La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Valeria Giardino

Matematica e cognizione

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 397–415.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_397_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 397-415

Matematica e cognizione

Valeria Giardino

1. – Introduzione

In un certo senso si può dire che facciamo matematica da quando siamo bambini. Ovviamente avremo bisogno di tempo e della scuola per imparare per esempio a dividere tra loro numeri a più cifre (ammesso che lo si insegni ancora). Tuttavia è un fatto che, negli stessi anni in cui iniziamo a sperimentare l'uso delle parole per riferirci a ciò che abbiamo e che ci accade intorno, apprendiamo anche a contare o a distinguere – per esempio in un gioco a incastro – un pezzo di legno rosso a forma di triangolo da un altro blu a forma di quadrato (i colori diversi sono pensati da chi ha fabbricato il gioco per aiutarci).

Si può certamente obiettare che è sbagliato parlare già di matematica a questo livello più che elementare. Per conoscenza matematica dovrebbe intendersi qualcosa di ben più sofisticato, che ha a che fare con oggetti astratti che in qualche modo non sono di questo mondo, ed è il risultato di uno studio specialistico. Esattamente come il bambino che esplora il proprio ambiente, anche un adulto quando controlla che il resto in monete sia quello giusto, o calcola il percorso più breve su una mappa per arrivare a destinazione, non sta facendo in senso stretto matematica. È tuttavia più che lecito interessarsi a quali delle competenze che acquisiamo da bambini siano indispensabili per sviluppare poi la matematica 'in senso stretto' che viene fatta nei dipartimenti universitari, e al modo in cui esse emergano nella nostra interazione con l'ambiente. È possibile cioè andare alla ricerca delle basi cognitive della matematica che conosciamo.

La domanda sull'origine cognitiva della matematica ha animato molta della filosofia del passato, perché decisiva per la comprensione di come l'uomo si relaziona e conosce il mondo. Più di recente, le scienze cognitive si sono fatte carico di questi antichi interrogativi, andando alla ricerca dei fondamenti cognitivi della matematica negli animali (umani e non). Nella prima parte dell'articolo presenterò brevemente i risultati che le scienze cognitive hanno ottenuto negli ultimi anni sulle capacità di distinguere "numerosità" e forme: da dove provengono i nostri concetti di numero tre o di quadrato? Va detto che nessuna di queste domande viene sviluppata in una prospettiva storica. Le scienze cognitive si sono mosse finora in gran parte in un orizzonte scientifico in cui poco peso viene dato alle pratiche culturali. Una parte degli studiosi sembra ritenere che i fondamenti "cognitivi" delle nostre credenze e dei nostri valori siano determinati da un numero esiguo di sistemi, presenti nel nostro cervello e indipendenti l'uno dall'altro, in grado di adattarsi a contesti complessi e multiformi, sui quali si baserebbero nuove e più composite costruzioni come ad esempio i concetti [25]. Due di questi sistemi ci renderebbero capaci di distinguere gli insiemi e alcune loro relazioni numeriche (ordine, addizione, e sottrazione) e gli elementi all'interno di una struttura spaziale e le loro relazioni geometriche. Non è necessario assumere che questi sistemi siano "innati" o "a priori", ma è sufficiente riconoscere che, di fatto, si attivano in maniera del tutto spontanea nella nostra interazione con l'ambiente, poco importa quali siano le circostanze particolari, l'età degli individui (entro certi limiti), la loro appartenenza culturale e in alcuni casi persino la loro specie (questi sistemi sono almeno in parte comuni agli esseri umani e ad alcuni animali non umani).

