Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Teresa Bruno

Sull'esistenza di elementi uniti per trasformazioni in spazi di applicazioni misurabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.6, p. 654–658.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_654_0>

Analisi matematica. — *Sull'esistenza di elementi uniti per trasformazioni in spazi di applicazioni misurabili.* Nota di TERESA BRUNO, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We give an existence Theorem for fixed points of transformations (T, T′) on spaces of measurable functions of a compact metric space into a B-space.

È certamente interessante, per le molteplici applicazioni che ne possono conseguire, lo studio dei sistemi del tipo

$$\begin{cases} v = \mathrm{T}(v, w) \\ w = \mathrm{T}'(v, w) \end{cases} \qquad (v, w) \in \mathrm{S}\times\mathrm{S}'$$

S e S′ essendo spazi di funzioni definite in uno spazio metrico ed a valori in uno spazio di Banach, T e T′ trasformazioni definite in $\mathrm{S}\times\mathrm{S}'$.

In proposito, qualche anno addietro R. Fiorenza ha stabilito in [1] un notevole teorema concernente l'esistenza di soluzioni del sistema, ovvero, ciò che è lo stesso, l'esistenza di elementi uniti per la trasformazione

$$(\mathrm{T}, \mathrm{T}') : \mathrm{S}\times\mathrm{S}' \to \mathrm{S}\times\mathrm{S}'$$

quando S e S′ sono spazi di applicazioni continue; per chiarezza crediamo opportuno riportarne l'enunciato, ed a tale scopo premettiamo alcune notazioni e definizioni introdotte dallo stesso Fiorenza, e che peraltro utilizzeremo anche nel seguito.

Siano, X e Y spazi metrici compatti, A e B spazi di Banach, $\mathrm{A_Y}[\mathrm{B_X}]$ lo spazio di Banach costituito dalle applicazioni continue di Y[X] in A[B] con la norma

$$\|v\|_{\mathrm{A_Y}} = \sup_{y \in \mathrm{Y}} \|v(y)\|_{\mathrm{A}} \qquad [\|w\|_{\mathrm{B_X}} = \sup_{x \in \mathrm{X}} \|w(x)\|_{\mathrm{B}}] .$$

Per ogni $\mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A}$ si denota con A'_{Y} il sottoinsieme di $\mathrm{A_Y}$ costituito dalle funzioni a valori in A′, e con (A′) il sottoinsieme di A'_{Y} costituito dalle funzioni costanti; analogo è il significato di B'_{X} e di (B′) per ogni $\mathrm{B}' \subseteq \mathrm{B}$.

Per ogni $a \in \mathrm{A}$ e per ogni $b \in \mathrm{B}$, le applicazioni

$$y \in \mathrm{Y} \to a \quad , \quad x \in \mathrm{X} \to b$$

si denotano con (a) e (b) rispettivamente.

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

Sia $A^* \subseteq A$ $[B^* \subseteq B]$ e

$$T : A_Y \times B_X \to A_Y^* \qquad [T' : A_Y \times B_X \to B_X^*] ;$$

per ogni $y_0 \in Y$ e per ogni $w_0 \in B_X^*$ [per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $v_0 \in A_Y^*$], l'applicazione

$$a \in A^* \to T(a), w_0)(y) \qquad [b \in B^* \to T'(v, (b))(x)]$$

si dice *generata da* T (*in corrispondenza di* y_0 *e* w_0) [*generata da* T' (*in corrispondenza di* x_0 *e* v_0)]; inoltre, si dice che T[T'] *conserva le uguaglianze* se

$$\forall w \in B_X, \forall y \in Y, \forall (v_1, v_2) \in A_Y^2 \quad (v_1(y) = v_2(y) \Rightarrow T(v_1, w)(y) = T(v_2, w)(y))$$

$$[\forall v \in A_Y, \forall x \in X, \forall (w_1, w_2) \in B_X^2 \quad (w_1(x) = w_2(x) \Rightarrow T'(v, w_1)(x) = T'(v, w_2)(x))].$$

Infine, se $\{\theta_i\}_{i \in J}$ è una famiglia di trasformazioni continue definite in un sottoinsieme chiuso S_0 di uno spazio metrico S, a valori in un sottoinsieme di S relativamente compatto e dotate rispettivamente di un unico elemento unito, si dice che l'unicità per l'elemento unito, x_i, di θ_i è *uniforme rispetto ad i* se

