Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Pia Colautti

Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.1, p. 24–35.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_1_24_0>

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti.* Nota II di Maria Pia Colautti (*), presentata (**) dal Socio M. Picone.

Summary. — The lower bounds $\lambda_h^{(n)}$ to the eigenvalues λ_h of the problem considered in Nota I, are obtained as zeroes of a trascendental function represented by a $2n\times 2n$ determinant. A procedure for the computation of this determinant, by means of recursion formulas, is given.

In questa Nota vogliamo indicare come le approssimazioni per difetto $\lambda_h^{(n)}$ degli autovalori λ_h del problema considerato nella Nota I, possano ottenersi come zeri di una trascendente il cui calcolo numerico può eseguirsi mediante opportune formule di ricorrenza (1).

3. – La trascendente $F_{2n}(\lambda)$.

Supposto fissato n, per ogni λ complesso, indicheremo con $\omega_k(\lambda)$ la funzione, della variabile complessa λ, che coincide con la funzione analitica di λ determinata dalla condizione di essere, per ogni $\lambda \neq c_k^{(n)}$, la determinazione principale di $\left[\dfrac{c_k^{(n)}-\lambda}{\theta_k^{(n)}}\right]^{1/2}$ (2).

Introdotte le costanti arbitrarie γ_{1k} e γ_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, n)$, l'integrale generale della (15), per $\lambda \neq c_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ e $x \in [x_k, x_{k+1}]$, si può scrivere:

$$u(x) = \gamma_{1k}\, e^{\omega_k(\lambda)x} + \gamma_{2k}\, e^{-\omega_k(\lambda)x} \qquad x_k \leq x \leq x_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Imponendo le (16) si ottiene il sistema:

$$(17)\quad \begin{cases} \gamma_{11}\, e^{\omega_1 x_1} + \gamma_{21}\, e^{-\omega_1 x_1} = 0 \\ \gamma_{1,k-1}\, e^{\omega_{k-1} x_k} - \gamma_{1,k}\, e^{\omega_k x_k} + \gamma_{2,k-1}\, e^{-\omega_{k-1} x_k} - \gamma_{2,k}\, e^{-\omega_k x_k} = 0 \\ \gamma_{1,k-1}\, \theta_{k-1}^{(n)}\, \omega_{k-1}\, e^{\omega_{k-1} x_k} - \gamma_{1,k}\, \theta_k^{(n)}\, \omega_k\, e^{\omega_k x_k} - \gamma_{2,k-1}\, \theta_{k-1}^{(n)}\, \omega_{k-1}\, e^{-\omega_{k-1} x_k} + \\ \qquad\qquad + \gamma_{2,k}\, \theta_k^{(n)}\, \omega_k\, e^{-\omega_k x_k} = 0 \\ \gamma_{1n}\, e^{\omega_n x_{n+1}} + \gamma_{2n}\, e^{-\omega_n x_{n+1}} = 0 \end{cases}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n).$$

(*) Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

(1) La numerazione dei paragrafi, delle formule e dei teoremi della presente Nota II prosegue quella della Nota I [questi «Rendiconti», *51* (6), 477–485 (1971)].

(2) Sarebbe più corretto indicare tale funzione con $\omega_k^{(n)}(\lambda)$. Poiché nella discussione che segue n si supporrà assegnato, useremo il simbolo più semplice $\omega_k(\lambda)$.

Poniamo:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
&\gamma_{1k} = t_k \quad (k = 1, \cdots, n), \qquad \gamma_{2k} = t_{n+k} && (k = 1, 2, \cdots, n)\\
&\xi_{kk} = \xi_{kk}(\lambda) = \omega_k(\lambda) x_k && (k = 1, \cdots, n)\\
&\xi_{k-1,k} = \xi_{k-1,k}(\lambda) = \omega_{k-1}(\lambda) x_k && (k = 2, \cdots, n)\\
&\eta_k = \eta_k(\lambda) = \theta_k^{(n)}\, \omega_k(\lambda) && (k = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

Il sistema (17), fatte le posizioni (18), diviene:

$$
(19)\qquad
\begin{cases}
t_1\, e^{\xi_{11}} + t_{n+1}\, e^{-\xi_{11}} = 0\\
t_{k-1}\, e^{\xi_{k-1,k}} - t_k\, e^{\xi_{kk}} + t_{n+k-1}\, e^{-\xi_{k-1,k}} - t_{n+k}\, e^{-\xi_{kk}} = 0 \qquad (k = 2, \cdots, n)\\
t_{k-1}\,\eta_{k-1}\, e^{\xi_{k-1,k}} - t_k\,\eta_k\, e^{\xi_{kk}} - t_{n+k-1}\,\eta_{k-1}\, e^{-\xi_{k-1,k}} + t_{n+k}\,\eta_k\, e^{-\xi_{kk}} = 0\\
\qquad\qquad (k = 2, \cdots, n)\\
t_n\, e^{\xi_{n,n+1}} + t_{2n}\, e^{-\xi_{n,n+1}} = 0\,.
\end{cases}
$$

