Carla Vaghi

Unicità delle soluzioni limitate e comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione parabolica $Lz = f(x,t,z,p)$ con $f(x,t,z,p)$ funzione discontinua. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 145–153.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_145_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi matematica. — *Unicità delle soluzioni limitate e comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione parabolica* $Lz=f(x,t,z,p)$, *con* $f(x,t,z,p)$ *funzione discontinua.* Nota II (*) di CARLA VAGHI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — The theorems stated in § 1 are proved. Analogous theorems concerning the solutions of equation (1.1) satisfying the condition $\frac{\partial}{\partial \nu} z(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega} = \psi(x,t,z)$, with $\psi(x,t,z)$ defined in $S=\{x\in\partial\Omega\,;\,t,z\in J\}$, measurable, increasing in z, are also proved.

§ 3. – Dimostriamo i teoremi I, II, e III enunciati nel § 1 [1].

Osserviamo innanzitutto che le (1.6) implicano, per la semicontinuità di $f_1(x,t,z,p)$ ed $f_2(x,t,z,p)$,

$$f_1(x,t,0,0)\leq 0 \quad , \quad f_2(x,t,0,0)\geq 0. \tag{3.1}$$

Ne segue, ricordando la definizione di soluzione data nel § 1, che $z(x,t)\equiv 0$ è soluzione in $\overline{Q}$ della (1.1), soddisfacente la condizione (1.4).

Consideriamo ora un'altra soluzione $z(x,t)\not\equiv 0$ e dimostriamo che è asintotica a zero per $t\to+\infty$. Ammettiamo che ci sia un punto $(x_1,\bar{t})$ nel quale è $z(x_1,\bar{t})>0$; posto allora

$$\eta(t)=\max_{x\in\overline{\Omega}} z(x,t),$$

risulta:

$$\eta(\bar{t})=z(\bar{x},\bar{t})>0,$$

e quindi, per la (1.4), $\bar{x}\in\Omega$.

Dimostriamo che $\eta(t)$ è non crescente in $\bar{t}\vdash+\infty$ e risulta

$$\lim_{t\to+\infty}\eta(t)=0. \tag{3.2}$$

Confrontiamo due valori $\eta(t_1)$, $\eta(t_2)$, con $\bar{t}\leq t_1<t_2$, e verifichiamo, che se è $\eta(t_1)>0$, si ha:

$$\eta(t_1)>\eta(t_2).$$

Infatti se fosse $\eta(t_2)\geq\eta(t_1)$, $z(x,t)$ avrebbe, nel cilindro $\overline{Q}_{t_1,t_2}$, un massimo positivo in un punto (x',t'), con $x'\in\Omega$, $t_1<t'\leq t_2$. Questo è assurdo per il Lemma II.

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1971.

(1) C. VAGHI, *Unicità delle soluzioni limitate e comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione parabolica* $Lz=f(x,t,z,p)$, *con* $f(x,t,z,p)$ *funzione discontinua*, Nota I, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, *51* (1971), pp. 9–16.

Se poi è $\eta(t_1) = 0$, si ha, $\forall t_2 > t_1$, $\eta(t_2) = 0$. (Infatti, si vede come prima che non può essere $\eta(t_2) > 0$ e inoltre, per la (1.4), non può nemmeno essere $\eta(t_2) < 0$). In questo caso quindi la (3.2) è verificata. Per provare che vale anche se è $\eta(t) > 0$ in $\bar{t} \vdash + \infty$, consideriamo le due equazioni:

$$\mathrm{L}z = f(x, t, z, p) \tag{3.3}$$

e

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{4}\,\omega(\varphi(t)). \tag{3.4}$$