Tuttavia, l'idea che si debba intendere la cognizione come "conoscenza di base" contrasta con un altro approccio alla cognizione che ha invece come obiettivo la considerazione non solo dell'aspetto biologico degli individui, della loro "natura", ma anche dell'influenza che la formazione, la loro "cultura", può avere e di fatto ha sullo sviluppo delle varie capacità cognitive. In questa prospettiva, l'attenzione è rivolta al modo in cui i processi storici e le conquiste culturali hanno modellato e modulato i sistemi d'interazione spontanei cui abbiamo accennato, conducendo all'introduzione di numerosi strumenti cognitivi e allo sviluppo della stessa scienza. A mio avviso, se l'obiettivo finale vuole essere determinare le basi cognitive di attività umane complesse come la matematica, l'elemento storico e culturale non può essere trascurato. In queste attività, una forma di ragionamento astratto si combina con l'utilizzo di un certo numero di sistemi di rappresentazione e di artefatti cognitivi molto sofisticati. Per questo motivo, nella seconda parte dell'articolo discuterò un'altra e non meno interessante domanda sul rapporto tra cognizione e matematica, e cioè in che modo persino nelle pratiche più formali che trattano di oggetti astratti possano quasi sorprendentemente tornare a giocare un ruolo competenze e capacità che sono centrali nell'interazione con il mondo di oggetti concreti, come la percezione o l'azione. Questo porterà anche a dedicare una maggiore attenzione agli artefatti materiali che vengono introdotti in matematica, e al modo in cui essi possono avere un'influenza sul ragionamento. Nella prospettiva in cui mi muovo, ritengo che la cognizione debba essere intesa come "distribuita": i processi cognitivi vanno compresi nei termini della propagazione e della trasformazione di rappresentazioni che sono pubbliche, ovvero che possono essere condivise, modificate e in certi casi persino abbandonate se non più efficaci. Trovo a questo proposito del tutto attendibile la tesi che sostiene che gli eventi cognitivi superino i confini fisici della superficie epidermica o della calotta cranica di un individuo, e possano essere considerati come distribuiti in almeno tre modi: (i) tra i membri di uno stesso gruppo sociale; (ii) nella coordinazione di una struttura interna e di una esterna, che può essere ricavata dall'ambiente circostante o costruita con un obiettivo specifico; (iii) nel tempo, in quanto i prodotti di eventi precedenti sono in grado di trasformare la natura degli eventi successivi [23].

2. – Le basi cognitive della matematica

Una delle domande centrali nelle scienze cognitive riguarda il modo in cui la conoscenza matematica emerge dalle nostre capacità percettive e il rapporto tra matematica e competenza linguistica. In questa prima parte dell'articolo presenterò brevemente una selezione dei risultati sperimentali più significativi che dimostrano come le capacità di distinguere numerosità e forme siano in qualche modo pre-programmate nel nostro cervello animale e si attivino nella nostra interazione con l'ambiente, senza che sia necessario attendere l'apporto del linguaggio o, più in generale, di altre pratiche culturali. (1)

2.1 – *Numerosità e aritmetica*

È possibile attribuire la capacità di riconoscere numerosità, termine che sta a indicare quantità più o meno precise, a diverse specie animali, alcune anche non direttamente nella nostra linea evolutiva. La definizione delle capacità numeriche animali fornirebbe indizi per la comprensione della natura e dell'origine di alcuni meccanismi cognitivi umani. Ad esempio, si è mostrato che pulcini appena nati sono già in grado di distinguere tra uno e tre oggetti, poiché mostrano una preferenza sistematica ad andare incontro a tre oggetti invece che a uno solo; il loro comportamento si spiegherebbe evolutivamente con il fatto che a un maggiore numero di pulcini corrisponde maggiore protezione dai predatori e maggiore calore [38]. In un esperimento ormai celebre condotto negli anni '50 del secolo scorso, è stato dimostrato che i corvi sono in grado di eseguire correttamente un compito aritmetico [26]. Gli sperimentatori sistemano davanti agli uccelli una carta con sopra disegnato un certo numero di pallini neri; i corvi devono quindi scegliere, tra varie scatole sul cui coperchio vi sono disegnati dei pallini neri, quella con il coperchio con il numero di pallini neri corrispondenti al numero di pallini sulla carta. Per dimostrare che i corvi basano la loro scelta sulla numerosità dei pallini e non sulla loro disposizione spaziale, sia la disposizione dei pallini sul coperchio che quella dei pallini sulla carta sono controllate e variate sistematicamente. I risultati mostrano che i corvi sono in grado di distinguere fino a 6 pallini. In esperimenti successivi si è visto che gli scimpanzé possono fare anche di più. Una volta addestrati, essi riescono persino a creare corrispondenze biuni-