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (d_S(x, \theta_i(x)) < \delta \Rightarrow d_S(x, x_i) < \varepsilon) \quad \forall x \in S_0, \ \forall i \in J .$$

Il teorema di Fiorenza è il seguente:

Siano A^* *e* B^* *sottoinsiemi convessi e compatti rispettivamente di* A *e* B, *e*

$$T : A_Y \times B_X \to A_Y^* \quad , \quad T' : A_Y \times B_X \to B_X^*$$

trasformazioni continue che conservano le uguaglianze.

Le trasformazioni di B^* *in* B^* *generate da* T' *ammettano rispettivamente un unico elemento unito; quelle di* A^* *in* A^* *generate da* T *soddisfino alla stessa proprietà, l'unicità essendo uniforme in* B_X^*.

Allora, se l'insieme $T((A^*) \times B_X^*)$ *è relativamente compatto, la trasformazione* (T, T') *di* $A_Y \times B_X$ *in* $A_Y \times B_X$ *ammette almeno un elemento unito.*

Questo risultato è conseguito mediante il teorema di Schauder, che è utilizzato, proprio in virtù dell'ipotesi di unicità uniforme, per un'opportuna trasformazione che traduce il problema in uno equivalente. Esso si presta a numerose applicazioni, alcune delle quali sono state indicate dallo stesso Fiorenza (1), in particolare si applica alla risoluzione di classici sistemi di equazioni integrali; ma si tratta in genere di problemi risolti in ipotesi di regolarità e per soluzioni in classi di funzioni regolari.

È spontaneo allora cercare di stabilire un risultato, dello stesso tipo, che però possa operare in ipotesi più generali, quelle ad esempio di Carathéodory, e che comunque si riferisca a trasformazioni definite in spazi più ampi degli A_Y e B_X, precisamente quelli delle applicazioni misurabili.

(1) Vedi i problemi esposti in (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) di [1].

D'altra parte, successivamente K. Deimling ha considerato in [2] alcuni sistemi, abbastanza generali, di equazioni integrali in ipotesi di Carathéodory, ed ha stabilito per essi un teorema di esistenza utilizzando, sostanzialmente come in [1], il teorema di Schauder; ciò è reso possibile innanzitutto dalla particolare topologia introdotta negli spazi di funzioni misurabili rispetto ad una variabile e continue rispetto all'altra, che sono gli spazi in cui i problemi sono posti.

Tale lavoro di Deimling suggerisce in modo naturale il tipo di topologia per gli spazi più generali che vogliamo considerare.

Introduciamo pertanto in Y e X due misure positive [2], μ e μ' rispettivamente, e con A_Y indichiamo lo spazio delle [classi di] applicazioni μ–misurabili di Y in A, v, tali che l'applicazione $(y \in Y \to \|v(y)\|_A)$ sia μ–integrabile in Y, con la norma

$$\|v\|_{A_Y} = \int_Y \|v(y)\|_A \, d\mu \, ;$$

analogo è il significato che diamo a B_X.

In questi spazi, che risultano spazi di Banach, stabiliamo un risultato analogo a quello di Fiorenza; ciò è l'oggetto della presente Nota.

L'idea centrale appare quella di far dipendere da $y[x]$ l'insieme dei valori di $T(v, w)(y)$ $[T'(v, w)(x)]$, cioè di sostituire A^* e B^* con famiglie di insiemi $\{A^*(y)\}_{y \in Y}$ e $\{B^*(x)\}_{x \in X}$; tali insiemi dovranno godere di particolari proprietà, che peraltro nel caso regolare sono banalmente verificate e che non necessita mettere in evidenza.

Al fine di enunciare il teorema, introduciamo due definizioni. Diremo che la famiglia $\{A^*(y)\}_{y \in Y}$ è *quasi compatta (rispetto a* μ*)* [*quasi relativamente compatta (rispetto a* μ*)*] se per ogni $\omega > 0$ esiste un compatto $Y_\omega \subseteq Y$ tale che $\mu(Y - Y_\omega) < \omega$ e l'insieme

$$\bigcup_{y \in Y_\omega} A^*(y)$$

sia compatto [relativamente compatto]; ciò lo esprimeremo anche dicendo che l'*insieme*

$$\bigcup_{y \in Y} A^*(y)$$

è quasi compatto [quasi relativamente compatto]; analogamente per la famiglia $\{B^*(x)\}_{x \in X}$.