Detto $\varphi(t)$ l'integrale della (3.4) soddisfacente la condizione

$$\varphi(\bar{t}) = \eta(\bar{t}) + 1, \tag{3.5}$$

dimostriamo che risulta (2), $\forall\ t > \bar{t}$,

$$z(x, t) < \varphi(t). \tag{3.6}$$

Posto

$$w(x, t) = z(x, t) - \varphi(t), \tag{3.7}$$

per $t = \bar{t}$ si ha:

$$w(x, \bar{t}) = z(x, \bar{t}) - \eta(\bar{t}) - 1 \leq -1 < 0.$$

Inoltre, essendo (cfr. § 2) $\varphi(t) > 0$ in $\bar{t} \vdash + \infty$ è anche, per la (1.4), $w(x, t)\big|_{x \in \partial\Omega} < 0$; risulta quindi:

$$w(x, t)\big|_{\partial^* \mathrm{Q}_{\bar{t},t}} < 0, \qquad \forall\ t \geq \bar{t}. \tag{3.8}$$

Supponiamo che la (3.6) non sussista in tutto $\bar{t} \vdash + \infty$. Sia allora $\bar{t} \vdash\!\dashv \bar{t} + h$ l'intervallo tale che valga la (3.6) in $\bar{t} \vdash \bar{t} + h$, mentre esiste almeno un punto $(\bar{x}, \bar{t} + h)$ nel quale è

$$w(\bar{x}, \bar{t} + h) = z(\bar{x}, \bar{t} + h) - \varphi(\bar{t} + h) = 0.$$

Per la (3.8), $(\bar{x}, \bar{t} + h) \in \mathrm{Q}_{\bar{t},\bar{t}+h} \cup \Omega_{\bar{t}+h}$, ed è un punto di massimo per $w(x, t)$. In tale punto si ha:

$$w(\bar{x}, \bar{t} + h) = 0 \iff z(\bar{x}, \bar{t} + h) = \varphi(\bar{t} + h) > 0,$$

e

$$w_{x_i}(\bar{x}, \bar{t} + h) = 0 \iff p(\bar{x}, \bar{t} + h) = 0.$$

Ragionando come per il Lemma II, si vede allora che esiste un cilindro $\mathrm{R}_{\bar{x},\bar{t}+h} \subset \mathrm{Q}_{\bar{t},\bar{t}+h} \cup \Omega_{\bar{t}+h}$, definito dalle limitazioni

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \quad , \quad \bar{t} + h - \delta \leq t \leq \bar{t} + h,$$

(2) Nel caso in cui $f(x, t, z, p)$ sia funzione continua e $z(x, t)$ sia soluzione classica, la (3.4) è nota: cfr. ad es. A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall (1964), th. 16, p. 52.

nel quale è, per la semicontinuità di $f_1(x, t, z, p)$ e per la continuità di $z(x, t)$ e $p(x, t)$,

$$f_1(x, t, z(x, t), p(x, t)) > f_1(\bar{x}, \bar{t}+h, \varphi(\bar{t}+h), 0) - \frac{1}{4}\omega(\varphi(\bar{t}+h)).$$

Risulta allora, per la (1.6), $\forall (x, t) \in \overline{R}_{\bar{x},\bar{t}+h}$,

$$f_1(x, t, z(x, t), p(x, t)) \geq \frac{3}{4}\omega(\varphi(\bar{t}+h)). \tag{3.9}$$

D'altra parte, posto in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}+h}$

$$Lw(x, t) = W(x, t),$$

la funzione $W(x, t)$ è definita q.o. in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}+h}$, e risulta, per la (3.7), la (1.3) e la (3.4),

$$W(x, t) = Lz(x, t) + \varphi'(t) \geq f_1(x, t, z(x, t), p(x, t)) - \frac{1}{4}\omega(\varphi(t)). \tag{3.10}$$

Per la continuità di $\varphi(t)$ e di $\omega(\rho)$, prendendo eventualmente δ più piccolo, si può poi ammettere che sia, per $\bar{t}+h-\delta \leq t \leq \bar{t}+h$,

$$\omega(\varphi(t)) < 2\,\omega(\varphi(\bar{t}+h)). \tag{3.11}$$

Per la (3.10), la (3.9) e la (3.11) risulta allora, in $\overline{R}_{\bar{x},\bar{t}+h}$,

$$W(x, t) > \frac{3}{4}\omega(\varphi(\bar{t}+h)) - \frac{1}{2}\omega(\varphi(\bar{t}+h)) = \frac{1}{4}\omega(\varphi(\bar{t}+h)) > 0.$$

Ciò è assurdo, poichè, per il Lemma I, se è $W(x, t) > 0$, $w(x, t)$ non può avere un massimo nel punto $(\bar{x}, \bar{t}+h) \notin \partial^* R_{\bar{x},\bar{t}+h}$.

