
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GEORGE VRANCEANU

Sopra le funzioni di Morse degli spazi lenticolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.6, p. 497–499.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_497_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Sopra le funzioni di Morse degli spazi lenticolari.* Nota di GEORGE VRANCEANU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — On obtient des fonctions de Morse très simples sur chaque espace lenticulaire, et on détermine leurs points critiques.

In due Note recenti ⁽¹⁾, ho fatto vedere come si possano costruire funzioni di Morse sopra gli spazi lenticolari $L_{2m+1}[p; p_0, \dots, p_m]$, ossia sugli spazi ottenuti dalla sfera S_{2m+1}

$$(1) \quad y_0^2 + \dots + y_{2m+1}^2 = 1,$$

identificando i punti trasformati dal gruppo ciclico

$$(2) \quad z'_h = e^{\frac{2\pi i p_h}{p}} z_h$$

dove $z_h = y_{2h} + iy_{2h+1}$ sono coordinate complesse.

In questa Nota daremo delle funzioni di Morse più semplici, sulle quale si può vedere direttamente che i $2m+2$ punti critici hanno indici diversi; in altri termini, a qualunque numero intero r , tra 1 et $2m+2$, corrisponde un punto critico di indice r .

1. Per il fine indicato prendiamo come funzione di Morse la funzione

$$(3) \quad \varphi = \frac{a_h}{2} z_h \bar{z}_h + \frac{b_h}{2p} [z_h^p + \bar{z}_h^p], \quad (h = 0, 1, \dots, m)$$

dove a_h e b_h sono numeri reali. Tale funzione ha sulla sfera $2(m+1)p$ punti critici, ma essi sono a p a p identici per lo spazio lenticolare. Supponiamo in primo luogo che p sia un numero dispari $2q+1$ ($q \geq 1$). In questo caso la funzione φ ha sopra lo spazio lenticolare $2m+2$ punti critici, che possiamo prendere come i punti

$$(4) \quad y_{2h} = \varepsilon, \quad y_s = 0 \quad (s \neq 2h, \varepsilon = \pm 1).$$

Infatti, intorno ad un tale punto la φ si scrive, in virtù della (1) e tenendo conto di termini solo fino al secondo ordine,

$$\varphi = \frac{a_h}{2} + \frac{a_s - a_h}{2} [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2] + \frac{b_h}{p} [y_{2h}^{2q} - q(2q+1)y_{2h+1}^2] y_{2h}.$$

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

(1) G.VRANCEANU, *Fonctions de Morse sur les espaces lenticulaires*, C.R., t. 268, pp. 1018-1019 (1969), e *Fonctions de Morse et fonctions de Morse-Bott sur les espaces lenticulaires*, C.R., t. 273, pp. 308-310 (1971).

Ora, siccome si ha

$$y_{2h}^{2q} = 1 - q y_{2h+1}^2 - q [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2] \quad (s \neq h)$$

$$y_{2h} = \varepsilon \left[1 - \frac{y_{2h+1}^2}{2} - \frac{y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2}{2} \right],$$

ne risulta per φ , secondochè $\varepsilon = 1$, o $\varepsilon = -1$,

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi_h = \frac{a_h}{2} + \frac{b_h}{p} - b_h \frac{p(p-1)+1}{2p} y_{2h+1}^2 + \frac{a_s - a_h - b_h}{2} [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2], \\ \varphi'_h = \frac{a_h}{2} - \frac{b_h}{p} + b_h \frac{p(p-1)+1}{2p} y_{2h+1}^2 + \frac{a_s - a_h + b_h}{2} [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2]. \end{cases}$$

Supponendo b_h quantità positive, si vede che il segno del coefficiente di y_{2h+1}^2 è negativo in φ_h e positivo in φ'_h ; mentre i segni delle somme $y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2$ sono dati rispettivamente dai coefficienti

$$(6) \quad a_s - a_h - b_h, \quad a_s - a_h + b_h.$$

Ne risulta che, se noi supponiamo questi coefficienti positivi se $s > h$ e negativi se $s < h$, φ_h ha $2h+1$ quadrati negativi e $2(m-h)$ quadrati positivi; dunque φ_h è d'indice $2h+1$ mentre φ'_h ha $2h$ quadrati negativi e $2(m-h)+1$ quadrati positivi, sicchè φ'_h è d'indice $2h$. Ora, se questo si verifica per qualunque indice h , i $2m+2$ punti critici (4) hanno indici diversi.