(1) Parte di questa sezione è ripresa da una precedente pubblicazione [15]. Per una raccolta piuttosto esaustiva dei diversi studi empirici sulla cognizione matematica, si veda [1].

voche tra numerali arabi fino a 6 mostrati loro su una carta e il numero di oggetti che vedono apparire su uno schermo, per esempio matite o cucchiai [31]. Sia i corvi che gli scimpanzé sarebbero dunque in grado di distinguere numerosità. Inoltre i primati non umani saprebbero costruire corrispondenze biunivoche tra simboli che rappresentano numeri e gruppi di oggetti. Si noti tuttavia che il limite – 6 pallini o 6 elementi in un insieme – è il medesimo in entrambe le specie. Altri studi si sono occupati di valutare se gli animali siano in grado di tener traccia di numerosità anche quando esse siano date in modalità diverse da quella visiva [6]. In un esperimento, dei topi vengono addestrati a distinguere tra 2 o 4 suoni e tra 2 o 4 luci intermittenti: dopo 2 luci o 2 suoni, devono premere la leva a sinistra; dopo 4 luci o 4 suoni, quella a destra. Messi di fronte a un compito nuovo, nel quale appaiono due luci e immediatamente dopo seguono 2 suoni, i topi spontaneamente reagiscono premendo la leva a destra, mostrando in questo modo di mettere insieme come in un'addizione eventi discreti temporalmente contigui – le luci e i suoni – sebbene essi siano di natura diversa. Va detto tuttavia che in ciascuno di questi esperimenti gli animali vengono sottoposti a un lunghissimo addestramento, in alcuni casi durato dalla loro nascita al loro decesso, e ciononostante imparano a trattare solo con numeri molto piccoli. Per numeri oltre il 6, le loro risposte cessano di essere accurate.

Un'altra fonte interessante di evidenza scientifica sulla capacità di distinguere numerosità è rappresentata dai neonati, che ancora non usano il linguaggio e non sono condizionati in maniera significativa dalla cultura del proprio gruppo di appartenenza. Un esperimento ormai molto conosciuto dei primi anni '90 coinvolge bambini di 4 mesi e mezzo. Secondo l'interpretazione dell'autrice, questo esperimento dimostrerebbe che già a pochi mesi i neonati sono in grado di estrarre dall'ambiente informazioni sulle numerosità [48]. L'ingegnoso design dell'esperimento è il seguente. Un pupazzo viene spostato dal lato al centro di un piccolo palco posto davanti ai neonati. Quindi, uno schermo cala nascondendo il pupazzo alla vista dei neonati. Subito dopo un secondo pupazzo, identico al primo, viene mostrato ai neonati e poi posizionato dietro lo schermo. A questo punto, lo schermo viene sollevato, e le possibilità sono due: o i pupazzi sono due, oppure ce n'è uno solo. La previsione della sperimentatrice è che, se i neonati fossero in grado di tener traccia del numero degli oggetti che percepiscono, allora dovrebbero considerare il primo caso (in cui 1 giocattolo + 1 giocattolo fa 2 giocattoli) come meno sorprendente del secondo (in cui 1 giocattolo + 1 giocattolo fa 1 giocattolo). L'assunzione metodologica in esperimenti di questo genere aventi come soggetti neonati è che il tempo di fissazione dello sguardo sia indicativo del loro stupore: più osservano la scena, più mostrano di essere sorpresi da quello che vedono, perché esso vìola le loro aspettative. I risultati mostrano che in effetti i neonati guardano sistematicamente più a lungo il risultato scorretto ($1 + 1 = 1$) rispetto a quello corretto ($1 + 1 = 2$), indipendentemente da altri cambiamenti nell'oggetto in altre proprietà di controllo, come la loro forma o il loro colore. Un esperimento più recente, con soggetti più grandi tra i 10 e i 12 mesi, ha cercato di valutare se bambini così piccoli siano in grado di effettuare operazioni aritmetiche elementari [12]. Gli sperimentatori mostrano ai bambini due contenitori vuoti e iniziano poi a riempirli di biscotti, senza mai superare un massimo di 6 biscotti per contenitore. Ovviamente i contenitori sono opachi, e di conseguenza i bambini non possono vedere dal di fuori se essi contengano biscotti e in quale quantità. Inoltre, i contenitori non vengono riempiti nello stesso ordine e si alterna quale dei due – a sinistra o a destra – contenga più biscotti, in modo che l'unica variabile mantenuta costante sia il numero dei biscotti. I risultati dell'esperimento indicano che i bambini sono capaci di scegliere il contenitore che contiene il maggior numero di biscotti, a meno che i biscotti in ciascun contenitore non siano più di 4. Di nuovo, troviamo un numero limite vicino a quello già discusso per gli animali. Gli sperimentatori mettono in evidenza che i loro risultati darebbero torto a Piaget e alla sua ricostruzione dello sviluppo delle capacità aritmetiche nei bambini [36]. Secondo Piaget, queste capacità si sviluppano tardi, poiché dipendono da altre capacità logiche che appaiono precedentemente, come ad esempio quella di costruire corrispondenze biunivoche. Tuttavia il comportamento dei bambini coinvolti nell'esperimento farebbe credere che essi siano in qualche modo già in grado di comprendere relazioni numeriche, poiché hanno specifiche aspettative rispetto all'aritmetica degli oggetti che li circondano. (2)