La (3.6) è pertanto provata. Dalla (2.8) segue poi, per la (1.4), la (3.2).

Con ragionamento analogo si verifica che, posto

$$\mu(t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} z(x, t) \qquad (\mu(t) \leq 0),$$

$\mu(t)$ è non decrescente e risulta

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = 0.$$

La (1.7) è così dimostrata.

Resta ancora da verificare che $z(x, t) \equiv 0$ è l'unica soluzione limitata in $\overline{Q}$. Ammettiamo, per assurda ipotesi, che esista un'altra soluzione $z(x, t) \not\equiv 0$, definita in tutto $\overline{Q}$, ed ivi limitata:

$$|z(x, t)| \leq M, \qquad \forall\, t \in J. \tag{3.12}$$

Fissato comunque un punto t^* sull'asse t, dimostriamo che la (3.12) implica $z(x, t^*) = 0$, il che significa, per l'arbitrarietà di t^*,

$$z(x, t) \equiv 0. \tag{3.13}$$

Sia $\varphi_0(t)$ l'integrale della (3.4), soddisfacente la condizione

$$\varphi_0(0) = M + 1 . \tag{3.14}$$

Scelto $n > -t^*$, poniamo

$$\varphi_n(t) = \varphi_0(t+n) .$$

Anche $\varphi_n(t)$ risulta ovviamente integrale dell'equazione (3.4) e soddisfa la condizione

$$\varphi_n(-n) = M + 1 .$$

Si ha allora, per la (3.12),

$$z(x, -n) < \varphi_n(-n) ,$$

e quindi, dal confronto delle due equazioni (3.3) e (3.4), segue, come sopra, che, $\forall\, t > -n$, è

$$z(x, t) < \varphi_n(t) .$$

In particolare si ha:

$$z(x, t^*) < \varphi_n(t^*) = \varphi_0(t^* + n) .$$

Poichè, per la (2.8), risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_0(t^* + n) = 0,$$

si ha:

$$z(x, t^*) \leq 0 . \tag{3.15}$$

In modo analogo si dimostra che, indicato con $\varphi_1(t)$ l'integrale della (3.4) soddisfacente la condizione

$$\varphi_1(0) = -M - 1 , \tag{3.16}$$

risulta, $\forall\, t > -n$,

$$z(x, t) > \varphi_{1n}(t) \qquad (\varphi_{1n}(t) = \varphi_1(t+n)) .$$

Poichè $\varphi_1(t)$ è negativa, crescente e soddisfa la condizione $\lim_{t \to +\infty} \varphi_1(t) = 0$, si verifica, come sopra, che risulta:

$$z(x, t^*) \geq 0 .$$

Ne segue, per la (3.15),

$$z(x, t^*) = 0 ,$$

e quindi la (3.13).

Il teorema I è così dimostrato. Passiamo al teorema II.

Dette $z_1(x, t)$ e $z_2(x, t)$ due soluzioni della (1.1), poniamo

$$\zeta(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t) \quad , \quad q(x, t) = \operatorname{grad} \zeta(x, t).$$

La funzione $\zeta(x,t)$ soddisfa ovviamente, in ogni cilindro $\overline{Q}_{t,t+1}$, alle condizioni *a*) e *b*) del § 1, ed alla condizione ai limiti:

$$\zeta(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \forall\, t\in J. \tag{3.17}$$

Inoltre risulta, per la (1.3), q.o. in $\overline{Q}$,

$$\begin{cases} L\zeta(x,t) \geq f_1(x,t,z_2(x,t)+\zeta(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)+q(x,t)) + \\ \qquad -f_2(x,t,z_2(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)), \\ L\zeta(x,t) \leq f_2(x,t,z_2(x,t)+\zeta(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)+q(x,t)) + \\ \qquad -f_1(x,t,z_2(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)). \end{cases} \tag{3.18}$$