Consideriamo ora un sottoinsieme V di A_Y soddisfacente alle seguenti condizioni:

a) *la funzione integrale* $\int_E \|v(y)\|_A \, d\mu$, $v \in V$, *è equiassolutamente continua nella famiglia dei sottoinsiemi misurabili di* Y;

b) *per ogni successione* $\{v_n\}$ *di elementi di* V, $\bigcup_{y \in Y} \bigcup_n v_n(y)$ *è quasi relativamente compatto.*

(2) Per il significato di misura positiva su uno spazio metrico compatto e per i concetti di misurabilità, integrabilità e relativi risultati, ved. J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse, II.* Gauthier–Villars, Paris.

Si può dimostrare che, *se le funzioni* $v \in V$ *sono* μ*–quasi equicontinue* (3), *allora* V *è relativamente compatto*; perciò diamo la seguente definizione: un sottoinsieme di A_Y che goda delle proprietà a) e b) lo diremo relativamente compatto *in senso forte* se è costituito da funzioni μ–quasi equicontinue.

Naturalmente, se $\{V(Y')\}_{Y' \subseteq Y}$ è una famiglia di sottoinsiemi di A_Y soddisfacenti alle condizioni a) e b), si dirà che V(Y) è *quasi* relativamente compatto in senso forte (rispetto a μ) se per ogni $\omega > 0$ esiste un compatto $Y_\omega \subseteq Y$ tale che $\mu(Y - Y_\omega) < \omega$ e $V(Y_\omega)$ sia relativamente compatto in senso forte.

Gli insiemi A_Y^* e B_X^* considerati da Fiorenza sono da noi sostituiti dai seguenti:

$$A_Y^* = \{v : v \in A_Y \ , \ v(y) \in A^*(y) \quad \text{q.o. in } Y\}$$

$$B_X^* = \{w : w \in B_X \ , \ w(x) \in B^*(x) \quad \text{q.o. in } X\} ;$$

per semplicità di scrittura, per ogni $Y' \subseteq Y$ e per ogni $X' \subseteq X$, porremo

$$\mathcal{A}^*(Y') = \bigcup_{y \in Y'} A^*(y) \quad , \quad \mathcal{B}^*(X') = \bigcup_{x \in X'} B^*(x) .$$

Il teorema cui abbiamo accennato è il seguente:

Siano $\{A^*(y)\}_{y \in Y}$ *e* $\{B^*(x)\}_{x \in X}$ *famiglie quasi compatte di sottoinsiemi convessi di* A e B *rispettivamente.*

Siano inoltre

$$T : A_Y \times B_X \to A_Y^* \quad , \quad T' : A_Y \times B_X \to B_X^*$$

trasformazioni che conservano le uguaglianze, soddisfacenti alle seguenti condizioni:

1) $T[T']$ *è* μ*–quasi continua* [μ'*–quasi continua*] *in* $(\mathcal{A}^*(Y)) \times$ $\times B_X^* [A_Y^* \times (\mathcal{B}^*(X))]$ *in modo semiregolare rispetto a* $w[v]$ (4), *e risulta*

$$\|T(v, w)(y)\|_A \le M(y) \ \text{ q.o. in } Y \quad , \quad \|T'(v, w)(x)\|_B \le M(x) \ \text{ q.o. in } X ,$$

essendo $M[M']$ *una funzione integrabile in* $Y[X]$.

2) *Per q.o.* $x \in X$ *e per ogni* $v \in A_Y^*$, *la trasformazione di* $B^*(x)$ *in* B *generata da* T' *in corrispondenza di* x *e* v, *ammette un unico elemento unito; per q.o.* $y \in Y$ *le trasformazioni di* $A^*(y)$ *in* A, *generate da* T *per ogni* $w \in B_X^*$, *hanno la stessa proprietà e soddisfano alla condizione espressa dalla* (1), *al variare di* w *in* B_X^*.