In anni recenti, due popolazioni aborigene della foresta dell'Amazzonia – i Pirahã e i Munduruku – sono state protagoniste della ricerca in antropologia cognitiva [17, 37]. La lingua di entrambe queste popolazioni prevede poche parole per indicare numeri: i Pirahã possiedono parole precise solo per i numeri 1 e 2, mentre si riferiscono a 3 e 4 in maniera più irregolare; i Munduruku usano invece con coerenza le parole per i numeri 1, 2 e 3, ma non sono coerenti quando parlano di quantità corrispondenti a 4 e 5. Gli esperimenti effettuati hanno tuttavia dimostrato che nonostante i membri delle due popolazioni possiedano un numero di parole limitato a confronto con i nostri numerali, sono invece del tutto in grado di confrontare e addizionare – in maniera non precisa ma approssimata – numeri più grandi che superano le quantità per cui possiedono parole. Nei due test cosiddetti della distanza e della grandezza – presentati con stimoli non simbolici come ad esempio insiemi di punti – Pirahã e Munduruku si comportano in maniera del tutto simile a quella dei soggetti di controllo occidentali. È stato infatti dimostrato che indicare il più grande tra due numeri o tra due insiemi di oggetti – sia che vengano usati stimoli simbolici che non-simbolici – è più veloce e più accurato quando i due numeri o la dimensione dei due insiemi sono molto lontani fra loro. Ci si riferisce comunemente a questo effetto come all'"effetto distanza" (*distance effect*). Inoltre, il tempo impiegato per indicare il più grande

(2) Posso qui solo accennare a una preoccupazione riguardante l'interpretazione di questi risultati: nell'esperimento con i pupazzi, la sperimentatrice è davvero sicura di sapere che cosa i neonati guardano più a lungo e trovano quindi sorprendente? Altre interpretazioni di là dalle aspettative aritmetiche sono possibili. I neonati potrebbero essere interessati a proprietà extra numeriche: per esempio, potrebbero avere maggiore familiarità con alcuni oggetti piuttosto che con altri, oppure potrebbero essere incuriositi da altre loro proprietà, come la loro posizione sul palco, la superficie totale che coprono, il volume che occupano e così via dicendo. Alcuni critici dell'esperimento hanno proposto un modello alternativo alla numerosità basato sulla rappresentazione che i neonati mostrerebbero di possedere degli oggetti reali che vengono loro presentati. Si vedano per esempio [45] e [3].

tra due numeri o due insiemi dipende anche dalla grandezza del numero o dalla dimensione dell'insieme. Si parla in questo caso di "effetto grandezza" (*size effect*) [2]. Questa circostanza suggerisce che i processi cognitivi che sottendono le manipolazioni numeriche – non simboliche – eseguite dai membri di queste popolazioni siano equivalenti a quelli di altre popolazioni dotate di lingue più ricche, perlomeno per quanto riguarda i termini introdotti per indicare numeri. Di conseguenza, lo studio del comportamento di queste popolazioni dimostrerebbe che gli esseri umani alfabetizzati condividono con quelli illetterati – e in parte, come abbiamo visto, con gli animali non umani e i bambini prescolari – una rappresentazione delle quantità numeriche che risulta essere indipendente dalle loro capacità linguistiche.