Gli elementi a_{ij} della matrice $2n \times 2n$, $A = A(\lambda)$ dei coefficienti del sistema (19) nelle incognite $t_1, \cdots, t_{2n}$, si possono distribuire in quattro sottomatrici $n \times n$, *bidiagonali*. Precisamente, posto:

$$
(20)\qquad A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right\|,
$$

la matrice A_1 è la matrice $n \times n$, così definita:

$$
(20)_1\qquad A_1:\quad
\begin{aligned}
&a_{11} = e^{\xi_{11}} \quad ; \quad a_{kk} = -\, e^{\xi_{kk}} && (k = 2, 3, \cdots, n)\\
&a_{k,k-1} = e^{-\xi_{k-1,k}} && (k = 2, 3, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

(gli altri elementi della matrice A_1 essendo tutti uguali a zero).

La matrice A_2 è la matrice $n \times n$, così definita:

$$
(20)_2\qquad A_2:\quad
\begin{aligned}
&a_{1,1+n} = e^{-\xi_{11}} \quad ; \quad a_{k,k+n} = -\, e^{-\xi_{kk}} && (k = 2, 3, \cdots, n)\\
&a_{k,k-1+n} = e^{-\xi_{k-1,k}} && (k = 2, 3, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

(gli altri elementi della matrice A_2 essendo tutti uguali a zero).

La matrice A_3 è la matrice $n \times n$, così definita:

$$
(20)_3\qquad A_3:\quad
\begin{aligned}
&a_{k-1+n,k-1} = \eta_{k-1}\, e^{\xi_{k-1,k}} && (k = 2, 3, \cdots, n)\\
&a_{2n,n} = e^{\xi_{n,n+1}} &&\\
&a_{k-1+n,k} = -\, \eta_k\, e^{-\xi_{kk}} && (k = 2, 3, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

(gli altri elementi della matrice A_3 essendo tutti uguali a zero).

La matrice A_4 è la matrice $n \times n$, così definita:

$$(20)_4 \qquad A_4: \quad \begin{aligned} &a_{k-1+n,\,k-1+n} = -\eta_{k-1}\, e^{-\xi_{k-1,k}} && (k = 2, 3, \cdots, n) \\ &a_{2n,2n} = e^{-\xi_{n,n+1}} && \\ &a_{k-1+n,\,k+n} = \eta_k\, e^{-\xi_{kk}} && (k = 2, 3, \cdots, n) \end{aligned}$$

(gli altri elementi della matrice A_4 essendo tutti uguali a zero).

Ne viene che:

III. *Tutti gli autovalori del problema* (15), (16), *diversi da ogni* $c_k^{(n)}$, *sono tutti e soli gli zeri dell'equazione*:

$$F_{2n}(\lambda) = \det A(\lambda) = 0 ,$$

diversi da ogni $c_k^{(n)}$.

Se p è la caratteristica della matrice A relativa allo zero $\lambda = \lambda^{(n)}$, allora l'autovalore $\lambda = \lambda^{(n)}$ si dovrà ripetere nella successione degli autovalori di (15), (16), $2n - p$ volte.

Indicate con q_{1k}, q_{2k} $(k = 1, \cdots, n)$ delle costanti arbitrarie, l'integrale generale della (15), nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$, può scriversi, *qualunque sia* λ:

$$(21) \qquad u(x) = q_{1k}\, \varphi_k(x, \lambda) + q_{2k}\, e^{-\omega_k(\lambda)x}$$

$x_k \leq x \leq x_{k+1}$; $(k = 1, 2, \cdots, n)$, avendo posto:

$$\varphi_k(x, \lambda) = \begin{cases} = \dfrac{e^{\omega_k(\lambda)x} - e^{-\omega_k(\lambda)x}}{\omega_k(\lambda)} & \text{per} \quad \lambda \neq c_k^{(n)} \\ = 2x & \text{per} \quad \lambda = c_k^{(n)} . \end{cases}$$

Assumendo la rappresentazione (21) della funzione u, ed imponendo le (16), detto q il vettore che ha $2n$ componenti, coincidenti con le q_{1k}, q_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, n)$, disposte in un ordine prestabilito, si ottiene un sistema lineare algebrico del tipo:

$$H(\lambda)\, q = 0 ,$$

essendo $H(\lambda)$ una matrice $2n \times 2n$. Se poniamo: $\Phi_{2n}(\lambda) = \det H(\lambda)$, la condizione necessaria e sufficiente perché λ sia autovalore del problema (15), (16) è che esso verifichi l'equazione: $\Phi_{2n}(\lambda) = 0$. Si ha d'altra parte, per $\lambda \neq c_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$(22) \qquad \gamma_{1k} = \frac{q_{1k}}{\omega_k(\lambda)} \quad , \quad \gamma_{2k} = q_{2k} - \frac{q_{1k}}{\omega_k(\lambda)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Indicando con γ il vettore che ha come componenti γ_{1k}, γ_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, n)$ disposte nello stesso ordine scelto per ordinare le componenti di q, le (22) si scrivono:

$$\gamma = T(\lambda)\, q\,.$$

La $T(\lambda)$ è una matrice $2n \times 2n$, la quale, scambiando eventualmente l'ordine delle sue righe, coincide con una matrice triangolare i cui elementi della diagonale principale sono tali che n di essi sono uguali ad 1 ed i rimanenti n coincidono, rispettivamente, con $[\omega_1(\lambda)]^{-1}$, $[\omega_2(\lambda)]^{-1}, \cdots, [\omega_n(\lambda)]^{-1}$.

