Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fulvia Skof

Un criterio di completa additività per le funzioni aritmetiche riguardante successioni di densità irregolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.1, p. 10–13.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_10_0>

Teoria dei numeri. — *Un criterio di completa additività per le funzioni aritmetiche riguardante successioni di densità irregolare.* Nota di FULVIA SKOF, presentata (*) dal Corrisp. G. RICCI.

SUMMARY. — Let $f(n)$ be an additive number-theoretical function. A sufficient condition is given for complete additivity of $f(n)$: this condition, involving the behaviour of $\delta(n) = f(n+1) - f(n)$, requires $\delta(u) \to 0$ as $u \to +\infty$ throughout an increasing sequence of positive integers u, having "upper density" 1 (i.e. $\limsup (\Sigma 1 : u \leqq x)/x = 1$) and not necessarily "density" 1.

1. INTRODUZIONE. Sia $f(n)$ una funzione dell' intero naturale n ($n = 1, 2, 3, \cdots$). Essa si dice *additiva* se verifica la relazione

$$f(rs) = f(r) + f(s) \tag{1.1}$$

per ogni coppia di interi r, s primi fra loro (cioè $(r, s) = 1$); essa si dice *completamente additiva* se verifica (1.1) per qualunque coppia di interi r, s (cioè $(r, s) \geq 1$).

Recenti studi (vedere Bibliografia) sono stati rivolti a caratterizzare entro la classe delle funzioni additive quelle della forma standard $c \cdot \log n$ (c indipendente da n); tale caratterizzazione si raggiunge di solito attraverso una fase preliminare in cui si dimostra che le condizioni assegnate conducono alla completa additività.

Nella presente Nota viene stabilito un criterio di completa additività, che è più generale di un analogo criterio esposto in una precedente Nota [10] e di altri classici noti, e che si inserisce nell'ordine di idee espresso dalle seguenti due proposizioni:

TEOREMA (P. Erdös). – « *Se* $f(n)$ *è additiva e* $f(n+1) - f(n) \to 0$ *per* $n \to +\infty$, *allora esiste* c *tale che* $f(n) = c \log n$ ».

CONGETTURA (P. Erdös). – « Se $f(n)$ è additiva ed esiste una successione Z di interi z, crescente ed avente densità 1, tale che sia $f(z+1) - f(z) \to 0$ per $z \in Z$, $z \to +\infty$, allora esiste c tale che $f(n) = c \log n$ ».

La maggiore generalità proviene dal fatto che l'ipotesi sulla « densità » della successione viene sostituita da quella analoga, ma meno restrittiva, riguardante la « densità superiore » della successione stessa.

Richiamiamo le seguenti classiche definizioni:

Sia $\{a_n\}$ una successione crescente di numeri reali positivi $0 < a_1 < a_2 < \cdots \cdots < a_n < \cdots$, e denotiamo con $A(x)$ la sua « funzione enumeratrice », cioè

$$A(x) = \sum_{a_i \leqq x} 1 \qquad (0 \leq A(x) \leq x).$$

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1970.

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} A(x)/x = D$$

diremo che $\{a_n\}$ ha *densità* D ($0 \leq D \leq 1$); in ogni caso è

$$0 \leqq D_* = \liminf_{x \to +\infty} A(x)/x \leqq \limsup_{x \to +\infty} A(x)/x = D^* \leqq 1 .$$

Il numero D^* si dice *densità superiore* di $\{a_n\}$.

2. IL CRITERIO

TEOREMA. *Sia*

$$f : N_1 \to R \qquad (N_1 = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}),$$

$$\forall r, s \in N_1 \quad , \quad (r, s) = 1 \Rightarrow f(rs) = f(r) + f(s) .$$

Se esiste $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_h, \cdots\} \subseteq N_1$, $u_1 < u_2 < \cdots < u_h < \cdots$, *tale che per* $h \to +\infty$

$$\limsup h/u_h = 1 \quad , \quad f(u_h + 1) - f(u_h) \to 0 ,$$

allora

$$\forall r, s \in N_1 \quad , \quad (r, s) \geq 1 \Rightarrow f(rs) = f(r) + f(s) .$$

Per la dimostrazione, risulta utile premettere un semplice lemma (1).