Vale poi, per $\zeta(x,t)$, la seguente proprietà: *se in un punto* $(\bar{x},\bar{t})$ *è*:

$$\zeta(\bar{x},\bar{t}) = \bar{\zeta} > 0 \quad , \quad q(\bar{x},\bar{t}) = 0,$$

allora esiste un conveniente intorno $\overline{R}$ *di* $(\bar{x},\bar{t})$, $\overline{R}\subset Q$, *nel quale risulta, q.o.*,

$$L\zeta(x,t) > \frac{3}{4}\,\omega(\bar{\zeta}) > 0. \tag{3.19}$$

Infatti, osserviamo innanzitutto che, per la (3.17), $\bar{x}\notin\partial\Omega$.
In $(\bar{x},\bar{t})$ si ha poi, per la (1.8),

$$f_1(\bar{x},\bar{t},z_2(\bar{x},\bar{t})+\bar{\zeta},\operatorname{grad} z_2(\bar{x},\bar{t})) - f_2(\bar{x},\bar{t},z_2(\bar{x},\bar{t}),\operatorname{grad} z_2(\bar{x},\bar{t})) > \omega(\bar{\zeta}).$$

Per la semicontinuità di $f_1(x,t,z,p)$ ed $f_2(x,t,z,p)$, e per la continuità di $z_2(x,t)$, grad $z_2(x,t)$, $\zeta(x,t)$, $q(x,t)$, risulta allora, in un conveniente intorno $\overline{R}$ di $(\bar{x},\bar{t})$,

$$f_1(x,t,z_2(x,t)+\zeta(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)+q(x,t)) +$$
$$-f_2(x,t,z_2(x,t),\operatorname{grad} z_2(x,t)) > \frac{3}{4}\,\omega(\bar{\zeta}).$$

Ne segue, per la prima delle (3.18), la (3.19).

Utilizzando la (3.19) e il Lemma I si dimostra il teorema II, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il teorema I. Precisamente, posto

$$\eta(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \zeta(x,t),$$

si verifica che se esiste un punto $\bar{t}$ nel quale è $\eta(\bar{t}) > 0$, allora $\eta(t)$ è non crescente in $\bar{t} \vdash +\infty$; confrontando la funzione $\zeta(x,t)$ con l'integrale $\varphi(t)$ dell'equazione (3.4) soddisfacente la (3.5), si prova poi che risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0.$$

Analogamente, posto

$$\mu(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \zeta(x,t),$$

si dimostra che $\mu(t)$ è non decrescente e risulta:

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = 0 .$$

Ne segue che $\zeta(x, t)$ è asintotica a zero per $t \to +\infty$.

Successivamente, ammessa per assurda ipotesi, l'esistenza di due soluzioni limitate, $z_1(x, t)$ e $z_2(x, t)$, e posto ancora

$$\zeta(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t) ,$$

si prova, sempre utilizzando il confronto di $\zeta(x, t)$ con gli integrali della (3.4) soddisfacenti rispettivamente le condizioni (3.14) e (3.16), che

$$|\zeta(x, t)| \leq M < +\infty \quad \Rightarrow \quad \zeta(x, t) \equiv 0 .$$

Ne segue l'unicità della soluzione limitata.

Il teorema III è, come per il caso classico, una immediata conseguenza del teorema II. Posto

$$z(x, t) = y(x, t)\, \gamma(x) , \tag{3.20}$$

$y(x, t)$ risulta soluzione dell'equazione

$$Ly(x, t) = h(x, t, y, s) \qquad (s = \{s_1, \cdots, s_m\} = \operatorname{grad} y) \tag{3.21}$$

ove è

$$h(x, t, y, s) = \frac{1}{\gamma(x)} \Big\{ f(x, t, y\gamma(x), s\gamma(x) + y \operatorname{grad} \gamma(x)) - y A\gamma(x) + \\ - 2 \sum_{i,j}^{1 \cdots m} a_{ij}(x)\, s_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \Big\} .$$

Verifichiamo che $h(x, t, y, s)$ soddisfa le ipotesi del teorema II.