È ovvio che riesce:

$$H(\lambda) = A(\lambda)\, T(\lambda)\,. \tag{23}$$

Si ha allora, per $\lambda \neq c_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$:

$$\Phi_{2n}(\lambda) = \pm \frac{F_{2n}(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n} \omega_k(\lambda)}\,,$$

la scelta del segno + o — dipendendo dal modo con cui si sono ordinate le componenti dei vettori γ e q.

Poiché $\Phi_{2n}(\lambda)$ è continua in ogni punto $\lambda = c_k^{(n)}$, risulta dimostrato che:

IV. *Condizione necessaria e sufficiente perché* $c_k^{(n)}$ *sia autovalore del problema* (15), (16) *è che*:

$$\lim_{\lambda \to c_k^{(n)}} \frac{F_{2n}(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n} \omega_k(\lambda)} = 0\,.$$

Se $c_k^{(n)}$ è autovalore del problema (15), (16), detta p la caratteristica della matrice $H(\lambda)$, data dalla (23), $c_k^{(n)}$ avrà molteplicità geometrica $2n - p$.

I due teoremi III e IV mettono in evidenza l'interesse che riveste il calcolo della funzione $F_{2n}(\lambda)$. A tale questione dedichiamo le considerazioni che seguono.

Indichiamo con $B^{(0)} = B^{(0)}(\lambda)$ la matrice ottenuta da A moltiplicando la k-esima colonna di A per $e^{-\xi_{kk}}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ e la $(k+n)$-esima colonna di A per $e^{\xi_{kk}}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. L'equazione $\det A(\lambda) = 0$ è equivalente all'equazione $\det B^{(0)}(\lambda) = 0$. Anche la matrice $B^{(0)}$ si può decomporre in quattro sottomatrici $n \times n$

$$B^{(0)} = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^{(0)} & B_2^{(0)} \\ \hline B_3^{(0)} & B_4^{(0)} \end{array} \right\|. \tag{24}$$

Posto

$$\alpha_k = \alpha_k(\lambda) = \xi_{kk} - \xi_{k,k+1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{25}$$

gli elementi $b_{ij}^{(0)}$ di $B^{(0)}$ sono rappresentati dai quattro seguenti gruppi di formule: $(24)_1$, $(24)_2$, $(24)_3$ e $(24)_4$ [(3)]

$$(24)_1 \quad \begin{aligned} & b_{11}^{(0)} = 1 \quad , \quad b_{kk}^{(0)} = -1 \\ & b_{k,k-1}^{(0)} = -e^{-\alpha_{k-1}} \end{aligned} \qquad (24)_2 \quad \begin{aligned} & b_{1,1+n}^{(0)} = 1 \quad , \quad b_{k,k+n}^{(0)} = -1 \\ & b_{k,k-1+n}^{(0)} = e^{\alpha_{k-1}} \end{aligned}$$

$$(24)_3 \quad \begin{aligned} & b_{k-1+n,k-1}^{(0)} = \eta_{k-1}\, e^{-\alpha_{k-1}}, \quad b_{2n,n}^{(0)} = e^{-\alpha_n} \\ & b_{k-1+n,k}^{(0)} = -\eta_k \end{aligned} \qquad (24)_4 \quad \begin{aligned} & b_{k-1+n,k-1+n}^{(0)} = -\eta_{k-1}\, e^{\alpha_{k-1}}, \quad b_{2n,n}^{(0)} = e^{\alpha_n} \\ & b_{k-1+n,\,k+n}^{(0)} = \eta_k . \end{aligned}$$

Nelle $(24)_1$, $(24)_2$, $(24)_3$ e $(24)_4$ è sempre $k = 2, 3, \cdots, n$.

Concludendo, gli autovalori $\lambda = \lambda^{(n)}$ del problema (15), (16), che non coincidono con nessuno dei $c_k^{(n)}$, sono gli zeri dell'equazione

$$F_{2n}(\lambda) = \det B^{(0)}(\lambda) = 0 . \tag{26}$$

4. – Costruzione di $\Delta_n(\lambda)$.

Vogliamo ora provare come la (26) sia equivalente ad un'equazione

$$\Delta_n(\lambda) = 0 \tag{27}$$

dove $\Delta_n(\lambda)$ è una funzione trascendente che, per ogni λ, coincide con il determinante di una matrice $n \times n$ esplicitamente calcolabile.

