Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gleb Wataghin

Sulla termodinamica e la cosmologia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.6, p. 725–729.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_725_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Fisica teorica. — *Sulla termodinamica e la cosmologia.* Nota (*) del Socio GLEB WATAGHIN.

SUMMARY. — A model of an expanding universe filled with neutrino–pairs is described. The origin of the weakly interacting phases of the neutrinos and the photons in the actual universe is analyzed, and the role of rapid cooling processes of hadrons and of photons at a certain « leptonic » epoch is pointed out.

§ 1. In questa Nota sono esposte alcune osservazioni sui modelli dell'universo in espansione (omogeneo e isotropo in ogni sezione $x_4 =$ cost), basati sull'ipotesi che ad una certa epoca tale universo, nel suo insieme, era caldo ($k\mathrm{T} > m_\pi c^2$) e denso ($\rho > 10^{14}\,\mathrm{gr/cm^3}$) [modello di Friedman–Gamov]. Epoche anteriori, dominate probabilmente da particelle subnucleoniche, non saranno prese in esame in questa Nota.

Nei modelli del genere si ammette che l'espansione sia adiabatica e che quindi in ogni istante $x_4 =$ cost. l'universo si trova in uno stato prossimo allo stato di equilibrio termodinamico (ed è omogeneo e isotropo).

È facile vedere, invece, che in certe epoche l'universo doveva trovarsi in stati lontani dall'equilibrio e subire trasformazioni irreversibili. Le conseguenze di queste trasformazioni hanno determinato profonde alterazioni nell'evoluzione dell'universo e nella costituzione della materia e della radiazione.

Si deve segnalare innanzitutto che a certe temperature critiche ha avuto luogo il processo di annichilamento di coppie di particelle e antiparticelle, come coppie di protoni, pioni, elettroni etc. Generalmente urti ad elevata energia relativa sono accompagnati dalla produzione multipla [ad esempio del tipo: $n + n \rightarrow n + n + \Sigma\pi$].

Anche nei decadimenti il numero di particelle aumenta [ad esempio $\mu \rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu$]. Pertanto l'energia media delle particelle generate diminuisce. Inoltre, nell'era « leptonica » $\left[\frac{1}{2} m_e c^2 \lesssim k\mathrm{T} \lesssim \frac{1}{2} m_\pi c^2\right]$ una notevole parte dell'energia baricentrica viene ceduta, in un modo praticamente irreveribile, ai neutrini. Questi ultimi hanno infatti una sezione d'urto che diminuisce rapidamente coll'energia. Ne deriva, per gli adroni e per gli elettroni, nell'era « leptonica », un brusco raffreddamento.

Il fenomeno più importante ha avuto luogo quando coppie di neutrini si sono separate, formando una fase non interagente col resto della materia.

Nel modello, proposto in alcune Note precedenti [1] di un universo dominato in una certa epoca da una alta densità dei neutrini, avvengono vari processi, che si sovrappongono ed alterano il processo generale della

(*) Presentata nella seduta del 18 giugno 1971.

espansione dell'universo (riempito nell'epoca considerata principalmente dai neutrini). I protoni, annichilandosi danno luogo alla produzione multipla dei pioni, i mesoni decadono, dando luogo alla formazione dei neutrini, dei muoni e degli elettroni. I processi « urca » e le interazioni col campo gravitazionale, insieme coi processi sopracitati, alterano i rapporti fra i vari costituenti dell'universo.

In epoche diverse, difficilmente precisabili, la materia si è divisa dalla anti–materia, si son formate le galassie, le stelle e i nuclei atomici. Questi processi determinarono localmente forti raffreddamenti e talvolta riscaldamenti locali. Mentre ha luogo la separazione della fase neutrinica e la temperatura degli adroni si abbassa da $T_\nu \sim m_\pi c^2/2k$ a $T_a \sim m_e c^2/2k$, si verifica la differenziazione di due temperature: quella neutrinica T_ν, che segue la legge adiabatica primitiva, e quella adronica T_a. I costituenti elettromagnetici interagiscono assai debolmente coi neutrini e in misura molto maggiore cogli adroni e pertanto acquistano la temperatura T_a. In particolare la temperatura T_f dei fotoni nel momento in cui questi formano la fase non interagente è: $T_f \cong T_a$. Il fatto fondamentale è che il raffreddamento degli adroni e dei fotoni avviene in un tempo assai più breve dell'ugual raffreddamento adiabatico dei neutrini, a causa del comportamento differente delle sezioni d'urto, per $T < T_\nu$, dei processi con e senza assorbimento dei neutrini [2]. Considerando trascurabile la durata del raffreddamento irreversibile sopracitato, si deve porre $T_\nu/T_a \cong 140$ ove $T_a = T_f$ è la temperatura alla quale si disaccoppia la fase non interagente dei fotoni. Si ottiene così per il rapporto: ρ_ν/ρ_f, dopo il disaccoppiamento sia dei neutrini sia dei fotoni, un valore: $[T_\nu/T_a]^4 \sim 3{,}8\ 10^8$. Conoscendo il valore di ρ_f, si trova che la densità neutrinica è sufficiente per ottenere l'universo chiuso.