Denotiamo con $Q(a, b)$ il seguente insieme di interi q

$$Q(a, b) = \{q : (ab, q) = 1 , (b, aq + 1) = 1\}. \tag{2.1}$$

L'insieme $Q(a, b)$ o è vuoto o è l'unione di un numero finito di progressioni aritmetiche di interi naturali, e in questo caso esso ha evidentemente densità positiva (2). Sussiste il seguente

LEMMA. *Siano* $a, b \in N_1$; $Q(a, b)$ *l'insieme di interi* q *definito in* (2.1). *Sia* $f(n)$ *una funzione aritmetica additiva.*

Se $Q(a, b)$ *non è vuoto, esso contiene infiniti numeri* q; *in questo caso poniamo*

$$\psi_f(q ; a, b) = \{f(aq + 1) - f(aq)\} - \{f(abq + b) - f(abq)\}. \tag{2.2}$$

Allora $\psi_f(q ; a, b)$ *risulta indipendente da* q, *ed è*

$$\psi_f(q ; a, b) = f(ab) - f(a) - f(b) . \tag{2.3}$$

Osservazioni. 1) Se un procedimento dimostrativo conduce a garantire

$$\psi_f(q ; a, b) \to L \quad \text{per} \quad q \in Q(a, b) \quad , \quad q \to +\infty ,$$

allora è necessariamente $L = f(ab) - f(a) - f(b) = \psi_f(q ; a, b)$ per ogni $q \in Q(a, b)$. 2) $f(n)$ risulta completamente additiva quando e soltanto quando $\psi_f(q ; a, b) = 0$ per ogni coppia a, b e per almeno un $q \in Q(a, b)$.

(1) Si veda [10].
(2) Si veda [10], n. 3.

Dimostrazione del Teorema. Sia p primo e $h \geq 1$. Poniamo $a = p^h$, $b = p$ e consideriamo la successione $Q(p^h, p)$ che contiene infiniti elementi q (anzi, si riconosce che la sua funzione enumeratrice è asintotica a $(1 - 1/p)x$). Per ogni $q \in Q(p^h, p)$ denotiamo con $G(q)$ l'insieme di $p+1$ interi g

$$G(q) = \{g : g = p^h \cdot q \ , \ g = p^{h+1} \cdot q + v \ ; \ v = 0, 1, 2, \cdots, p-1\}.$$

Denotiamo con U^c la successione degli interi naturali complementare di U, e ripartiamo $Q(p^h, p)$ nelle due classi:

$$Q'(p^h, p) = \{q' : G(q') \cap U^c = \varnothing\}$$

$$Q''(p^h, p) = \{q'' : G(q'') \cap U^c \neq \varnothing\}.$$

Proveremo che la successione $Q'(p^h, p)$ contiene infiniti elementi.

Detta $N(x)$ la funzione enumeratrice della successione U, si ha per ipotesi

$$\limsup_{x \to +\infty} N(x)/x = 1 .$$

Sia ξ_t $(t = 1, 2, 3, \cdots)$ una successione, contenuta in U, massimizzante, cioè per la quale

$$N(\xi_t)/\xi_t \to 1 \qquad \text{per} \quad t \to +\infty ;$$

allora si ha $N(\xi_t) = \xi_t (1 - \eta_t)$ con $\eta_t \to 0+$.

Consideriamo la coppia di intervalli contigui semiaperti inferiormente

$$(\varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t , (\xi_t - p)/p] \quad , \quad ((\xi_t - p)/p , \xi_t] ,$$

con $\varepsilon(\xi_t) \to 0$ per $t + \infty$.

