Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Enrico Bompiani

## Una proprietà caratteristica delle superficie di Veronese

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **51** (1971), n.5, p. 332–336.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_332_0>

**Geometria differenziale.** — *Una proprietà caratteristica delle superficie di Veronese.* Nota (*) del Socio Enrico Bompiani.

SUMMARY. — A new proof of a characteristic property of Veronese surfaces given by Corrado Segre.

## 1. – INTRODUZIONE

Esattamente mezzo secolo fà Corrado Segre assegnava una proprietà caratteristica delle superficie di Veronese (nello spazio proiettivo a 5 dimensioni $P_5$) [1] basandosi sulla nozione di *tangente principale* in un punto di una superficie di $P_5$ da lui introdotta in un classico lavoro precedente [2].

La definizione originale di tangente principale è quella di tangente tacnodale alla sezione della superficie con un iperpiano tangente nel punto che presenti ivi un tacnodo. Altre proprietà, che pure possono servire di definizione, si trovano in [1] e anche in miei lavori [3].

La dimostrazione di C. Segre che le sole superficie di Veronese (e le sviluppabili) hanno in ogni punto tangenti principali indeterminate è basata sulla nozione di *fochi di 2° ordine* di sistemi infiniti di piani data in [4]. La dimostrazione che dò qui appresso è invece basata sulla nozione di calotta (1) di superficie in $P_5$ e precisamente sulle forme canoniche proiettivamente distinte che una calotta può avere. Nel caso di tangenti principali indeterminate una « Integrazione logica » permette di passare dal risultato locale ad un risultato globale.

## 2. – TANGENTI PRINCIPALI

Per rappresentare una calotta $\sigma_2^3$ di $P_5$ possiamo assumere coordinate non-omogenee $x, y, z_1, z_2, z_3$ tutte nulle nel centro O di $\sigma_2^3$ e tali che $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ rappresentino il piano tangente in O. La rappresentazione di $\sigma_2^3$ è del tipo:

$$(2.1)\quad z_1 = \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + [>3] \quad , \quad z_2 = \psi_2(x,y) + \psi_3(x,y) + [>3],$$
$$z_3 = \chi_2(x,y) + \chi_3(x,y) + [>3]$$

ove le $\varphi_i$, sono *forme* di grado $i$ in $x, y$ e il simbolo $[>3]$, o *indeterminazione*, indica termini arbitrari di ordine $>3$ in $x, y$.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1971.

(1) La nozione di *calotta* di dimensione $m$ e di ordine $r$ è basata sulla nozione di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^r$ (o superiore) e sulla nozione di contatto d'ordine $r$ di due tali varietà in un punto (*centro* della calotta). La relazione di contatto è una relazione d'equivalenza; un elemento dell'insieme quoziente rispetto ad essa è la calotta $\sigma_m^r$ (o l'elemento differenziale curvilineo $E^r$ se $m = 1$).

Se le tre forme del 2° grado sono linearmente indipendenti la calotta $\sigma_2^2$ di centro O contenuta in $\sigma_2^3$ si dirà *normale* e il suo spazio d'appartenenza (o spazio 2 — osculatore) è il $P_5$ ambiente. In tal caso con combinazioni lineari delle $z_i$ si può sempre partire dalla rappresentazione di

$$(2.2) \qquad z_1 = x^2 + \varphi_3(x, y) + [> 3] \quad , \quad z_2 = xy + \psi_3(x, y) + [> 3] ,$$
$$z_3 = y^2 + \chi_3(x, y) + [> 3] .$$

Le sezioni cuspidate in O sono prodotte dagli iperpiani

$$\lambda^2 z_1 - 2\lambda z_2 + z_3 = 0 , \qquad (\lambda \text{ arbitrario});$$

esse sono tacnodali se e solo se

$$(2.3) \qquad \lambda^2 \varphi_3(1, \lambda) - 2\lambda\psi_3(1, \lambda) + \chi_3(1, \lambda) = 0$$

e le tangenti $y - \lambda x = z_1 = 0$ sono le tangenti principali di C. Segre per $\lambda$ radice della (2.3). Se due di queste tangenti si assumono come $y = 0$, $x = 0$ (cioè $\lambda = 0$, $1/\lambda = 0$) le (2.2) si scrivono nella forma

$$(2.4) \qquad z_1 = x^2 + x\varphi_2(x, y) + [> 3] \quad , \quad z_2 = xy + \psi_3(x, y) + [> 3]$$
$$z_3 = y^2 + y\chi_2(x, y) + [> 3] ,$$

La riduzione a questa forma (determinata da due delle tangenti principali) già pone in evidenza che sono geometricamente determinati i $P_4$: $z_1 = 0$, $z_3 = 0$, $z_2 = 0$.