Indichiamo con $B^{(1)} = B^{(1)}(\lambda)$ la matrice $2n \times 2n$ ottenuta da $B^{(0)}$ per mezzo delle formule:

$$b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(0)} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 2n \\ j = 1, \cdots, n \end{pmatrix} \quad ; \quad b_{i,n+h}^{(1)} = b_{i,n+h}^{(0)} - b_{i,h}^{(0)} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, 2n \\ h = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

cioè la matrice ottenuta da $B^{(0)}$ lasciando invariate le sue prime n colonne e sottraendo, al variare di h da 1 ad n, alla $(n+h)$–esima colonna di $B^{(0)}$ la h–esima colonna della medesima matrice.

Posto:

$$B^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^{(1)} & B_2^{(1)} \\ \hline B_3^{(1)} & B_4^{(1)} \end{array} \right\| , \tag{28}$$

nella (28) le $B_1^{(1)}$ e $B_3^{(1)}$ sono sempre date dalle formule $(24)_1$ e $(24)_3$. Per le $B_2^{(1)}$ e $B_4^{(1)}$ si hanno, rispettivamente, le seguenti $(28)_2$ e $(28)_4$:

$$(28)_2 \qquad B_2^{(1)} : \quad \begin{aligned} & b_{k,k-1+n}^{(1)} = e^{\alpha_{k-1}} - e^{-\alpha_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \\ & b_{k-1+n,\,k+n}^{(1)} = 2\,\eta_k \end{aligned}$$

$$(28)_4 \qquad B_4^{(1)} : \quad \begin{aligned} & b_{k-1+n,k-1+n}^{(1)} = -\eta_{k-1}\,(e^{\alpha_{k-1}} + e^{-\alpha_{k-1}}) \qquad (k = 2, 3, \cdots, n) \\ & b_{2n,2n}^{(1)} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n} . \end{aligned}$$

(3) D'ora in avanti converremo che tutti gli elementi di una matrice che non sono espressamente indicati in un gruppo di formule sono tutti uguali a zero.

Indichiamo con $B^{(2)} = B^{(2)}(\lambda)$ la matrice $2n \times 2n$, ottenuta da $B^{(1)}$ per mezzo delle formule:

$$b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, \cdots, 2n)\\ (j = 1, 2, \cdots, n; 2n)\end{matrix} \quad ; \quad b_{i,n+h-1}^{(2)} = b_{i,n+h-1}^{(1)} - (e^{\alpha_{h-1}} - e^{-\alpha_{h-1}})\, b_{i,h}^{(1)}$$
$$(h = 2, 3, \cdots, n),$$

cioè la matrice ottenuta da $B^{(1)}$ lasciando inalterate le prime n colonne di $B^{(1)}$ e l'ultima colonna di $B^{(1)}$ e sommando, per ogni $h = 2, 3, \cdots, n$, alla $(n + h - 1)$–esima colonna di $B^{(1)}$ la h–esima colonna di $B^{(1)}$ moltiplicata per $e^{\alpha_{h-1}} - e^{-\alpha_{h-1}}$.

Posto:

$$B^{(2)} = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^{(2)} & B_2^{(2)} \\ \hline B_3^{(2)} & B_4^{(2)} \end{array} \right\|, \tag{29}$$

le matrici $B_1^{(2)}$ e $B_3^{(2)}$ della (29) sono sempre date dalle formule $(24)_1$ e $(24)_3$. Per le $B_2^{(2)}$ e $B_4^{(2)}$ si hanno invece rispettivamente le $(29)_2$ e $(29)_4$:

$(29)_2$ $\quad B_2^{(2)}$:

$$b_{k,k-2+n}^{(2)} = e^{-\alpha_{k-1}} (e^{\alpha_{k-2}} - e^{-\alpha_{k-2}}) \qquad (k=3, 4, \cdots, n)$$

$$b_{k-1+n,k+n}^{(2)} = 2\,\eta_k \qquad (k=2, 3, \cdots, n)$$

$$b_{k-1+n,k-1+n}^{(2)} = -\eta_{k-1} (e^{\alpha_{k-1}} + e^{-\alpha_{k-1}}) - \eta_k (e^{\alpha_{k-1}} - e^{-\alpha_{k-1}}) \qquad (k=2, 3, \cdots, n)$$

$(29)_4$ $\quad B_4^{(2)}$:

$$b_{k-1+n,\,k-2+n}^{(2)} = \eta_{k-1} e^{-\alpha_{k-1}} (e^{\alpha_{k-2}} - e^{-\alpha_{k-2}}) \qquad (k=3, 4, \cdots, n)$$

$$b_{2n,n-1+n}^{(2)} = e^{-\alpha_n} (e^{\alpha_{n-1}} - e^{-\alpha_{n-1}})$$

$$b_{2n,2n}^{(2)} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n}.$$

Indichiamo con $B^{(s)} = B^{(s)}(\lambda)$ $(s = 3, 4, \cdots, n - 1)$ la matrice $2n \times 2n$, ottenuta da $B^{(s-1)}$ per mezzo delle formule:

$$b_{ij}^{(s)} = b_{ij}^{(s-1)} \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, \cdots, 2n)\\ (j=1, 2, \cdots, n)\,;\,(j=2n-(s-1)+1, 2n-(s-1)+2, \cdots, 2n)\end{matrix}$$