§ 2. Esaminiamo un modello di un universo in espansione del tipo di Friedman che soddisfa le equazioni di Einstein:

$$\mathbf{R}_\mu^\nu - \mathbf{R}\delta_\mu^\nu = -\Lambda\delta_\mu^\nu - \mathbf{K}\mathbf{T}_\mu^\nu \tag{1}$$

e ha un elemento lineare:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_4^2 - \mathrm{R}\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\vartheta^2 + \sin^2\chi \sin^2\vartheta\, d\varphi^2]\,. \tag{2}$$

Ammettiamo che quest'universo sia riempito da coppie di neutrini ν_μ e antineutrini $\tilde{\nu}_\mu$, aventi massa nulla, e interagenti col campo gravitazionale, e supponiamo che anche a temperature elevate l'interazione col vuoto non dà luogo alla formazione di altre particelle. Ammettiamo inoltre che, dal punto di vista statistico, l'espansione sia adiabatica, ossia proceda come una successione di stati di quasi–equilibrio termodinamico a entropia costante. Il campo gravitazionale partecipa a tale equilibrio. Per descrivere le leggi del moto dei neutrini è necessario far uso delle coordinate « tetradiche » (« four–legs »). Introducendo il tempo preferenziale x_4, si avrà che ogni grandezza fisica potrà essere espressa in funzione della sola variabile x_4. Per poter introdurre una metrica con orologi e con campioni di lunghezza atomici sarà necessario far uso di nuclei stabili di grande massa, ad esempio di nuclei di piombo, che supporremo siano presenti in quantità trascurabile rispetto al numero dei neutrini presenti in ogni punto dello spazio. La loro massa di riposo come anche le masse $m_p\, m_e$ delle particelle elementari e le costanti universali c, h, e, $\mathbf{K}$ si suppongono costanti, indipendenti da x_4. Poniamo $c = 1$. Finalmente l'equazione di stato per i neutrini di massa nulla permette di scrivere le componenti $\mathbf{T}_\mu^\nu$ del tensore di energia e di impulso nella forma: $\mathbf{T}_4^4 = \rho$, $\mathbf{T}_1^1 = = \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_3^3 = -\frac{\rho}{3}$, altri $\underset{\mu \neq \nu}{\mathbf{T}_\mu^\nu} = 0$. È noto che a causa delle proprietà di simmetria del modello in studio le equazioni (1) si riducono a due equazioni indipendenti. Il problema matematico si riduce quindi a determinare tre funzioni $g_{44}(x_4)$, $R(x_4)$, $\rho(x_4)$ che risolvono le equazioni (1) e l'equazione di stato. Questa deve essere compatibile colle (1). Il problema si semplifica se si tiene conto che per le equazioni di Dirac di particelle di massa nulla vale l'invarianza conforme. Nel caso in studio questa invarianza si riduce ad una semplice « dilatazione »: $\bar{x}_\mu = \sigma x_\mu$, ove $\sigma =$ cost. Pertanto si può porre [1]:

$$\frac{g_{44}^{1/2}}{R} = \frac{1}{R_0} = \text{cost.} \tag{3}$$

Indicando con $\Phi(x_4) = g_{44}^{1/2}(x_4) = \frac{R(x_4)}{R_0}$ si possono esprimere anche i potenziali nelle coordinate tetradiche nel modo seguente:

$$h_a^4 = h_{4a} = \Phi(x_4) \quad \text{ecc.} \qquad h_4^a h_{4a} = \Phi^2 \quad \text{ecc.}$$

Le equazioni di Einstein assumono la forma [1]:

$$\begin{aligned} & 2\,\Xi + \mathcal{H} = \Lambda - \frac{\mathbf{K}}{3}\rho_0 \cdot \frac{1}{\Phi^4} \\ & 3\,\mathcal{H} = \Lambda + \mathbf{K}\rho_0 \frac{1}{\Phi^4} \quad , \quad \text{ove} \quad \Xi = \frac{R_{4141}}{g_{44}\, g_{11}} = \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi^3} - \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^4} < 0 \\ & \mathcal{H} = \frac{R_{2121}}{g_{22}\, g_{11}} = \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^4} + \frac{1}{R_0^2}\frac{1}{\Phi^2} > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se si moltiplica $(3\,\mathcal{H} - \Lambda)$ per $R^3/3$ e si deriva, e poi si sottrae il prodotto $(2\,\Xi + \mathcal{H} - \Lambda)\, R^2\, \dot{R}$, si trova che la differenza è identicamente nulla. Ne segue una condizione supplementare per il tensore T_ν^μ:

