Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Pia Colautti

Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 141–149.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_141_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti.* Nota III di MARIA PIA COLAUTTI [(*)], presentata [(**)] dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — The Green operator $\Gamma^{(n)}$ of the differential problem (having as eigenvalues the $\lambda_h^{(n)}$'s) introduced in Nota I, is constructed. It is shown that the orthogonal invariant $\mathfrak{I}_1^s(\Gamma^{(n)})$ converges by decreasing to the corresponding orthogonal invariant of the eigenvalue problem considered in Nota I and the approximation error is estimated.

In questa Nota III vogliamo costruire la funzione di Green relativa al problema (15), (16) considerato nella Nota I e calcolare i corrispondenti invarianti ortogonali [(1)].

6. – FUNZIONE DI GREEN ASSOCIATA ALL'OPERATORE $E^{(n)}$ E ALLE CONDIZIONI (16).

Relativamente alla fissata decomposizione $\mathfrak{D}_n$ dell'intervallo $[0, 1]$, consideriamo l'operatore differenziale $E^{(n)}(u)$ che, nel k-esimo intervallo (x_k, x_{k+1}) coincide con l'operatore a coefficienti costanti $\theta_k^{(n)} u'' - c_k^{(n)} u$. Nel corso di questo paragrafo, scriveremo brevemente θ_k invece di $\theta_k^{(n)}$ e c_k invece di $c_k^{(n)}$. I numeri c_k, minimi di $c(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$ sono non negativi. Non sarà restrittivo supporre che essi siano positivi. A questo caso, infatti, ci si può sempre ricondurre sostituendo nell'equazione $E(u) + \lambda u = 0$ a $c(x)$, $c(x) + 1$ e a $\lambda, \lambda + 1$.

Fissata una funzione $f(x)$ in $\mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$ vogliamo esplicitamente rappresentare la funzione u, soluzione di $E^{(n)}(u) + f = 0$ e verificante le (16), sotto la forma:

$$u(x) = -\int_0^1 G_n(x, \xi) f(\xi) d\xi . \tag{46}$$

A tale scopo indichiamo con $f_k(x)$ e con $u_k(x)$ le restrizioni di $f(x)$ e di $u(x)$ al k-esimo intervallo (x_k, x_{k+1}).

Posto:

$$a_k^2 = \frac{c_k}{\theta_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

(*) Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

(1) La numerazione dei paragrafi, delle formule e dei teoremi della presente Nota III prosegue quella delle Note I e II [questi «Rendiconti», *51* (6), 477–485 (1971) e *52* (1), 24–35 (1972)].

l'integrale generale dell'equazione $\theta_k u'' - c_k u + f_k(x) = 0$ è dato da:

$$u_k(x) = \beta_{2k-1} e^{a_k x} + \beta_{2k} e^{-a_k x} - \frac{1}{2 a_k \theta_k} \int_{x_k}^{x} [e^{a_k(x-\xi)} - e^{-a_k(x-\xi)}] f_k(\xi) \, d\xi \tag{47}$$

dove nella (47) β_{2k-1} e β_{2k} denotano $2n$ costanti arbitrarie e x varia nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$.

Imponendo le condizioni (16) si ottiene per $\beta_1, \cdots, \beta_{2n}$ il seguente sistema lineare algebrico:

$$\left\{\begin{aligned}
&\beta_1 e^{a_1 x_1} + \beta_2 e^{-a_1 x_1} = 0 \\
&\beta_{2k-3} e^{a_{k-1} x_k} + \beta_{2k-2} e^{-a_{k-1} x_k} - \beta_{2k-1} e^{a_k x_k} - \beta_{2k} e^{-a_k x_k} = \\
&\qquad = \frac{1}{a_{k-1} \theta_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \operatorname{senh}[a_{k-1}(x_k - \xi)] f_{k-1}(\xi) \, d\xi \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \\
&\beta_{2k-3} e^{a_{k-1} x_k} - \beta_{2k-2} e^{-a_{k-1} x_k} - \beta_{2k-1} \frac{a_k \theta_k}{a_{k-1} \theta_{k-1}} e^{a_k x_k} + \beta_{2k} \frac{a_k \theta_k}{a_{k-1} \theta_{k-1}} e^{-a_k x_k} = \\
&\qquad = \frac{1}{a_{k-1} \theta_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cosh[a_{k-1}(x_k - \xi)] f_{k-1}(\xi) \, d\xi \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \\
&\beta_{2n-1} e^{a_n x_{n+1}} + \beta_{2n} e^{-a_n x_{n+1}} = \frac{1}{a_n \theta_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \operatorname{senh}[a_n(x_{n+1} - \xi)] f_n(\xi) \, d\xi .
\end{aligned}\right. \tag{48}$$