(3) Cioè, per ogni $\omega > 0$ esiste un compatto $Y_\omega \subseteq Y$ tale che $\mu(Y - Y_\omega) < \omega$ e le funzioni siano equicontinue in Y_ω.

(4) Con ciò intendiamo che per ogni $\omega > 0$ esiste un compatto $Y_\omega \subseteq Y$ [$X_\omega \subseteq X$] tale che $\mu(Y - Y_\omega) < \omega$ [$\mu'(X - X_\omega) < \omega$] e $T[T']$ sia continua in $(\mathcal{A}^*(Y_\omega)) \times B_X^* [A_Y^* \times (\mathcal{B}^*(X_\omega))]$. Si noti che, conformemente ad una notazione di cui si è già detto, $(\mathcal{A}^*(Y_\omega))$ $[(\mathcal{B}^*(X_\omega))]$ denota l'insieme delle funzioni appartenenti a $A_Y[B_X]$, a valori in $\mathcal{A}^*(Y_\omega)$ $[\mathcal{B}^*(X_\omega)]$ e costanti.

3) *L'insieme* $T((\mathcal{A}^*(Y)) \times B^*_X)$ *è quasi relativamente compatto in senso forte, rispetto a* μ (5), *e analogamente* $T'(\{v\} \times (\mathcal{B}^*(X)))$, *rispetto a* μ' (6), *per ogni* $v \in A^*_Y$.

Allora la trasformazione (T, T') *di* $A_Y \times B_X$ *in* $A_Y \times B_X$ *ha almeno un elemento unito.*

Il procedimento dimostrativo è quello seguito da Fiorenza; si utilizzano, in modo opportuno, le proposizioni stabilite dal citato Autore e che in esso intervengono, nonché il criterio di relativa compattezza cui si è accennato più sopra. È facile intuire che in tutto questo interverranno in modo particolare le proprietà che si riferiscono direttamente o non alle famiglie $\{A^*(y)\}_{y \in Y}$ e $\{B^*(x)\}_{x \in X}$, e che pertanto è superfluo esporre la dimostrazione senza i necessari dettagli. Ciò sarà fatto in un lavoro di prossima pubblicazione, in cui proveremo anche ogni asserzione fin qui espressa.

In applicazione del risultato stabilito, si ritrovano due teoremi di esistenza dimostrati da G. Santagati [3] (7), relativi ad altrettanti sistemi integrodifferenziali (di cui sono casi particolari i sistemi di equazioni alle derivate parziali del I ordine di Tricomi [4]) in ipotesi di Carathéodory. Anche di questo, nonché di eventuali altre applicazioni ed estensioni, ci occuperemo nel lavoro preannunciato.

BIBLIOGRAFIA

R. FIORENZA, *Sull'esistenza di elementi uniti per una classe di trasformazioni funzionali*, « Ricerche di Matematica », *15* (1966).

K. DEIMLING, *A Carathéodory theory for systems of integral equations*, « Annali di Matematica », (4) *86* (1970).

G. SANTAGATI, *Su alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali in ipotesi di Carathéodory*, « Annali di Matematica », (4) *67* (1965).

F. G. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Ediz. Cremonese, Roma (1957).

(5) Per la definizione ciò significa che per ogni $\omega > 0$ esiste un compatto $Y_\omega \subseteq Y$ tale che $\mu(Y - Y_\omega) < \omega$ e le funzioni di $T((\mathcal{A}^*(Y_\omega)) \times B^*_X)$ siano μ–quasi equicontinue. Si osservi che ha significato parlare di relativa compattezza in senso forte per l'insieme $T((\mathcal{A}^*(Y)) \times B^*_X)$, perché gli insiemi della famiglia corrispondente già soddisfano alle condizioni a) e b); peraltro notiamo che ciò che interessa ai fini della dimostrazione, è la proprietà di μ–quasi equicontinuità, analogamente del resto a quanto si verifica per il teorema di Fiorenza, in cui pure, l'ipotesi di relativa compattezza equivale a quella della equicontinuità delle funzioni dell'insieme cui essa è riferita.

(6) Va fatta un'osservazione analoga a quella contenuta nella Nota precedente; si osservi anche che nel teorema di Fiorenza $T'(\{v\} \times (B^*))$ è certo relativamente compatto.

(7) I teoremi (4.1) e (5.1).