Perciò basta far vedere che possiamo scegliere le $2m+2$ costanti a_h , b_h , in modo che b_h siano positive e che le (6) siano positive se $s > h$ e negative per $s < h$. Per ottenere una tale scelta basta per esempio supporre che tutte le b_h siano uguali all'unità e che si abbia

$$(6') \quad a_h = \frac{1}{p} + 2h, \quad (h = 0, \dots, m).$$

In tale caso si ha infatti dalle formule (5)

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi_h &= \frac{2}{p} + h - \frac{p(p-1)+1}{2p} y_{2h+1}^2 + \left(s - h - \frac{1}{2}\right) [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2] \quad (s \neq h), \\ \varphi'_h &= h + \frac{p(p-1)+1}{2p} y_{2h+1}^2 + \left(s - h + \frac{1}{2}\right) [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2]. \end{aligned}$$

Siccome per $h = 0$ l'indice di φ'_0 è zero, ne risulta che il minimo di φ è nullo e ha luogo per il punto critico $y_0 = -1$.

Abbiamo perciò il teorema:

La funzione

$$(8) \quad \varphi = \frac{1}{p} + h z_h \bar{z}_h + \frac{1}{2p} [z_h^p + \bar{z}_h^p],$$

dove h varia da 0 ad m , è una funzione di Morse positiva sopra lo spazio L_{2m+1} , la quale, assunto p dispari, ha $2m+2$ punti critici d'indice diversi.

Supponiamo ora $p = 2q$, dove q sia un numero dispari. In questo caso possiamo prendere come punti critici i punti

$$(8') \quad y_{2h} = 1, \quad y_k = 0 \quad (k \neq 2h) \quad ; \quad y_{2h+1} = 1, \quad y_l = 0 \quad (l \neq 2h+1).$$

Nel primo caso la funzione φ è data dalla formula

$$(9) \quad \varphi_h = \frac{2}{p} + h - \frac{p}{2} y_{2h+1}^2 + \left(s - h - \frac{1}{2}\right) [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2],$$

mentre per il secondo punto si ha

$$(10) \quad \varphi'_h = h + \frac{p}{2} y_{2h}^2 + \left(s - h + \frac{1}{2}\right) [y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2];$$

e ciò ci dice che il Teorema è valido anche in questo caso.

Supponiamo ora $p = 2^r q$ ($r > 1$) dove q sia un numero dispari. In questo caso possiamo prendere come $m + 1$ punti critici quelli per cui la sola coordinata non nulla è $y_{2h} = 1$, onde lo sviluppo di φ è dato dalla (9).

Come altri $m + 1$ punti critici possiamo assumere

$$(11) \quad y_{2h} = \cos \frac{\pi}{2^r}, \quad y_{2h+1} = \sin \frac{\pi}{2^r}, \quad y_i = 0 \quad (i \neq 2h, 2h+1).$$

Prendiamo intorno ad uno di questi punti al posto delle y_{2h}, y_{2h+1} le nuove variabili u, v date dalle formule

$$y_{2h} = u \cos \frac{\pi}{2^r} - v \sin \frac{\pi}{2^r}$$

$$y_{2h+1} = u \sin \frac{\pi}{2^r} + v \cos \frac{\pi}{2^r}.$$

In questo caso il punto critico (11) corrisponde ad $u = 1$ e $v = y_i = 0$, e si ha

$$z_h^p + \bar{z}_h^p = (u + iv)^p e^{\pi i q} + (u - iv)^p e^{-\pi i q}.$$

Siccome $e^{\pi i q} = e^{-\pi i q} = -1$, in quanto q è dispari, ne risulta che la φ data dalla (8) si scrive intorno a $u = 1, v = 0, y_i = 0$ nel modo seguente:

$$(12) \quad \varphi'_h = h + \frac{p}{2} v^2 + \left(s - h + \frac{1}{2}\right) (y_{2s}^2 + y_{2s+1}^2);$$

dunque tale funzione ha lo stesso indice della (10). Ne risulta che il teorema è valido per tutti i valori di p , cosichè la funzione (8) è una funzione di Morse, sopra L_{2m+1} avente $2m + 2$ punti critici non degenerati e di indici diversi.

Ne risulta che lo spazio L_{2m+1} si può costruire topologicamente aggiungendo delle celle e, tenendo conto delle inegualianze di Morse ⁽²⁾, che i numeri di Betti sono minori di due.

(2) JOHN MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963, p. 29.