Sia $v > 0$; posto $w = v\gamma(x) > 0$, e indicato con $h_1(x, t, y, s)$ e $h_2(x, t, y, s)$ rispettivamente il minimo e il massimo limite di $h(x, t, y, s)$, risulta, per la (1.9) e la (1.10),

$$h_1(x, t, y + v, s) - h_2(x, t, y, s) =$$

$$= \frac{1}{\gamma(x)} \{ f_1(x, t, y\gamma(x) + v\gamma(x), s\gamma(x) + y \operatorname{grad} \gamma(x) + v \operatorname{grad} \gamma(x)) +$$

$$- f_2(x, t, y\gamma(x), s\gamma(x) + y \operatorname{grad} \gamma(x)) - v A\gamma(x) \} =$$

$$= \frac{1}{\gamma(x)} \{ f_1(x, t, z + w, p + w \operatorname{grad} \log \gamma(x)) - f_2(x, t, z, p) + \lambda w \} >$$

$$> \frac{1}{\gamma(x)}\, \omega(w) \geq \min_{x \in \overline{\Omega}} \{ \gamma^{-1}(x)\, \omega(v\gamma(x)) \} = \omega_1(v) .$$

La prima delle (1.8) è pertanto soddisfatta; analogamente si verifica la seconda, per $v < 0$. Ne segue che valgono per $y(x, t)$ le proprietà enunciate nel teorema II e quindi le stesse proprietà valgono, grazie alla (3.20), per la funzione $z(x, t)$, soluzione della (1.1).

§ 4. – Consideriamo le soluzioni della (1.1), soddisfacenti la condizione (1.11), nel senso precisato nel § 1 (cfr. la (1.12)).

Dimostriamo che valgono i seguenti teoremi:

I'. – *La funzione* $f(x,t,z,p)$ *verifichi le ipotesi del teorema* I; $\psi(x,t,z)$ *definita in* $S=\{x\in\partial\Omega\,;\,t,z\in J\}$, *misurabile e limitata in ogni insieme limitato, soddisfi la seguente condizione: risulti,* $\forall x, t,$ *e per* $z\neq 0$,

$$z\,\psi(x,t,z)>z\,\alpha(z), \tag{4.1}$$

ove $\alpha(z)$ *è una funzione continua per* $z\in J$, *e tale che sia*

$$z\,\alpha(z)>0 \qquad per \quad z\neq 0.$$

Allora vale, per le soluzioni del problema (1.1), (1.11), *la tesi del teorema* I.

II'. – *La funzione* $f(x,t,z,p)$ *verifichi le ipotesi del teorema* II; $\psi(x,t,z)$, *definita in* S, *misurabile e limitata in ogni insieme limitato, soddisfi le seguenti condizioni: risulti,* $\forall x, t, z,$

$$\begin{cases} \psi_1(x,t,z+w)-\psi_2(x,t,z)>\alpha(w) & per \quad w>0, \\ \psi_2(x,t,z+w)-\psi_1(x,t,z)<\alpha(w) & per \quad w<0, \end{cases} \tag{4.2}$$

ove $\alpha(w)$ *è una funzione continua per* $w\in J$, *e tale che sia*

$$w\alpha(w)>0 \qquad per \quad w\neq 0.$$

Allora vale, per le soluzioni del problema (1.1), (1.11), *la tesi del teorema* II.