Fatte le posizioni:

$$\sigma_k = \frac{a_k \theta_k}{a_{k-1} \theta_{k-1}} = \sqrt{\frac{c_k \theta_k}{c_{k-1} \theta_{k-1}}} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \tag{49}$$

$$\xi_{kk} = a_k x_k \quad ; \quad \xi_{k,k+1} = a_k x_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{50}$$

$$p_k = \frac{1}{a_{k-1} \theta_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \operatorname{senh}[a_{k-1}(x_k - \xi)] f_{k-1}(\xi) \, d\xi \qquad (k = 2, 3, \cdots, n+1) \tag{51}$$

$$q_k = \frac{1}{a_{k-1} \theta_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cosh[a_{k-1}(x_k - \xi)] f_{k-1}(\xi) \, d\xi \qquad (k = 2, 3, \cdots, n), \tag{52}$$

il sistema (48) si scrive:

$$\left\{\begin{aligned}
&e^{\xi_{11}} \beta_1 + e^{-\xi_{11}} \beta_2 = 0 \\
&e^{\xi_{k-1,k}} \beta_{2k-3} + e^{-\xi_{k-1,k}} \beta_{2k-2} - e^{\xi_{kk}} \beta_{2k-1} - e^{-\xi_{kk}} \beta_{2k} = p_k \quad (k = 2, 3, \cdots, n) \\
&e^{\xi_{k-1,k}} \beta_{2k-3} - e^{-\xi_{k-1,k}} \beta_{2k-2} - \sigma_k e^{\xi_{kk}} \beta_{2k-1} + \sigma_k e^{-\xi_{kk}} \beta_{2k} = q_k \\
&\qquad\qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \\
&e^{\xi_{n,n+1}} \beta_{2n-1} + e^{-\xi_{n,n+1}} \beta_{2n} = p_{n+1} .
\end{aligned}\right. \tag{53}$$

Introduciamo le incognite $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2n}$ legate alle $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2n}$ dalle sostituzioni:

$$(54)\qquad \begin{aligned} \tau_{2k-3} &= e^{\xi_{k-1,k}}\beta_{2k-3} + e^{-\xi_{k-1,k}}\beta_{2k-2} \\ \tau_{2k-2} &= e^{\xi_{k-1,k}}\beta_{2k-3} - e^{-\xi_{k-1,k}}\beta_{2k-2} \end{aligned} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n+1).$$

Riesce:

$$(55)\qquad \begin{aligned} \beta_{2k-3} &= e^{-\xi_{k-1,k}}\,\frac{\tau_{2k-3}+\tau_{2k-2}}{2} \\ \beta_{2k-2} &= e^{\xi_{k-1,k}}\,\frac{\tau_{2k-3}-\tau_{2k-2}}{2} \end{aligned} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n+1).$$

Posto:

$$(56)\qquad \alpha_k = \xi_{kk} - \xi_{k,k+1} = -a_k(x_{k+1}-x_k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(57)\qquad C_k = e^{\alpha_k} + e^{-\alpha_k} \quad ; \quad S_k = e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

le equazioni del sistema (53) si scrivono:

$$(58)\qquad \begin{cases} C_1\tau_1 + S_1\tau_2 = 0 \\ \tau_{2k-3} = p_k + \frac{1}{2}(C_k\tau_{2k-1} + S_k\tau_{2k}) \\ \tau_{2k-2} = q_k + \frac{\sigma_k}{2}(S_k\tau_{2k-1} + C_k\tau_{2k}) \\ \tau_{2n-1} = p_{n+1} \end{cases} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n).$$

Poniamo:

$$(59)\qquad a^{(1)} = C_1 \quad ; \quad b^{(1)} = S_1 \quad ; \quad d^{(1)} = 0$$

$$(60)\qquad a^{(k)} = a^{(k-1)}C_k + \sigma_k b^{(k-1)}S_k \qquad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

$$(61)\qquad b^{(k)} = a^{(k-1)}S_k + \sigma_k b^{(k-1)}C_k \qquad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

$$(62)\qquad d^{(k)} = 2\,[d^{(k-1)} + a^{(k-1)}p_k + b^{(k-1)}q_k] \qquad (k = 2, 3, \cdots, n).$$

Dalle (56) e (57) segue che $C_k > 0$ e $S_k < 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$; pertanto, i numeri calcolati con le (60) e (61) sono, rispettivamente, tutti positivi e tutti negativi.