$$b_{i,n+h-(s-1)}^{(s)} = b_{i,n+h-(s-1)}^{(s-1)} + e^{-\sum_{t=h-(s-2)}^{h-1} \alpha_t} (e^{\alpha_{h-(s-1)}} - e^{-\alpha_{h-(s-1)}})\, b_{i,h}^{(s-1)}$$
$$(h = s, s + 1, \cdots, n),$$

cioè la matrice ottenuta da $B^{(s-1)}$ lasciando invariate le prime n e le ultime $s - 1$ colonne di $B^{(s-1)}$ e sommando alla $[n + h - (s - 1)]$–esima colonna di $B^{(s-1)}$ la h–esima colonna di $B^{(s-1)}$ moltiplicata per $e^{-\sum_{t=h-(s-2)}^{h-1} \alpha_t} (e^{\alpha_{h-(s-1)}} - e^{-\alpha_{h-(s-1)}})$ per $h = s, s + 1, \cdots, n$.

Posto:

$$B^{(s)} = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^{(s)} & B_2^{(s)} \\ \hline B_3^{(s)} & B_4^{(s)} \end{array} \right\| , \tag{30}$$

nella (30) $B_1^{(s)}$ e $B_3^{(s)}$ sono sempre date da $(24)_1$ e $(24)_3$. Per le $B_2^{(s)}$ e $B_4^{(s)}$ si hanno, rispettivamente, le formule $(30)_2$ e $(30)_4$:

$(30)_2$ $B_2^{(s)}$: $$b^{(s)}_{k,k-s+n} = e^{-\sum_{t=k-(s-1)}^{k-1} \alpha_t} (e^{\alpha_{k-s}} - e^{-\alpha_{k-s}}) \qquad (k=s+1,\cdots,n)$$

$(30)_4$ $B_4^{(s)}$:
$$b^{(s)}_{k-1+n,k+n} = 2\,\eta_k$$
$$b^{(s)}_{k-1+n,k-1+n} = -\eta_{k-1}(e^{\alpha_{k-1}} + e^{-\alpha_{k-1}}) - \eta_k (e^{\alpha_{k-1}} - e^{-\alpha_{k-1}})$$
$$b^{(s)}_{k-1+n,k-j+n} = (\eta_{k-1} - \eta_k)\, e^{-\sum_{t=k-(j-1)}^{k-1} \alpha_t} (e^{\alpha_{k-j}} - e^{-\alpha_{k-j}})$$
$$(j=2,3,\cdots,s-1) \qquad (k=j+1,\cdots,n)$$
$$b^{(s)}_{k-1+n,k-s+n} = \eta_{k-1}\, e^{-\sum_{t=k-(s-1)}^{k-1} \alpha_t} (e^{\alpha_{k-s}} - e^{-\alpha_{k-s}}) \quad (k=s+1,\cdots,n)$$
$$b^{(s)}_{2n,n-h+n} = e^{-\sum_{t=n-(h-1)}^{n} \alpha_t} (e^{\alpha_{n-h}} - e^{-\alpha_{n-h}}) \quad (h=s-1,\, s-2,\cdots,1)$$
$$b^{(s)}_{2n,2n} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n} .$$

Indichiamo con $B^{(n)} = B^{(n)}(\lambda)$ la matrice $2\,n \times 2\,n$, ottenuta da $B^{(n-1)}$ per mezzo delle formule:

$$b_{ij}^{(n)} = b_{ij}^{(n-1)} \qquad \begin{array}{l} (i=1,2,\cdots,2\,n) \\ (j=1,2,\cdots,n\,;\, n+2\,,n+3\,,\cdots,2\,n) \end{array}$$

$$b^{(n)}_{i,n+1} = b^{(n-1)}_{i,n+1} + e^{-\sum_{t=2}^{n-1} \alpha_t} (e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1})\, b^{(n-1)}_{i,n} , \quad (i=1,2,\cdots,2n), \tag{31}$$

cioè la matrice ottenuta alterando solo la $(n+1)$–esima colonna di $B^{(n-1)}$ con la (31). Posto:

$$B^{(n)} = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^{(n)} & B_2^{(n)} \\ \hline B_3^{(n)} & B_4^{(n)} \end{array} \right\| , \tag{32}$$

nella (32) $B_1^{(n)}$ e $B_3^{(n)}$ sono sempre date dalle $(24)_1$ e $(24)_3$; le $B_2^{(n)}$ è la matrice nulla e la $B_4^{(n)}$ è data dalle:

$$(32)_4 \quad B_4^{(n)}: \quad \begin{aligned} & b^{(n)}_{k-1+n,k+n} = 2\,\eta_k \qquad (k=2,3,\cdots,n) \\ & b^{(n)}_{k-1+n,k-1+n} = -\,\eta_{k-1}\,(e^{\alpha_{k-1}} + e^{-\alpha_{k-1}}) - \eta_k\,(e^{\alpha_{k-1}} - e^{-\alpha_{k-1}}) \\ & \qquad (k=2,3,\cdots,n) \\ & b^{(n)}_{k-1+n,k-j+n} = (\eta_{k-1} - \eta_k)\, e^{-\sum_{t=k-(j-1)}^{k-1}\alpha_t}\,(e^{\alpha_{k-j}} - e^{-\alpha_{k-j}}) \\ & \qquad (j=2,3,\cdots,n-1) \quad (k=j+1,\cdots,n) \\ & b^{(n)}_{2n,n-h+n} = e^{-\sum_{t=n-(h-1)}^{n}\alpha_t}\,(e^{\alpha_{n-h}} - e^{-\alpha_{n-h}}) \\ & \qquad (h=n-1,n-2,\cdots,1) \\ & b^{(n)}_{2n,2n} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n}. \end{aligned}$$