III'. – *La funzione* $\psi(x,t,z)$, *definita in* S, *misurabile e limitata in ogni insieme limitato, soddisfi,* $\forall x, t, z,$ *la condizione:*

$$\begin{aligned} &\psi_1(x,t,z+w)-\psi_2(x,t,z)>aw \qquad per \quad w>0 \quad (a=\text{cost.}>0) \\ &(\Rightarrow \psi_2(x,t,z+w)-\psi_1(x,t,z)<aw \qquad per \quad w<0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'operatore L *e la funzione* $f(x,t,z,p)$ *verifichino le ipotesi del teorema* III, *in cui si supponga* $\gamma(x)$ *soddisfacente la condizione*

$$\gamma^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\gamma(x)\Big|_{\partial\Omega}\leq a_1, \tag{4.4}$$

con $a_1=\text{cost.}>0$, *tale che sia* $a_1<a$.

Allora vale, per le soluzioni del problema (1.1), (1.11), *la tesi del teorema* III.

La (4.1) implica:

$$\psi_1(x,t,0)\leq 0 \quad , \quad \psi_2(x,t,0)\geq 0.$$

Ne segue, ricordando anche la (3.1), che $z(x,t)\equiv 0$ è soluzione del problema (1.1), (1.11).

Esaminiamo ora un'altra soluzione, non identicamente nulla. Per provare che è asintotica a zero, per $t\to+\infty$, si può procedere come nella dimostrazione del teorema I, pur di osservare quanto segue.

Se $(\bar{x},\bar{t})$ *è un punto di massimo positivo per* $z(x,\bar{t})$, $\bar{x}\in\Omega$. Tale proprietà, che nel teorema I si deduceva dalla condizione ai limiti (1.4), sussiste anche per le soluzioni del problema ora considerato purchè $\psi(x, t, z)$ soddisfi l'ipotesi (4.1). Infatti, ammettiamo che $\bar{x} \in \partial\Omega$. Si ha allora, per la (1.12) e la (4.1), essendo $z(\bar{x}, \bar{t}) > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial\nu} z(\bar{x}, \bar{t}) \geq \psi_1(\bar{x}, \bar{t}, z(\bar{x}, \bar{t})) \geq \alpha(z(\bar{x}, \bar{t})) > 0, \tag{4.5}$$

assurdo se $(\bar{x}, \bar{t})$ è di massimo.

Procedendo come nel § 3, si dimostra allora che se esiste un punto $\bar{t}$ nel quale è $\eta(\bar{t}) > 0$, risulta soddisfatta la (3.6) $\forall t \in \bar{t} \vdash + \infty$ (3). Non si può però ora, dalla (3.6) e dalla (2.8), dedurre immediatamente la (3.2), poichè potrebbe anche essere $\eta(t) < 0$.

Ammettiamo allora che esista almeno un punto (x_1, t_1) nel quale è $z(x_1, t_1) < 0$, e quindi è $\mu(t_1) < 0$. Detto $\varphi_1(t)$ l'integrale della (3.4) soddisfacente la condizione

$$\varphi(t_1) = \mu(t_1) - 1,$$

$(\varphi_1(t_1) < 0 \Rightarrow \varphi_1(t) < 0$, crescente in $t_1 \vdash + \infty$, e $\lim_{t \to +\infty} \varphi_1(t) = 0)$ si dimostra come prima che è, $\forall t \in t_1 \vdash + \infty$,

$$z(x, t) > \varphi_1(t). \tag{4.6}$$

Ne segue, dovendo valere contemporaneamente, per $t \geq t_1 > \bar{t}$, la (3.6) e la (4.6), che è, uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$,

$$\lim_{t \to +\infty} z(x, t) = 0.$$

Come nel § 3 si dimostra poi che $z(x, t) \equiv 0$ è l'unica soluzione limitata in $\bar{Q}$, e il teorema I′ resta così provato.