2.2 – *Forme e geometria*

Un altro oggetto di studio delle scienze cognitive è la capacità di riconoscere forme nell'ambiente, che è alla base della nostra competenza geometrica. L'esperimento sugli animali considerato forse il più significativo è quello che dimostra che i topi si basano su indizi di carattere geometrico – come ad esempio la forma della stanza – per orientarsi e ritrovare del cibo [5]. In un primo momento, gli animali vengono abituati a scoprire del cibo sempre in un medesimo angolo di una stanza rettangolare; in seguito, quando il cibo viene nascosto altrove all'interno della stanza, i topi mostrano di andare a cercarlo nell'angolo dove erano stati abituati a ritrovarlo, oppure nel suo equivalente geometrico (un errore che viene chiamato *errore rotazionale*). I topi scelgono i due angoli appropriati perché sono in grado di riconoscere alcune proprietà metriche dell'ambiente (in questo caso, la lunghezza relativa dei muri) e distinguono la destra dalla sinistra. Esperimenti successivi hanno ritrovato le stesse capacità anche in altre specie, per esempio nelle galline [46], in alcuni pesci [42], e più recentemente nei calabroni [43]. Tuttavia, dal fatto che le capacità cognitive degli animali si siano adattate all'ambiente in modo da permetterne una migliore e più efficace navigazione non si può concludere che i topi o altri animali posseggano abilità spaziali sofisticate: il loro comportamento ci indica che sono certamente in grado di utilizzare elementi geometrici come indizi per navigare lo spazio – e lo fanno in maniera sistematica e coerente – ma questo può semplicemente dipendere dalla loro capacità di riconoscere invarianze percettive in un ambiente che hanno in precedenza già esplorato.

L'esperimento è stato replicato con bambini tra i 18 e i 24 mesi che, in maniera del tutto analoga ai topi, utilizzano indizi geometrici per cercare un giocattolo che è stato nascosto in una stanza rettangolare, anche quando abbiano a disposizione non solo informazioni di carattere geometrico. I bambini vedono che gli sperimentatori nascondono un oggetto in un angolo della stanza e poi vengono disorientati. Devono riorientarsi basandosi sulla forma della stanza e in certi casi anche utilizzando specifici indizi non geometrici, come il colore di uno dei muri. Diversamente dagli adulti, i bambini fino a 2 anni si orientano solo facendo riferimento alla geometria della stanza, e cadono per questo nel consueto errore rotazionale [19, 20]. Bambini più grandi, tra i 5 e i 7 anni, mostrano invece di acquisire gradualmente un comportamento che si adatta maggiormente alle caratteristiche dell'ambiente, e di fare sempre maggiore attenzione per orientarsi non solo alle relazioni geometriche ma anche a punti di riferimento di altro genere [21]. Questi risultati indicherebbero che i bambini crescendo imparano a basarsi su più di un tipo d'informazione, guardando alla geometria della stanza come anche ad altre caratteristiche dei suoi elementi, cosa che continueranno poi a fare da adulti; tuttavia, è curioso notare che, prima di sviluppare un'attenzione ad altre proprietà, sembrano comportarsi esattamente come diversi animali non umani.