Riesce:

$$\det B^{(n)}(\lambda) = (-1)^{n-1} \det B_4^{(n)}(\lambda);$$

pertanto l'equazione $F_{2n}(\lambda) = 0$ è equivalente all'equazione: $\det B_4^{(n)}(\lambda) = 0$.

Posto, per semplicità, $B = B_4^{(n)}$, con ovvi cambiamenti di indici, gli elementi della matrice $B = B(\lambda)$

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \cdots 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} \cdots\cdots b_{n-1,n} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} \cdots\cdots\cdots b_{n,n} \end{matrix} \right\|$$

si possono rappresentare, più semplicemente, con le formule:

$$(33) \quad \begin{aligned} & b_{k,k+1} = 2\,\eta_{k+1} \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \\ & b_{kk} = -\,\eta_k\,(e^{\alpha_k} + e^{-\alpha_k}) - \eta_{k+1}\,(e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}) \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \\ & b_{h,h-s} = (\eta_h - \eta_{h+1})\, e^{-\sum_{r=h-s+1}^{h}\alpha_r}\,(e^{\alpha_{h-s}} - e^{-\alpha_{h-s}}) \\ & \qquad (s=1,2,\cdots,n-2) \quad (h=s+1,s+2,\cdots,n-1) \\ & b_{nk} = e^{-\sum_{r=k+1}^{n}\alpha_r}\,(e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}) \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \\ & b_{nn} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n} \\ & b_{ij} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n-2\,;\, j=i+2,\cdots,n) \end{aligned}$$

e, quando si ordinino per righe, con le seguenti:

$$
\begin{aligned}
& b_{11} = -\eta_1 (e^{\alpha_1} + e^{-\alpha_1}) - \eta_2 (e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}) \; ; \; b_{12} = 2\,\eta_2 \; ; \; b_{1j} = 0 \qquad (j = 3\,,4\,,\cdots,n) \\
& b_{hk} = (\eta_h - \eta_{h+1})\, e^{-\sum_{r=k+1}^{h} \alpha_r} (e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}) \qquad (h = 2\,,3\,,\cdots,n-1) \\
(34) \quad & b_{hh} = -\eta_h (e^{\alpha_h} + e^{-\alpha_h}) - \eta_{h+1} (e^{\alpha_h} - e^{-\alpha_h}) \qquad \begin{pmatrix} k = 1\,,2\,,\cdots,h-1 \\ j = h+2\,,\cdots,n \end{pmatrix} \\
& b_{h,h+1} = 2\,\eta_{h+1} \\
& b_{h,j} = 0 \\
& b_{nk} = e^{-\sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r} (e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}) \; ; \; b_{nn} = e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n} \qquad (k = 1\,,2\,,\cdots,n-1).
\end{aligned}
$$

L'equazione trascendente, equivalente alla $F_{2n}(\lambda) = 0$ è pertanto la seguente:

$$(35) \qquad \Delta_n(\lambda) = \det B(\lambda) = 0$$

dove nella (35) i b_{ij} sono dati dalle (34) e sono da tener presenti le posizioni (25), (18).

5. – Formule ricorrenti per il calcolo dei valori di $\Delta_n(\lambda)$.

Poniamo:

$$(36) \qquad C_k = C_k(\lambda) = e^{\alpha_k} + e^{-\alpha_k} \quad ; \quad S_k = S_k(\lambda) = e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k} \,.$$

Riesce:

$$C_k - S_k = 2\,e^{-\alpha_k} \quad ; \quad \prod_{r=k+1}^{h} (C_k - S_k) = 2^{h-k}\, e^{-\sum_{r=k+1}^{h} \alpha_r} \;;$$

le (34) pertanto divengono:

$$
\begin{aligned}
& b_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_2 \; ; \; b_{12} = 2\,\eta_2 \; ; \; b_{1j} = 0 \qquad (j = 3\,,4\,,\cdots,n) \\
& b_{hk} = 2^{k-h} (\eta_h - \eta_{h+1})\, S_k \prod_{r=k+1}^{h} (C_r - S_r) \qquad (h = 2\,,3\,,\cdots,n-1) \\
(37) \quad & b_{hh} = -\eta_h C_h - \eta_{h+1} S_h \qquad \begin{pmatrix} k = 1\,,2\,,\cdots,h-1 \\ j = h+2\,,\cdots,n \end{pmatrix} \\
& b_{h,h+1} = 2\,\eta_{h+1} \\
& b_{hj} = 0 \\
& b_{nk} = 2^{k-n} S_k \prod_{r=k+1}^{n} (C_r - S_r) \; ; \; b_{nn} = S_n \qquad (k = 1\,,2\,,\cdots,n-1).
\end{aligned}
$$