I primi due danno sezioni tacnodali (con le tangenti principali fissate) e il terzo dà la sezione le cui tangenti nodali sono quelle fissate.

## 3. – FORME CANONICHE

Senza alterare gli elementi geometrici fissati si possono fare le trasformazioni di coordinate

$$(3.1) \qquad x = \frac{x' + A_1}{1 - D} \quad , \quad y = \frac{y' + B_1}{1 - D} \quad , \quad z_i = \frac{z'_i}{1 - D} \quad , \quad D = px' + qy' + C_1$$

ove $A_1$, $B_1$, $C_1$ sono forme lineari nelle $z_i$,

$$A_1 = \Sigma a_i z'_i \quad , \quad B_1 = \Sigma b_i z'_i \quad , \quad C_1 = \Sigma c_i z'_i .$$

Se s'indicano con $\varphi'_2(x', y')$, $\psi'_3(x', y')$, $\chi'_2(x', y')$ le forme corrispondenti alle $\varphi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$, $\chi_2(x, y)$ nelle equazioni trasformate delle (2.4) si trova per esempio

$$\varphi'_2(x', y') = (p + 2a_1) x'^2 + (q + 2a_2) x'y' + 2a_3 y'^2 + \varphi_2(x', y') .$$

Si possono quindi scegliere $p + 2a_1$, $q + 2a_2$, $a_3$ in modo che sia $\varphi'_2(x', y') \equiv 0$; e se si parte già da coordinate per cui sia $\varphi_2(x, y) \equiv 0$ questa forma si conserva per tutte le (3.1) per cui

$$p + 2a_1 = q + 2a_2 = a_3 = 0 . \tag{3.2}$$

Analogamente ragionando su $\chi_2(x, y)$ si vede che si può sempre partire da coordinate per cui sia $\chi_2(x, y) \equiv 0$ e mantenere questa scelta per

$$p + 2b_2 = q + 2b_3 = b_1 = 0 . \tag{3.3}$$

Se si pone

$$a_1 = b_2 = r \quad , \quad a_2 = b_3 = s \quad , \quad p = -2r \quad , \quad q = -2s$$

si ha dalla trasformazione di $z_2$

$$\psi'_3(x', y') = 2rx'^2y' + 2sx'y'^2 + \psi_3(x', y')$$

quindi si possono scegliere $r, s$ in modo che in $\psi'_3(x', y')$ manchino i termini in $x'^2y'$, $x'y'^2$.

E se già si parte da coordinate per cui sia

$$\psi_3(x, y) = \alpha x^3 + \beta y^3$$

questa forma si conserva per $r = s = 0$: cioè le trasformazioni (3.1) si riducono a

$$x = \frac{x'}{1 - C_1} \;,\; y = \frac{y'}{1 - C_1} \;,\; z_i = \frac{z'_i}{1 - C_1} \;,\; C_1 = c_1z'_1 + c_2z'_2 + c_3z'_3 \tag{3.4}$$

e queste conservano la rappresentazione di $\sigma_2^3$ del tipo

$$z_1 = x^2 + [> 3] \;,\; z_2 = xy + \alpha x^3 + \beta y^3 + [> 3] \;,\; z_3 = y^2 + [> 3] . \tag{3.5}$$

Esaminiamo prima di andare oltre il significato geometrico delle (3.4) e (3.5).

Le (3.4) definiscono ciascuno dei tre $P_4$ coordinati passanti per O.

Non è determinato un $P_4$ « improprio » $\not\ni$ O ma una retta nel piano tangente tale che ogni $P_4$ per essa può prendersi come $P_4$ improprio.

Le tangenti principali sono date da

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad \alpha x^3 + \beta y^3 = 0 . \tag{3.6}$$

A ciascuna di esse è associato il $P_4$ che sega $\sigma_2^3$ secondo una curva con quella tangente come tacnodale. Anzi se si guarda all'espressione di $z_1$ in (3.5) si vede che per $z_1 = 0$ si ottiene $x^2 = \tau^2 y^4 + \cdots$ ($\tau$ reale o complesso) quindi $x = \pm \tau y^2 + \cdots$ e perciò, come segue dalle stesse (3.5) i piani osculatori ai due rami tacnodali sono dati da

$$x = \pm \tau z_3 \quad , \quad z_1 = z_2 = 0 .$$

Ciò prova che nello spazio $P_3 : z_1 = z_2 = 0$ nel fascio di piani che ha per asse la tangente $z_3 = x = 0$ i piani osculatori ai due rami lineari che compongono il tacnodo sono divisi armonicamente dal piano tangente e dal piano $x = z_1 = z_2 = 0$.