Per dimostrare il teorema II′, dette $z_1(x, t)$ e $z_2(x, t)$ due soluzioni del problema (1.1), (1.11), poniamo ancora

$$\zeta(x, t) = z_1(x, t) - z_2(x, t).$$

Per la (1.12) è:

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \zeta(x, t) \Big|_{x \in \partial\Omega} \geq \psi_1(x, t, z_2(x, t) + \zeta(x, t)) - \psi_2(x, t, z_2(x, t)),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \zeta(x, t) \Big|_{x \in \partial\Omega} \leq \psi_2(x, t, z_2(x, t) + \zeta(x, t)) - \psi_1(x, t, z_2(x, t)).$$

Ne segue, per la prima delle (4.2), che se in un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{x} \in \partial\Omega$, è $\zeta(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{\zeta} > 0$, è anche

$$\frac{\partial\zeta(\bar{x}, \bar{t})}{\partial\nu} > \alpha(\bar{\zeta}) > 0.$$

(3) La dimostrazione resta invariata, poiché, anche se in generale non è soddisfatta la (3.8), il punto $(\bar{x}, \bar{t} + h)$ nel quale si annulla la funzione $w(x, t) = z(x, t) - \varphi(t)$ è un punto $\in \Omega_{\bar{t}+h}$. Infatti $(\bar{x}, \bar{t} + h)$ è di massimo positivo anche per $z(x, \bar{t} + h)$ e ciò assicura, per la (4.5), che $\bar{x} \notin \partial\Omega$.

Pertanto ogni eventuale punto di massimo positivo per $\zeta(x, \bar{t})$ non appartiene a $\partial\Omega$, e posto $\eta(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \zeta(x, t)$,

$$\eta(\bar{t}) = \zeta(\bar{x}, \bar{t}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in \Omega .$$

Valgono poi per $L\zeta(x, t)$ le (3.18) e per $\zeta(x, t)$ la proprietà espressa dalla (3.19). La dimostrazione del teorema II′ è quindi analoga (cfr. teorema II) a quella del teorema I′.

Per dimostrare il teorema III′, poniamo ancora (cfr. la (3.20)),

$$z(x, t) = y(x, t)\, \gamma(x).$$

$y(x, t)$ è soluzione della (3.21) con $h(x, t, y, s)$ soddisfacente alle ipotesi del teorema II (e quindi II′). In questo caso è quindi sufficiente esaminare le condizioni al contorno. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial\nu} y(x, t) = \frac{1}{\gamma(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial\nu} z(x, t) - y(x, t) \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu} \right\}. \tag{4.7}$$

Posto:

$$\Phi(x, t, y) = \frac{1}{\gamma(x)} \psi(x, t, y\gamma(x)) - \frac{y}{\gamma(x)} \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu},$$

$$\Phi_1(x, t, y) = \min_{\xi, \tau, \eta \to x, t, y} \lim \Phi(\xi, \tau, \eta) \quad , \quad \Phi_2(x, t, y) = \max_{\xi, \tau, \eta \to x, t, y} \lim \Phi(\xi, \tau, \eta),$$

$y(x, t)$ soddisfa (nel senso precisato al § 1) la condizione ai limiti

$$\frac{\partial}{\partial\nu} y(x, t) \Big|_{x \in \partial\Omega} = \Phi(x, t, y),$$

risultando, per la (4.7) e la (1.12), $\forall x \in \partial\Omega$,

$$\frac{1}{\gamma(x)} \psi_1(x, t, y(x, t)\, \gamma(x)) - \frac{y(x, t)}{\gamma(x)} \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu} \leq \frac{\partial}{\partial\nu} y(x, t) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma(x)} \psi_2(x, t, y(x, t)\, \gamma(x)) - \frac{y(x, t)}{\gamma(x)} \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu}.$$

Inoltre, per la (4.3) e la (4.4), si ha, $\forall w > 0$,

$$\Phi_1(x, t, y + w) - \Phi_2(x, t, y) = \frac{1}{\gamma(x)} \Big\{ \psi_1(x, t, y\gamma(x) + w\gamma(x)) +$$

$$- w \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu} - \psi_2(x, t, y\gamma(x)) \Big\} > (a - a_1)\, w,$$

e, $\forall w < 0$,

$$\Phi_2(x, t, y + w) - \Phi_1(x, t, y) < (a - a_1)\, w .$$

Pertanto $\Phi(x, t, y)$ soddisfa le (4.2) con $\alpha(w) = (a - a_1)\, w$.

Ne segue che valgono per $y(x, t)$, e quindi anche per $z(x, t)$, le proprietà del teorema II′.