Con le posizioni (59) la prima equazione delle (58) si scrive:

$$(63)\qquad a^{(1)}\tau_1 + b^{(1)}\tau_2 + d^{(1)} = 0;$$

sostituendo nella (63) le espressioni di τ_1 e τ_2 date dalle (58) per $k = 2$, e tenendo presenti le (60), (61) e (62) per $k = 2$ si trova:

$$(64)\qquad a^{(2)}\tau_3 + b^{(2)}\tau_4 + d^{(2)} = 0.$$

Così procedendo si trova:

$$a^{(k)}\,\tau_{2k-1} + b^{(k)}\,\tau_{2k} + d^{(k)} = 0 \qquad (k = 2, 3, \cdots, n). \tag{65}$$

Essendo $\tau_{2n-1} = p_{n+1}$, dall'ultima delle (65) – ottenuta per $k = n$ – si trae, essendo $b^{(n)} \neq 0$:

$$\tau_{2n} = -\frac{d^{(n)}}{b^{(n)}} - \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}\,p_{n+1}\,. \tag{66}$$

Dalla (62) si ottiene:

$$d^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i}\left(a^{(i)}\,p_{i+1} + b^{(i)}\,q_{i+1}\right)$$

e quindi, sostituendo nella (66) si trova:

$$\tau_{2n-1} = p_{n+1} \tag{67}$$

$$\tau_{2n} = -\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}\,p_{n+1} - \frac{1}{b^{(n)}}\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i}\left(a^{(i)}\,p_{i+1} + b^{(i)}\,q_{i+1}\right). \tag{68}$$

Le (50) e (60), con le posizioni:

$$\rho_i^{(2n-1)} = 0 \qquad (i = 2, \cdots, n) \qquad \rho_{n+1}^{(2n-1)} = 1 \tag{69}$$

$$\rho_i^{(2n)} = \frac{2^{n-i}\,a^{(i-1)}}{b^{(n)}} \qquad (i = 2, \cdots, n) \qquad \rho_{n+1}^{(2n)} = -\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \tag{70}$$

$$\tilde{\rho}_j^{(2n-1)} = 0 \qquad (j = 2, \cdots, n) \tag{71}$$

$$\tilde{\rho}_j^{(2n)} = \frac{2^{n-j}\,b^{(j)}}{b^{(n)}} \qquad (j = 2, \cdots, n) \tag{72}$$

si possono scrivere:

$$\tau_{2n-1} = \sum_{i=2}^{n+1} \rho_i^{(2n-1)}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} \tilde{\rho}_j^{(2n-1)}\,q_j \tag{73}$$

$$\tau_{2n} = \sum_{i=2}^{n+1} \rho_i^{(2n)}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} \tilde{\rho}_j^{(2n)}\,q_j\,. \tag{74}$$

Sostituendo le espressioni di τ_{2n-1} e τ_{2n} date dalle (73) e (74) nelle (58) per $k = n$ si determinano τ_{2n-3} e τ_{2n-2} e, successivamente, sostituendo i valori così trovati nelle medesime relazioni, per $k = n - 1$, $k = n - 2$, etc. si trovano tutte le espressioni di $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2n}$ in funzione di $p_2, \cdots, p_{n+1}, q_2, \cdots, q_n$. È facile verificare che le formule atte a determinare le incognite $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2n}$ sono le seguenti:

$$\tau_{2k-3} = \sum_{i=2}^{n+1} \rho_i^{(2k-3)}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} \tilde{\rho}_j^{(2k-3)}\,q_j \tag{75}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n+1)$$

$$\tau_{2k-2} = \sum_{i=2}^{n+1} \rho_i^{(2k-2)}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} \tilde{\rho}_j^{(2k-2)}\,q_j \tag{76}$$

ove i coefficienti si calcolano con le posizioni (69), (70), (71) e (72) e con le formule ricorrenti:

$$\rho_i^{(2k-3)} = \frac{1}{2}\left[C_k\,\rho_i^{(2k-1)} + S_k\,\rho_i^{(2k)}\right] \qquad (i = 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n+1) \tag{77}$$