In anni più recenti, alcuni nuovi studi si sono occupati di valutare le capacità geometriche dei Munduruku, per definire l'apporto del linguaggio. In una prima prova, l'obiettivo è stato valutare la comprensione intuitiva da parte dei membri di questa popolazione dei concetti di base della geometria: punti, linee, parallelismi, figure, congruenze e simmetrie. Per ciascuno di questi concetti, vengono loro mostrati sullo schermo di un computer sei oggetti che esemplificano tutti – fatta eccezione di uno – il concetto in questione. Viene poi loro domandato di indicare quale – tra i sei che vedono sullo schermo – sia l'oggetto "strano", o "brutto" [8] . I risultati ci dicono che i Munduruku adulti – che appartengono dunque a questa cultura isolata e non hanno frequentato la scuola – non hanno alcun problema con i concetti fondamentali concernenti la topologia, la geometria euclidea, e le figure geometriche di base, ma iniziano ad avere difficoltà nel riconoscere simmetrie e proprietà metriche, sebbene riescano ancora a rispondere al compito. Sono invece del tutto incapaci di comprendere numerose trasformazioni geometriche, nelle quali si richiede di immaginare di manipolare mentalmente una forma per ottenerne un'altra, e poi di riflettere sulla natura di questo cambiamento. Ritroviamo il medesimo pattern nelle risposte date dai bambini Munduruku – che ora frequentano la scuola e parlano portoghese – nonché dai bambini statunitensi di controllo: tutti questi soggetti sono in grado di estrarre invarianti geometrici genuini dalle forme degli oggetti che vengono loro mostrati, ma alcune manipolazioni più complesse sono loro precluse. La capacità di riconoscere invarianti sembra dunque analoga a quella di distinguere tra numerosità diverse; inoltre, gli sperimentatori sottolineano come anche qui i risultati sembrino andare ancora una volta contro Piaget, che nella sua teoria sosteneva che nello sviluppo del bambino si procedesse dalla topologia alla geometria proiettiva arrivando solo alla fine alla geometria euclidea [35]. Tuttavia, essere in grado di estrarre invarianze non sembra ancora implicare che queste invarianze possano poi essere usate per rappresentare simbolicamente lo spazio circostante, come accade quando si costruisce o si utilizza una mappa. Con un nuovo esperimento, gli antropologi hanno messo nuovamente alla prova i Munduruku, valutando la loro capacità di applicare la conoscenza geometrica "astratta" che hanno mostrato di possedere trasferendola dalla percezione a un contesto del tutto nuovo. (3) Ai Munduruku viene chiesto di risolvere un problema basandosi su una mappa. Il design dell'esperimento prevede tre contenitori, in uno dei quali vi è un oggetto nascosto. Ai partecipanti viene data una mappa sulla quale è rappresentata la disposizione dei contenitori. Una

(3) Mi adeguo qui ai termini introdotti dagli sperimentatori, ma trovo in realtà inappropriato parlare di conoscenza geometrica "astratta" già al livello del riconoscimento di invarianti geometrici. Altrove, ho sviluppato maggiormente questo punto [15].

stella indica il contenitore che nasconde l'oggetto. Anche qui, come per l'esperimento precedente, le risposte di adulti e bambini Munduruku coincidono con quelle dei bambini statunitensi, mentre gli adulti statunitensi rispondono significativamente meglio. In ogni modo, secondo gli sperimentatori, il fatto che i Munduruku comprendano spontaneamente e intuitivamente concetti geometrici e mappe può farci concludere che un sistema di conoscenze geometriche di base, come quello per l'aritmetica elementare, è un costituente universale della mente umana. Sono tuttavia necessarie analisi maggiormente dettagliate per decidere quanto lo sviluppo di queste competenze geometriche proceda per gradi, e quale peso debba essere realmente dato all'acquisizione del linguaggio, in modo da valutare con maggiore esattezza quale sia qui il rapporto tra natura e cultura [34].

3. – La matematica incorporata

In questa seconda parte dell'articolo, vorrei suggerire alcuni temi di ricerca riguardanti il rapporto tra matematica e cognizione anche nel caso della matematica più sofisticata. Secondo una certa filosofia, la matematica "in senso stretto" – come ho detto nell'introduzione – va intesa come scienza astratta, che si interessa a oggetti che non hanno niente a che vedere con gli oggetti di questo mondo con cui interagiamo ogni giorno (lascio volontariamente da parte la questione dell'"irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali" [47]). Secondo le varie posizioni teoriche, gli oggetti matematici assumono nature diverse: per esempio possono avere piena realtà al di fuori dello spazio e del tempo o ridursi a semplici relazioni o *patterns*.