Indichiamo con B′ la matrice ottenuta dalla matrice B moltiplicando la h-esima riga di B per 2^{h-1} $(h = 2, 3, \cdots, n)$. Dalle (37) si ha:

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
& b'_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_2 \;;\; b'_{12} = 2\eta_2 \;;\; b'_{1j} = 0 && (j = 3, 4, \cdots, n) \\
& b'_{hk} = 2^{k-1}(\eta_h - \eta_{h+1}) S_k \prod_{r=k+1}^{h} (C_r - S_r) && \\
& b'_{hh} = -2^{h-1}\eta_h C_h - 2^{h-1}\eta_{h+1} S_h && (h = 2, 3, \cdots, n-1) \\
& b'_{h,h+1} = 2^h \eta_{h+1} && \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, h-1 \\ j = h+2, \cdots, n \end{pmatrix} \\
& b'_{h,j} = 0 && \\
& b'_{nk} = 2^{k-1} S_k \prod_{r=k+1}^{n} (C_r - S_r) \;;\; b'_{nn} = 2^{n-1} S_n && (k = 1, 2, \cdots, n-1).
\end{aligned}
$$

Indichiamo con $N = N(\lambda)$ la matrice ottenuta dalla matrice B′ dividendo la k-esima colonna di B′ per 2^{k-1} $(k = 2, 3, \cdots, n)$. Dalle (38) si ha:

$$
(39)\quad
\begin{aligned}
& n_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_2 \;;\; n_{12} = \eta_2 \;;\; n_{1j} = 0 && (j = 3, 4, \cdots, n) \\
& n_{hk} = (\eta_h - \eta_{h+1}) S_k \prod_{r=k+1}^{h} (C_r - S_r) && \\
& n_{hh} = -\eta_h C_h - \eta_{h+1} S_h && (h = 2, 3, \cdots, n-1) \\
& n_{h,h+1} = \eta_{h+1} && \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, h-1 \\ j = h+2, \cdots, n \end{pmatrix} \\
& n_{hj} = 0 && \\
& n_{nk} = S_k \prod_{r=k+1}^{n} (C_r - S_r) \;;\; n_{nn} = S_n && (k = 1, \cdots, n-1)
\end{aligned}
$$

Riesce ovviamente: $\det N = \det B$.

Indichiamo con $N' = N'(\lambda)$ la matrice ottenuta da N moltiplicando la k-esima colonna di N per $\prod_{r=2}^{k} (C_r - S_r)$ $(k = 2, 3, \cdots, n)$.

Dalle (39) si ha:

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
& n'_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_2 \;;\; n'_{12} = \eta_2 C_2 - \eta_2 S_2 \;;\; n'_{1j} = 0 && (j = 3, 4, \cdots, n) \\
& n'_{hk} = (\eta_h - \eta_{h+1}) S_k \prod_{r=2}^{h} (C_r - S_r) && \\
& n'_{hh} = (-\eta_h C_h - \eta_{h+1} S_h) \prod_{r=2}^{h} (C_r - S_r) && (h = 2, 3, \cdots, n-1) \\
& n'_{h,h+1} = (\eta_{h+1} C_{h+1} - \eta_{h+1} S_{h+1}) \prod_{r=2}^{h} (C_r - S_r) && \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, h-1 \\ j = h+2, \cdots, n \end{pmatrix} \\
& n'_{h,j} = 0 && \\
& n'_{nk} = S_k \prod_{r=2}^{n} (C_r - S_r) && (k = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

Indichiamo con $D = D(\lambda)$ la matrice ottenuta da N' dividendo l'h–esima riga di N' per $\prod_{r=2}^{h} (C_r - S_r)$ $(h = 2, \cdots, n)$.

Dalle (40) si ha:

$$
(41) \qquad
\begin{aligned}
& d_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_1 \; ; \; d_{12} = \eta_2 C_2 - \eta_2 S_2 \; ; \; d_{1j} = 0 && (j = 3, 4, \cdots, n) \\
& d_{hk} = \eta_h S_k - \eta_{h+1} S_k && \\
& d_{hh} = -\eta_h C_h - \eta_{h+1} S_h && (h = 1, 2, \cdots, n-1) \\
& d_{h,h+1} = \eta_{h+1} C_{h+1} - \eta_{h+1} S_h && \begin{pmatrix} k = 1, \cdots, h-1 \\ j = h+2, \cdots, n \end{pmatrix} \\
& d_{hj} = 0 && \\
& d_{nk} = S_k && (k = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