Il numero $\nu(\xi_t)$ degli interi q tali che

$$G(q) \subseteq (\varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t , \xi_t]$$

risulta definitivamente

$$\nu(\xi_t) \geq c \cdot \xi_t \tag{2.4}$$

con $c = c(p, h) > 0$ indipendente da t. Infatti, per ogni q tale che

$$\varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t < p^h \cdot q \leq (\xi_t - p)/p$$

risulta evidentemente $G(q) \subseteq (\varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t , \xi_t]$; il numero di questi interi q è dato da

$$p^{-h} \{(\xi_t - p)/p - \varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t\} \cdot (1 - 1/p) \cdot (1 + o(1)) \sim \xi_t \cdot (1 - 1/p)/p^{h+1} .$$

D'altra parte, il numero $\nu''(\xi_t)$ degli interi q'' per i quali $G(q'') \subseteq (\varepsilon(\xi_t) \cdot \xi_t , \xi_t]$ verifica la relazione

$$\nu''(\xi_t) \leqq (p + 1) \cdot \{\xi_t - (1 - \eta_t)\, \xi_t\} = o(\xi_t) \tag{2.5}$$

con $\eta_t \to 0$ per $t \to +\infty$.

Pertanto il numero $\nu'(\xi_t)$ degli interi q' tali che $G(q') \subseteq (\xi_t \cdot \varepsilon(\xi_t), \xi_t]$ risulta, tenendo conto di (2.4) e di (2.5):

$$\nu'(\xi_t) = \nu(\xi_t) - \nu''(\xi_t) \sim \xi_t (1 - 1/p)/p^{h+1}$$

per $t \to +\infty$. Ne segue che la densità superiore della successione dei q' è positiva e pertanto l'insieme $Q'(p^h, p)$ contiene infiniti elementi.

Consideriamo la funzione $\psi_f(q'; p^h, p)$ definita in (2.2). Poiché $Q'(p^h, p)$ è contenuta in U, risulta

$$f(p^h \cdot q' + 1) - f(p^h \cdot q') \to 0$$

e anche

$$\begin{aligned} f(p^{h+1} \cdot q' + p) - f(p^{h+1} \cdot q') &= \\ = \sum_{v=0}^{p-1} \{f(p^{h+1} \cdot q' + v + 1) - f(p^{h+1} \cdot q' + v)\} &= \\ = p \cdot o(1) \to 0 \qquad \text{per} \quad q' \to +\infty; \end{aligned}$$

pertanto, per il lemma ricordato si ha

$$0 = \lim_{q' \to +\infty} \psi_f(q'; p^h, p) = f(p^{h+1}) - f(p^h) - f(p).$$

La validità di questa per ogni p, h conduce all'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. S. BESICOVITCH, *On additive functions of a positive integer*, in « Studies in Mathematical Analysis and related topics » (Essays in honor of G. Polya) Stanford Univ., 38–41, Stanford (1962).

[2] P. ERDÖS, *On the distribution function of additive functions*, « Ann. Math. », *47* (2), 1–20 (1946).

[3] P. ERDÖS, *On the distribution function of additive arithmetical functions and some related problems*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *27*, 45–49 (1958).

[4] A. MATÈ, *A new proof of a theorem of P. Erdös*, « Proc. A.M.S. », *18*, 159–162 (1967).

[5] L. MOSER e J. LAMBEK, *On monotone multiplicative functions*, « Proc. A.M.S. », *4*, 544–545 (1953).

[6] CH. PISOT e I. J. SCHOENBERG, *Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation*, « Illinois Math. J. », *8*, 40–56 (1964); *9*, 129–136 (1965).

[7] S. A. RENYI, *On a theorem of P. Erdös and its applications in information theory*, « Mathematica », 341–344, *1* (24) (1959).

[8] G. RICCI, *Funzioni aritmetiche additive e condizioni unilaterali*, « Per. di Matem. », 500–509, (4) *46* (1968).

[9] F. SKOF, *Criteri riguardanti le funzioni aritmetiche additive*, « Atti VIII Congresso U.M.I. » (Trieste 1967), 310–312,

[10] F. SKOF, *Criteri sufficienti di completa additività per le funzioni aritmetiche*, Tamburini, Milano (1969), 19 pp.