$$\frac{d}{dx_4}\left(T_4^4 \frac{R^3}{3}\right) - T_1^1 R^2 \dot{R} = 0 .$$

Si trova facilmente che nel caso $T_\mu^\mu = 0$:

$$\rho(x_4) = \rho_0/\Phi^4(x_4).$$

e nel caso considerato: $\Lambda > 0$, R reale e $R < R_0$, $\rho > \rho_0$,

$$\mathbf{R} = 6(\Xi + \mathcal{H}) = 4\Lambda = \frac{6}{R_0^2}.$$

Limitandoci all'esempio di una espansione $\dot{\Phi} > 0$, si trova facilmente la soluzione delle (4):

$$\dot{\Phi} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}\Phi^4 - \frac{1}{R_0^2}\Phi^2 + \frac{K\rho_0}{3}}$$

$$\frac{\Lambda}{3} = \frac{K\rho_0}{3} = \frac{1}{2}\frac{1}{R_0^2} \qquad \Phi - \Phi_i = \operatorname{tgh}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,[x_4 - x_{4i}]\right).$$

Assumendo $\Phi_i = 0$ e $x_{4i} = 0$, si ha nel limite $x_4 = \infty$ il valore:

$$\Phi_\infty = 1 \quad ; \quad R_\infty = R_0.$$

§ 3. La non linearità delle equazioni di Einstein rende difficile l'integrazione di queste equazioni nel caso in cui son presenti vari costituenti del tensore $\mathbf{T}_\mu^\nu$: $\mathbf{T}_\mu^\nu = \sum_\alpha (\mathbf{T}_\mu^\nu)^\alpha$. Soltando nella approssimazione dei campi deboli è possibile studiare l'influenza dei singoli costituenti di $\mathbf{T}_\mu^\nu$. Nelle epoche in cui hanno luogo processi irreversibili, per esempio un rapido annichilamento di coppie di protoni o di mesoni o di elettroni, solo il risultato finale di queste trasformazioni può essere valutato.

Le particelle, aventi una massa di riposo $m_0 \neq 0$, subiscono un rapido raffreddamento in seguito al quale per $kT < m_0 c^2$ incominciano a soddisfare le leggi non–relativistiche e la loro capacità termica diventa piccola rispetto a quella dei neutrini. Questi ultimi, che hanno formato a temperature più elevate ($kT \sim 2\, m_\pi c^2$) una fase separata e debolmente interagente, vengono a costituire la parte dominante del tensore $\mathbf{T}_\mu^\nu$ e quindi diventano i principali responsabili della creazione del campo gravitazionale secondo [1].

Fotoni e neutrini subiscono anche lo spostamento verso il rosso, dovuto sempre al lavoro eseguito, per esempio, da un fotone spostandosi fra due punti con potenziali gravitazionali diversi. Questa spiegazione dell'effetto è d'accordo con le esperienze di Pound, Rebka ed altri. Lo spostamento verso il rosso cosmologico è pertanto dato dalle formule:

$$\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{R(x_4)}{\bar{R}(\bar{x}_4)} = \frac{\Phi(x_4)}{\Phi(\bar{x}_4)} = \frac{\bar{\nu}}{\nu}. \tag{5}$$

Il modello descritto in questo § 2 si riferisce soltanto all'intervallo del tempo in cui il costituente dominante del tensore $\mathbf{T}_\mu^\nu$ è formato da neutrini. La espansione, o più generalmente la dilatazione, si intende riferita a campioni di lunghezza e di tempo universali rappresentati da atomi, nuclei e da particelle fondamentali. D'accordo col principio di equivalenza, si ammette che esiste un sistema di coordinate « tetradiche » tale che in ogni punto $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$

le costanti universali (c, m_p, m_e, h, e, $\mathbf{K}$ ecc.) hanno lo stesso valore, e i campioni di lunghezza (h/mc) e di tempo sono eguali ovunque. Mentre la costante della gravitazione Einsteiniana $\mathbf{K}$ è anche universale, si può mostrare che la costante Neutoniana $\mathcal{G}$ varia col tempo: $\mathcal{G} \sim \mathbf{K}\Phi^{-2}$.

Nei sistemi di riferimento, detti « comoving », le forze gravitazionali sono eliminate approssimativamente. Questi problemi saranno esaminati in un'altra Nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. WATAGHIN, « Il Nuovo Cimento », *35*, 1240 (1965); G. WATAGHIN, « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », *45*, 45 (1968), « Nuovo Cimento, Lettere » (1969), *1*, 375 (1969), Academy of Sciences of the Ukrainian, SSR Kiev 1970, pag. 1.

[2] This remark is contained in a Note of AGNESE, LA CAMERA, A. WATAGHIN, « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », *45*, 325 (1968).