \Omega_l \end{aligned} \tag{2.16}$$

da cui si vede che $\bar{x}_n(P) \to \bar{x}(P)$ indipendentemente da P in Ω_l fissato.

Per dimostrare la validità della (2.15) sarà sufficiente provare che la successione numerica $\bar{x}_n(P_0)$ è limitata, in tal caso infatti si potrà trarre da essa una successione convergente.

A tale scopo usiamo un'altra proprietà della media delle funzioni armoniche

$$\bar{x}_n(P_0) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_\sigma \bar{x}_n\, d\sigma \tag{2.17}$$

ove σ è la circonferenza di centro $P_0 = (u_0, \lambda_0)$ e di raggio δ.

Ora, tenuto conto della condizione $\bar{x}_n(0, \lambda) = 0$, la (2.17) può essere riscritta come segue

$$\begin{aligned} \bar{x}_n(P_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} d\lambda \int_0^{u_0+\sqrt{\delta^2-(\lambda-\lambda_0)^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-(\lambda-\lambda_0)^2}}\, \bar{p}_n(u,\lambda)\, du + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} d\lambda \int_0^{u_0-\sqrt{\delta^2-(\lambda-\lambda_0)^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta^2-(\lambda-\lambda_0)^2}}\, \bar{p}_n(u,\lambda)\, du . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dalla (2.18), posto $\lambda = \lambda_0 + \delta t$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo, dopo alcuni passaggi

$$|\bar{x}_n(P_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \int_\Omega |\bar{p}_n|^4\, d\Omega \right\}^{1/4} \cdot \delta^{-1/4} \cdot [(Au_0 + B\delta)^{3/4} + (Au_0 - B\delta)^{3/4}] \tag{2.19}$$

ove

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t^2)^{2/3}} \qquad B = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t^2)^{1/6}} .$$

Come si vede, ricordando che $\|\bar{p}_n\|_{L^4} < C$, la successione $\bar{x}_n(P_0)$ è limitata e quindi si può scegliere la costante arbitraria di $\bar{x}(P)$ in modo tale che $\bar{x}_n$ tenda uniformemente ad $\bar{x}$ su ogni Ω_l fisso. Se ora si può dimostrare che $\bar{x}(0, \lambda) = 0 \quad 0 < \lambda < \Lambda$, possiamo concludere che: 1) $\bar{x} \in E$, infatti soddisfa tutte le condizioni (1.7); 2) $\bar{x} \in D$, come segue dalle note proprietà del limite debole, per cui essendo $\|\bar{p}_n\|_{L^4}, \|\bar{q}_n\|_{L^4} < C$ si ha anche

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right\|_{L^4} = \|g\|_{L^4} < C \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \lambda} \right\|_{L^4} = \|h\|_{L^4} < C;$$

3) $\bar{x}_n \to \bar{x}$ nella topologia di E, come segue da quanto sopra dimostrato. In altri termini, se $\bar{x}(0, \lambda) = 0 \quad 0 < \lambda < \Lambda$ è vero l'assunto che l'immersione di D' in D è completamente continua.

Per dimostrare quest'ultima proprietà possiamo usare la (2.19), da cui, passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo

$$(2.20) \qquad |\bar{x}(P_0)| \leq \frac{C}{2\pi} \delta^{-1/4} [(Au_0 + B\delta)^{3/4} + (Au_0 - B\delta)^{3/4}].$$

Restringendo λ nell'intervallo chiuso $\frac{1}{l} \leq \lambda \leq \Lambda - \frac{1}{l}$ (l fissato), notiamo che per $u_0 < \frac{1}{l}$ dovremo avere $\delta < u_0$, ad esempio $\delta = \frac{u_0}{2}$, affinché σ non esca dal campo Ω; con tale sostituzione troviamo

$$(2.21) \qquad |\bar{x}(P_0)| \leq \frac{C}{2\pi} 2^{1/4} u_0^{1/4} \left[\left(A + \frac{1}{2} B\right)^{3/4} + \left(A - \frac{1}{2} B\right)^{3/4}\right].$$

Da tale formula concludiamo ovviamente che

$$(2.22) \qquad \lim_{u_0 \to 0} \bar{x}(P_0) = 0$$

uniformemente rispetto a λ in ogni intervallo del tipo $\frac{1}{l} \leq \lambda \leq \Lambda - \frac{1}{l}$: quindi la proprietà $\bar{x}(0, \lambda) = 0$ sarà verificata su tutto l'intervallo aperto $0 < \lambda < \Lambda$. c.v.d.

3. – Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema:

Indicato con $\bar{T} = \inf . T(x)$, $\bar{T}$ è anche un minimo, cioè esiste un $\bar{x} \in D \subset E$ tale che $\bar{T} = T(\bar{x})$.

Notiamo subito che essendo $T(x) \geq 0$ sarà anche $\bar{T} \geq 0$. Come è noto il Teorema si riduce a dimostrare la semicontinuità inferiore di $T(x)$ sul suo dominio D. Infatti, considerata una successione minimante x_n tale che

$$(3.1) \qquad \bar{T} \leq T(x_n) < \bar{T} + 1/n$$

dalla (3.1) risulta che x_n è limitata in D' e quindi si può trovare un $\bar{x} \in D$ a cui tende in E una sottosuccessione $\bar{x}_n$ di x_n.

Ma se $T(\bar{x})$ è semicontinuo inferiormente dovrà essere:

$$T(\bar{x}_n) - T(\bar{x}) \geq -\varepsilon \qquad \forall n > N_\varepsilon \tag{3.2}$$

e quindi si avrà:

$$\bar{T} \leq \bar{T}(\bar{x}) \leq T(\bar{x}_n) + \varepsilon \leq \bar{T} + \frac{1}{n} + \varepsilon \qquad \forall n > N_\varepsilon \tag{3.3}$$

da cui si ricava infine

$$\bar{T} = T(\bar{x}). \tag{3.4}$$

Ci resta quindi da dimostrare che se $x_n \xrightarrow[E]{} x \quad x_n, x \in D$ allora

$$T(x_n) - T(x) \geq -\varepsilon\,. \tag{3.5}$$

A tale scopo notiamo che, ponendo come di consueto:

$$p = \frac{\partial x}{\partial u} \qquad q = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \qquad p_n = \frac{\partial x_n}{\partial u} \qquad q_n = \frac{\partial x_n}{\partial \lambda}\,.$$

$$\begin{aligned}
T(x_n) - T(x) &= \int_\Omega \left\{ \frac{2}{r^2}\left(\frac{p^2+q^2}{r^2} - 1\right)[p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^4}[p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2]^2 \right\} r^2\, d\Omega \geq \\
&\geq 2\int_\Omega \left(\frac{p^2+q^2}{r^2} - 1\right)[p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2]\, d\Omega = \\
&= 2\int_{\Omega-\Omega_l} \left(\frac{p^2+q^2}{r^2} - 1\right)[p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2]\, d\Omega + \\
&\quad + 2\int_{\Omega_l} \left(\frac{p^2+q^2}{r^2} - 1\right)[p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2]\, d\Omega = \\
&= \eta_l(x_n, x) + \omega_l(x_n, x)\,.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Esaminiamo separatamente i due addendi. Usando la diseguaglianza di Schwartz si ha:

$$|\eta_l(x_n, x)|^2 \leq 4\int_{\Omega-\Omega_l} \left(\frac{p^2+q^2}{r^2} - 1\right)^2 d\Omega \cdot \int_{\Omega-\Omega_l} (p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2)^2\, d\Omega\,. \tag{3.7}$$

Poiché d'altro canto $\|x_n\|_{H^{1,4}}, \|x\|_{H^{1,4}} \leq$ costante, ne segue a fortiori

$$\int_{\Omega-\Omega_l} (p_n^2 - p^2 + q_n^2 - q^2)^2\, d\Omega \leq K\,, \qquad \text{costante opportuna.} \tag{3.8}$$

Inoltre essendo $\left(\frac{p^2+q^2}{r^2}-1\right)^2$ una funzione integrabile su tutto Ω, considerato che la misura di $\Omega-\Omega_l$ tende a zero per $l\to\infty$, sarà:

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\Omega-\Omega_l}\left(\frac{p^2+q^2}{r^2}-1\right)^2 d\Omega=0 \tag{3.9}$$

da cui segue

$$\lim_{l\to\infty}\eta_l(x_n\,,x)=0 \qquad \text{uniformemente rispetto ad } n\,. \tag{3.10}$$