Questo piano può ottenersi in altro modo. Se si taglia la $\sigma_2^3$ con il $P_4$ $x = 0$ si ha

$$z_1 = [> 3] \quad , \quad z_2 = \beta y^3 + [> 3] \quad , \quad z_3 = y^2 + [> 3]$$

ove le indeterminazioni sono nella sola variabile $y$, cioè quel piano $(x = z_1 = z_2 = 0)$ è osculatore a $\sigma_2^3 \cap P_4$ (e il $P_3$ osculatore è $x = z_1 = 0$).

## 4. – I TRE TIPI DI CALOTTE NORMALI DEL 3° ORDINE

Osserviamo che oltre alle trasformazioni di coordinate (3.4) si possono adoperare quelle che cambiano il punto unità (con $h$ e $k \neq 0$):

$$x = hx' \ , \ y = ky' \ , \ z_1 = h^2 z_1' \ , \ z_2 = hkz_2' \ , \ z_3 = k^2 z_3' . \tag{4.1}$$

Per esse le (3.5) si mutano nelle analoghe con i coefficienti $\alpha'$, $\beta'$ (che sostituiscono $\alpha$, $\beta$) dati da

$$\alpha' = \alpha \frac{h^2}{k} \quad , \quad \beta' = \beta \frac{k^2}{h} .$$

I tre casi proiettivamente distinti $\sigma_2^3$ si hanno per:

I: $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; II: $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (o $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$); III: $\alpha = \beta = 0$.

Nel caso I si possono scegliere $h$ e $k$ in modo che $\alpha' = \beta' = 1$ e se già si parte da $\alpha = \beta = 1$ questo valori si conservano per $h^3 = k^3 = 1$.

Nel caso II si possono scegliere $h$, $k$ in modo che risulti $\alpha' = 1$; e se già si parte da $\alpha = 1$ questo valore si conserva per $h^2 = k$.

Nel caso III i cambiamenti (4.1) non portano variazioni nelle (3.5).

Le forme proiettivamente distinte delle $\sigma_2^3$ sono

I) $\quad z_1 = x^2 + [> 3] \ , \ z_2 = xy + x^3 + y^3 + [> 3] \ , \ z_3 = y^2 + [> 3]$

II) $\quad z_1 = x^2 + [> 3] \ , \ z_2 = xy + x^3 + [> 3] \ , \ z_3 = y^2 + [> 3]$

II) $\quad z_1 = x^2 + [> 3] \ , \ z_2 = xy + [> 3] \ , \ z_3 = y^2 + [> 3]$.

## 5. – CARATTERIZZAZIONE DELLE SUPERFICIE DI VERONESE

L'ultima equazione del numero precedente mostra che tutte e sole le calotte $\sigma_2^3$ del tipo III sono contenute in una superficie di Veronese che è già definita dalla $\sigma_2^2 \subset \sigma_2^3$ ed avente lo stesso centro di $\sigma_2^3$.

Questo stesso fatto può enunciarsi dicendo che la superficie di Veronese definita da una $\sigma_2^2$ di centro O contiene anche tutte le calotte di 2° ordine, con centri infinitamente vicini ad O, appartenenti alla calotta $\sigma_2^3 \supset \sigma_2^2$ ed a tangenti principali indeterminate (cioè del tipo III). E ciò equivale a dire che se tutte le $\sigma_2^3$ di una superficie sono a tangenti principali indeterminate essa è (eventualmente una parte di) una superficie di Veronese: questa è appunto la caratterizzazione di tali superficie data da C. Segre.

## BIBLIOGRAFIA

[1] C. SEGRE, *Le linee principali di una superficie di* $S_5$ *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », s. V, *30*, 200–203 e 227–231 (1921); oppure: *Opere*, *2*, 154–162, Edizioni Cremonese, Roma 1958.

[2] C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *30*, 87–121 (1910); oppure: *Opere*, *2*, 71–118. In fine al n. 24.

[3] E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei Teoremi di Mensnier e di Eulero*, « Atti Acc. di Torino », *48*, 393–410 (1912–13); — *On principal elements of a surface in a six-dimensional projective space*, « Indian Journal of Mathematics », *9*, 49–53 (1967); — *Elementi principali di una varietà differenziabile*, « Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées », *12*, 1135–1140 (1937); — *Elementi principali di una varietà tridimensionale dello spazio proiettivo a sei dimensioni*, « Buletinul Institutului Politehnic din Iași », *13*, 83–89 (1967).

[4] C. SEGRE, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti*, « Rend, Acc. Naz. dei Lincei », s. V, *30*, 67–71 (1921); oppure: *Opere*, *2*, 149–153.