$$\rho_k^{(2k-3)} = \frac{1}{2}\left[C_k\,\rho_k^{(2k-1)} + S_k\,\rho_k^{(2k)}\right] + 1 \tag{78}$$

$$\rho_i^{(2k-2)} = \frac{\sigma_k}{2}\left[S_k\,\rho_i^{(2k-1)} + C_k\,\rho_i^{(2k)}\right] \qquad (i = 2, 3, \cdots, n+1) \tag{79}$$

$$\tilde\rho_j^{(2k-3)} = \frac{1}{2}\left[C_k\,\tilde\rho_j^{(2k-1)} + S_k\,\tilde\rho_j^{(2k)}\right] \qquad (j = 2, 3, \cdots, n) \tag{80}$$

$$\tilde\rho_j^{(2k-2)} = \frac{\sigma_k}{2}\left[S_k\,\tilde\rho_j^{(2k-1)} + C_k\,\tilde\rho_j^{(2k)}\right] \qquad (j=2, 3, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n+1) \tag{81}$$

$$\tilde\rho_k^{(2k-2)} = \frac{\sigma_k}{2}\left[S_k\,\tilde\rho_k^{(2k-1)} + C_k\,\tilde\rho_k^{(2k)}\right] + 1 \tag{82}$$

per $k = 2, 3, \cdots, n$.

Poniamo ancora:

$$A_{ik} = e^{-\xi_{k-1,k}}\,\frac{\rho_i^{(2k-3)} + \rho_i^{(2k-2)}}{2} \qquad A^*_{ik} = e^{\xi_{k-1,k}}\,\frac{\rho_i^{(2k-3)} - \rho_i^{(2k-2)}}{2} \tag{83}$$

$$B_{jk} = e^{-\xi_{k-1,k}}\,\frac{\tilde\rho_j^{(2k-3)} + \tilde\rho_j^{(2k-2)}}{2} \qquad B^*_{jk} = e^{\xi_{k-1,k}}\,\frac{\tilde\rho_j^{(2k-3)} + \tilde\rho_j^{(2k-2)}}{2}\,; \tag{84}$$

le (55), ove si sostituisca k con $k-1$, divengono:

$$\beta_{2k-1} = \sum_{i=2}^{n+1} A_{i,k+1}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} B_{j,k+1}\,q_j \tag{85}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$

$$\beta_{2k} = \sum_{i=2}^{n+1} A^*_{i,k+1}\,p_i + \sum_{j=2}^{n} B^*_{j,k+1}\,q_j \tag{86}$$

Sostituendo le espressioni (85) e (86) nella (47) si ha:

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i\,\theta_i}\left\{A_{i+1,k+1}\,e^{a_k x} + A^*_{i+1,k+1}\,e^{-a_k x}\right\}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{senh}\left[a_i(x_{i+1}-\xi)\right] f_i(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i\,\theta_i}\left\{B_{i+1,k+1}\,e^{a_k x} + B^*_{i+1,k+1}\,e^{-a_k x}\right\}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \cosh\left[a_i(x_{i+1}-\xi)\right] f_i(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{1}{a_k\,\theta_k}\int_{x_k}^{x} \operatorname{senh}\left[a_k(x-\xi)\right] f_k(\xi)\,d\xi$$

e quindi:

$$(87) \qquad u_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_{ki}(x,\xi) f_i(\xi)\, d\xi + \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_{kk}(x,\xi) f_k(\xi)\, d\xi + \int_{x_k}^{x} g_k(x,\xi) f_k(\xi)\, d\xi + \\ + \sum_{i=k+1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_{ki}(x,\xi) f_i(\xi)\, d\xi ,$$

avendo posto:

$$(88) \qquad g_{ki}(x,\xi) = -\frac{1}{a_i\,\theta_i}(A_{i+1,k+1}\, e^{a_k x} + A^*_{i+1,k+1}\, e^{-a_k x}) \operatorname{senh}[a_i(x_{i+1}-\xi)] - \\ -\frac{1}{a_i\,\theta_i}(B_{i+1,k+1}\, e^{a_k x} + B^*_{i+1,k+1}\, e^{-a_k x}) \cosh[a_i(x_{i+1}-\xi)]$$