Potremo perciò trovare un L per cui si abbia

$$|\eta_L(x_n\,,x)|<\varepsilon \qquad \forall n\,. \tag{3.11}$$

Esaminiamo ora il secondo addendo $\omega_L(x_n\,,x)$: notiamo che dalla definizione di convergenza in E risulta che $x_n\to x$ uniformemente su Ω_L, ed essendo x_n ed x armoniche in $\Omega\supset\Omega_L$ si ha anche $p_n\to p\,,q_n\to q$ uniformemente in Ω_L.

Ne consegue che le funzioni $p_n\,,q_n\,,p\,,q$ saranno equilimitate su Ω_L, cosicché si avrà in tale insieme

$$\left|\left(\frac{p^2+q^2}{r^2}-1\right)(p_n^2-p^2+q_n^2-q^2)\right|\le A\left|\frac{p^2+q^2}{r^2}-1\right|\,. \tag{3.12}$$

A costante opportuna.

Ora essendo $\left(\frac{p^2+q^2}{r^2}-1\right)$ una funzione integrabile su Ω e quindi anche su Ω_L, per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si può passare al limite sotto il segno di integrale e si trova

$$\lim_{n\to\infty}\omega_L(x_n\,,x)=0\,. \tag{3.13}$$

Si potrà quindi trovare un N_ε per cui sia

$$|\omega_L(x_n\,,x)|<\varepsilon \qquad \forall n>N_\varepsilon\,. \tag{3.14}$$

Dalle (3.6), (3.11) e (3.14) allora troviamo

$$T(x_n)-T(x)\ge\eta_L(x_n\,,x)+\omega_L(x_n\,,x)>-2\varepsilon \qquad \forall n>N_\varepsilon \tag{3.15}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

4. – Concludiamo la ricerca facendo alcune osservazioni sulla soluzione del problema.

Innanzitutto la soluzione del problema così posto non è unica: infatti si vede subito che se x è una soluzione, cioè $T(x)=\overline{T}$, allora anche $-x$ lo è, cioè $T(-x)=\overline{T}$.

Inoltre si può facilmente vedere che se esiste una soluzione $x(u\,,\lambda)$ non simmetrica rispetto al meridiano centrale $\Lambda/2$, allora anche $x'(u\,,\lambda)=$ $=x(u\,,\Lambda-\lambda)\neq x(u\,,\lambda)$ è una soluzione, cioè $T(x)=T(x')=\overline{T}$.

Dal punto di vista dell'utilizzazione della carta appare abbastanza ovvio che si possono ragionevolmente introdurre ulteriori condizioni sulla x: cioè

$$x(u, \lambda) > 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{4.1}$$

e inoltre che $x(u, \lambda)$ sia pari rispetto a $\Lambda/2$ o equivalentemente che

$$\left.\frac{\partial x(u, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 0 \tag{4.2}$$

il che permette di estendere la soluzione nell'insieme

$$\Omega' \equiv \{0 < u < U ; -\Lambda < \lambda < 0\}$$

ponendo per simmetria $x(u, -\lambda) = x(u, \lambda)$.

Si può vedere facilmente che, introdotto il sottoinsieme E_0 degli elementi di E che soddisfano alle (4.1) e (4.2) e tenuto conto che E_0 è un insieme chiuso nella topologia di E, esiste una minimante di $T(x)$ in E_0. In altri termini esiste una funzione che rende minimo $T(x)$ tra tutte quelle che soddisfano le condizioni (1.7), (4.1) e (4.2).

Questo non significa ancora che la soluzione del problema di minimo su E_0 sia unica; tale proprietà infatti andrebbe dimostrata a parte.

BIBLIOGRAFIA

JORDAN e EGGERT, *Handbuch der Vermessungskunde Driker band*, Zweiter Halbband, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1941.

MARTIN HOTINE, *Mathematical Geodesy*. U. S. Department of Commerce, Environmental Science Services Administration, Washington D. C. 1969.

RIESZ e NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthiers Villars, Paris 1965.

CLAUDE BERGE, *Espaces topologiques*, « Fonctions multivoques ». Dunod, Paris 1966.