Riesce, ovviamente, $\det D(\lambda) = \det B(\lambda)$ e, quindi, $\Delta_n(\lambda) = \det D(\lambda)$. Diciamo $\eta^{(n)}$ il vettore di componenti $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$. Ci tornerà comodo indicare la dipendenza di Δ_n da $\eta^{(n)}, C_1, S_1; \cdots; C_n, S_n$, e scrivere:

$$\Delta_n(\lambda) \equiv \Delta_n(\eta^{(n)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-1}, S_{n-1}; C_n, S_n).$$

La coppia C_n, S_n interviene esclusivamente negli elementi $d_{n-1,n} = \eta_n C_n - \eta_n S_n$ e $d_{nn} = S_n$. È allora evidente che se si considera la matrice ottenuta dalle (41) lasciando tutti gli elementi invariati tranne $d_{n-1,n}$ e d_{nn}, nei quali si effettua lo scambio di C_n con S_n e, rispettivamente, di S_n con C_n, si potrà, senza ambiguità, denotare con

$$\Delta_n(\eta^{(n)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-1}, S_{n-1}; S_n, C_n)$$

il determinante della matrice così ottenuta.

Supposto $n > 1$, indicheremo con

$$\Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; C_{n-1}, S_{n-1})$$

il determinante della matrice di ordine $n-1$, con gli elementi definiti dalle (41) nelle quali, però, ad n si sostituisca $n-1$.

È allora evidente il significato del simbolo:

$$\Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; S_{n-1}, C_{n-1}).$$

Gli elementi della $(n-1)$–esima riga della matrice D $n \times n$, definita dalle (41), si possono così esprimere:

$$
\begin{aligned}
& d_{n-1,j} = \eta_{n-1} S_j - \eta_n d_{nj} && (j = 1, 2, \cdots, n-2) \\
& d_{n-1,n-1} = -\eta_{n-1} C_{n-1} - \eta_n d_{n,n-1} && \\
& d_{n-1,n} = \eta_n C_n - \eta_n d_{nn} &&
\end{aligned}
$$

e, pertanto, risulta evidentemente:

$$\Delta_n(\lambda) = \det D'(\lambda),$$

ove $D' = D'(\lambda)$ è la matrice $n \times n$, così definita:

$$\begin{aligned}
(42)\qquad & d'_{11} = -\eta_1 C_1 - \eta_2 S_1 \,;\, d'_{12} = \eta_2 C_2 - \eta_2 S_2 \,;\, d'_{1j} = 0 \qquad (j = 3, 4, \cdots, n) \\
& d'_{hk} = \eta_h S_k - \eta_{h+1} S_k \\
& d'_{hh} = -\eta_h C_h - \eta_{h+1} S_h \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots, n-2 \\ k = 1, 2, \cdots, h-1 \\ j = h+2, \cdots, n \end{pmatrix} \\
& d'_{h,h+1} = \eta_{h+1} C_{h+1} - \eta_{h+1} S_{h+1} \\
& d'_{hj} = 0 \\
& d'_{n-1,k} = \eta_{n-1} S_k \,;\, d'_{n-1,n-1} = -\eta_{n-1} C_{n-1} \,;\, d'_{n-1,n} = \eta_n C_n \\
& \qquad\qquad (k = 1, 2, \cdots, n-2) \\
& d'_{n,k} = S_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}$$

Calcoliamo il determinante della matrice D' sviluppando secondo gli elementi dell'ultima colonna. I primi $n - 2$ elementi sono tutti uguali a zero. Pertanto, indicate con $D'_{n-1,n}$ e $D'_{n,n}$ le matrici minori complementari degli elementi $d'_{n-1,n}$ e d'_{nn}, si ha:

$$\Delta_n(\lambda) = -C_n \eta_n \det D'_{n-1,n} + S_n \det D'_{nn}.$$

Essendo:

$$\det D'_{n-1,n} = \Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; C_{n-1}, S_{n-1})$$

e

$$\det D'_{nn} = -\eta_{n-1} \Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; S_{n-1}, C_{n-1}),$$

ne viene:

$$\begin{aligned}
(43)\qquad \Delta_n(\lambda) &= \Delta_n(\eta^{(n)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-1}, S_{n-1}; C_n, S_n) = \\
&= -C_n \eta_n \Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; C_{n-1}, S_{n-1}) - \\
&- S_n \eta_{n-1} \Delta_{n-1}(\eta^{(n-1)}; C_1, S_1; C_2, S_2; \cdots; C_{n-2}, S_{n-2}; S_{n-1}, C_{n-1}).
\end{aligned}$$

Posto:

$$\Delta_1^c = S_1 \quad , \quad \Delta_1^s = C_1 \,,$$

si ottengono allora le seguenti formule ricorrenti:

$$(44)\qquad \Delta_{k+1}^c = -[C_{k+1} \eta_{k+1} \Delta_{(k-1)+1}^c + S_{k+1} \eta_k \Delta_{(k-1)+1}^s]$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$(45)\qquad \Delta_{k+1}^s = -[S_{k+1} \eta_{k+1} \Delta_{(k-1)+1}^c + C_{k+1} \eta_k \Delta_{(k-1)+1}^s]$$

e la (44), per $k = n - 1$ fornisce il calcolo di $\Delta_n(\lambda)$.