$$(x_k \leq x \leq x_{k+1}\ ;\ x_i \leq \xi \leq x_{i+1}\ ;\ k = 1, 2, \cdots, n\ ;\ i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$(89) \qquad g_{kn}(x,\xi) = -\frac{1}{a_n\,\theta_n}(A_{n+1,k+1}\, e^{a_k x} + A^*_{n+1,k+1}\, e^{-a_k x}) \operatorname{senh}[a_n(x_{n+1}-\xi)]$$

$$(x_k \leq x \leq x_{k+1}\ ;\ x_n \leq \xi \leq x_{n+1}\ ;\ k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(90) \qquad g_k(x,\xi) = \frac{1}{a_k\,\theta_k} \operatorname{senh}[a_k(x-\xi)]$$

$$(x_k \leq x \leq x_{k+1}\ ;\ x_k \leq \xi \leq x\ ;\ k = 1, 2, \cdots, n) .$$

Introdotta la funzione $G_n(x, \xi)$, così definita al variare di x in (x_k, x_{k+1}) $(k = 1, 2, \cdots, n)$:

$$G_n(x,\xi) \begin{cases} = g_{k1}(x,\xi) & (x_1 \leq \xi \leq x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ = g_{k,k-1}(x,\xi) & (x_{k-1} \leq \xi \leq x_k) \\ = g_{kk}(x,\xi) + g_k(x,\xi) & (x_k \leq \xi \leq x) \\ = g_{kk}(x,\xi) & (x \leq \xi \leq x_{k+1}) \\ = g_{k,k+1}(x,\xi) & (x_{k+1} \leq \xi \leq x_{k+2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ = g_{k,n}(x,\xi) & (x_n \leq \xi \leq x_{n+1}) \end{cases}$$

si ottiene per la $u(x)$ la richiesta rappresentazione:

$$u(x) = -\int_0^1 G_n(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Posto:

$$\Gamma^{(n)}(f) = \int_0^1 G_n(x, \xi) f(\xi) \, d\xi , \tag{91}$$

l'n-esimo problema di autovalori, approssimante il problema (2), cioè il problema:

$$E^{(n)}(u) + \lambda^{(n)} u = 0$$

u, verificante le (16), è pertanto equivalente, tenendo presente la (91), al seguente problema:

$$\Gamma^{(n)} f - \mu^{(n)} f = 0 \qquad \mu^{(n)} = [\lambda^{(n)}]^{-1}, \; f \in \mathfrak{L}^{(2)}(0, 1). \tag{92}$$

7. – VALUTAZIONE PER ECCESSO DI TALUNI INVARIANTI ORTOGONALI CONNESSI CON IL PROBLEMA (2) E LORO CALCOLO.

Si consideri il problema di autovalori (2):

$$E(u) + \lambda u = 0 , \qquad u \in \mathfrak{A} .$$

Esso è equivalente al problema: $\Gamma f - \mu f = 0$, $f \in \mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$, con $\mu = \lambda^{-1}$ e Γ dato da: $\Gamma f = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi$. $G(x, \xi)$ è la funzione di Green del problema $E(u) + f = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ (cfr. *loc. cit.* [1]; Nota I). L'operatore $\Gamma^{(n)}$, definito con le (91), è maggiorante l'operatore Γ, ed è simmetrico e compatto. Fissato l'intero positivo s, risulta (cfr. *loc. cit.* [2], Nota I):

$$\mathfrak{J}_1^s(\Gamma^{(n)}) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h^{(n)}]^s} , \tag{93}$$

$$\mathfrak{J}_1^s(\Gamma) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h]^s} , \tag{94}$$

dove con $\mathfrak{J}_1^s(\Gamma^{(n)})$ e $\mathfrak{J}_1^s(\Gamma)$ si sono indicati gli invarianti ortogonali di primo grado e di ordine s, relativi a $\Gamma^{(n)}$ e a Γ.

Per il principio di massimo–minimo, riesce: $\lambda_h^{(1)} \leq \lambda_h^{(2)} \leq \cdots \leq \lambda_h^{(n)} \leq \cdots < \lambda_h$.

Pertanto, dalle (93) e (94) si trae che $\mathfrak{J}_1^s(\Gamma^{(n)})$ è, per ogni n, una valutazione per eccesso di $\mathfrak{J}_1^s(\Gamma)$.

Vogliamo ora provare che:

V. *Si ha*:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{J}_1^s(\Gamma^{(n)}) = \mathfrak{J}_1^s(\Gamma) .$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia ν_ε tale che:

(95) $$\sum_{h=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h^{(1)}]^s} < \varepsilon .$$

Sia ρ_ε tale che:

(96) $$\rho_\varepsilon [\lambda_{\nu_\varepsilon} + \theta_1^{(1)}] = \frac{\varepsilon [\lambda_1^{(1)}]^{s+1}}{s \nu_\varepsilon} \theta_1^{(1)} .$$

Diciamo n_ε un intero tale che, per $n > n_\varepsilon$, si abbia:

(97) $$\theta(x) - \theta^{(n)}(x) \leq \rho_\varepsilon \quad ; \quad c(x) - c^{(n)}(x) \leq \rho_\varepsilon ,$$

dove $\theta^{(n)}(x)$ e $c^{(n)}(x)$ sono le funzioni definite dalle (7).

Per il Teorema I, assunto $\sigma = \tau = \rho_\varepsilon$, poiché la (96) ci assicura che è soddisfatta la (4) e le (97) ci assicurano che sono verificate le (5), si ha, per $n > n_\varepsilon$:

$$\lambda_h - \lambda_h^{(n)} \leq \frac{\varepsilon [\lambda_1^{(1)}]^{s+1}}{s \nu_\varepsilon} \qquad (h = 1, 2, \cdots, \nu_\varepsilon) .$$

Pertanto:

(98) $$\frac{1}{[\lambda_h^{(n)}]^s} - \frac{1}{[\lambda_h]^s} = \frac{[\lambda_h]^s - [\lambda_h^{(n)}]^s}{[\lambda_h^{(n)}]^s [\lambda_h]^s} \leq \frac{(\lambda_h - \lambda_h^{(n)}) \, s [\lambda_h]^{s-1}}{[\lambda_h^{(n)}]^s [\lambda_h]^s} =$$

$$= (\lambda_h - \lambda_h^{(n)}) \frac{s}{\lambda_h [\lambda_h^{(n)}]^s} \leq (\lambda_h - \lambda_h^{(n)}) \frac{s}{[\lambda_1^{(1)}]^{s+1}} \leq \frac{\varepsilon}{\nu_\varepsilon} .$$

Se $n > n_\varepsilon$, si ha allora, per le (95) e (98):

$$\mathfrak{I}_1^s(\Gamma^{(n)}) - \mathfrak{I}_1^s(\Gamma) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{[\lambda_h^{(n)}]^s} - \frac{1}{[\lambda_h]^s} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\nu_\varepsilon} \left(\frac{1}{[\lambda_h^{(n)}]^s} - \frac{1}{[\lambda_h]^s} \right) + \sum_{h=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h^{(n)}]^s} - \sum_{h=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h]^s} \leq \varepsilon + 2 \sum_{h=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_h^{(1)}]^s} = 3\varepsilon .$$

Ciò prova il Teorema.

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle testè fatte, si vede che:

VI. *Nelle ipotesi del Teorema II, fissato arbitrariamente l'intero positivo* ν, *si ha, per ogni* n:

$$\mathfrak{I}_1^s(\Gamma^{(n)}) - \mathfrak{I}_1^s(\Gamma) <$$

$$< s\delta_n \frac{\mathrm{M}(\bar{c} + \bar{\theta} \nu^2 \pi^2) + \mathrm{L}\theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}} \sum_{h=1}^{\nu} \frac{1}{[c_1^{(1)} + \theta_1^{(1)} h^2 \pi^2]^{s+1}} + 2 \sum_{h=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{[c_1^{(1)} + \theta_1^{(1)} h^2 \pi^2]^s} .$$

Il nucleo

$$G_n^{(s)}(x,t) = \int_0^1 G_n^{(s-1)}(x,\xi)\, G_n^{(1)}(\xi\,,t)\, d\xi \qquad (s \geq 2)\ ;\ G_n^{(1)}(x\,,t) \equiv G_n(x\,,t)\,,$$

iterato di $G_n(x\,,\xi)$ si può esplicitamente calcolare con le formule (88), (89) e (90). Essendo (cfr. *loc. cit.* [1], Nota I):

$$\mathfrak{I}_1^s(\Gamma^{(n)}) = \int_0^1 G_n^{(s)}(x\,,x)\, dx\,, \tag{99}$$

la (99) fornisce una formula, numericamente calcolabile, per la valutazione per eccesso di $\mathfrak{I}_1^s(\Gamma)$. Ciò permette di affrontare il problema del calcolo per difetto degli autovalori del problema (2) (cfr. *loc. cit.* [2], Nota I).