Alcuni studi sembrano tuttavia mettere in dubbio l'esistenza di un confine così netto tra conoscenza astratta e familiarità con il mondo concreto. Sembrerebbe cioè che anche nel confronto con gli oggetti astratti vengano recuperate alcune competenze e capacità tipiche del nostro rapportarci al mondo. L'idea di considerare la matematica come "incorporata" (*embodied*) si basa infatti sull'assunzione che esistano dimensioni del pensiero matematico tipicamente e volutamente prive di definizione formale o di dimostrazione che non vengono però poi incluse nelle pubblicazioni ufficiali e nei manuali. Queste dimensioni del pensiero si baserebbero su *metafore concettuali* – e persino percettive – e su considerazioni concernenti il tempo e il movimento, entrambi elementi tradizionalmente esclusi dall'immagine filosofica della matematica cui ho accennato, per la quale gli oggetti matematici sono atemporali e statici. (4) Inoltre, questi elementi sarebbero rilevanti per la comprensione e per la spiegazione matematica, nonché per render conto della stessa genesi di certi concetti matematici. Recentemente alcuni filosofi si sono interrogati su quali aspetti relativi all'uso del corpo o del movimento o di artefatti cognitivi potrebbero essere rilevanti per una filosofia della pratica della matematica. (5) Per ragioni di spazio, potrò qui trattare solo la tesi di Lakoff e Núñez [29], secondo la quale i concetti matematici astratti affondano le loro radici in attività "incorporate", ovvero nel nostro modo di pensare il mondo e di descriverlo. Il loro lavoro ha avuto grande risonanza nella letteratura e, a quanto mi risulta, costituisce fino ad ora l'unico tentativo di fornire un quadro generale della matematica come "incorporata" che comprenda sia le competenze che abbiamo visto nella sezione precedente sia quelle coinvolte nella matematica più avanzata. Cercherò anche di rilevare i limiti di questa ricerca, ponendo l'accento sulla possibilità di un'integrazione tra indagine psicologico-cognitiva e analisi storico-cognitiva. Nell'ultimo paragrafo, presenterò brevemente alcune linee di ricerca sul ruolo del tempo e del movimento nella comprensione matematica, nell'utilizzo di gesti e di artefatti cognitivi materiali.

3.1 – *Metafore concettuali e storia cognitiva*

Come accennato sopra, il libro di Lakoff e Núñez sulle basi cognitive della matematica è in un certo senso un caso unico, poiché in esso i due autori, oltre a trattare di aritmetica e geometria elementare, si spingono oltre le domande sui fondamenti cognitivi delle nostre competenze di

(4) Alcuni matematici hanno suggerito immagini non convenzionali della matematica. Si vedano i saggi contenuti nella raccolta curata da Hersh [22] o un interessante articolo su dimostrazione e progresso in matematica del topologo Thurston [44].

(5) Si vedano per esempio [14], [18], [30], e [9].

base, interrogandosi su quali delle nostre attività cognitive, dalla percezione degli oggetti a quella del movimento, diano forma alle aree più avanzate di questa disciplina. Non si può negare che l'aritmetica e la geometria elementare siano due campi d'indagine molto importanti per il rapporto tra cognizione e matematica, poiché si tratta di pratiche molto stabili che non sembrano aver subìto cambiamenti radicali attraverso diversi contesti storici e culturali. Tuttavia questo non rende meno legittima una domanda ulteriore sul modo in cui la nostra percezione e più in generale la nostra interazione con l'ambiente possa avere un'influenza anche su pratiche matematiche più sofisticate.

In conformità a lavori precedenti in filosofia del linguaggio [28], nel libro si sostiene che i concetti astratti delle scienze, alla stregua di quelli della vita di ogni giorno, possono essere pensati in termini di metafore. La metafora sarebbe fondamentale anche per comprendere la matematica. In effetti, il linguaggio della matematica è ricco di termini che sono ripresi dal nostro rapporto con il mondo reale: i numeri naturali "crescono" all'infinito, i punti "giacciono" su una linea, una funzione "si muove" verso lo zero. Le metafore concettuali e l'integrazione (*blending*) concettuale, che ci permette di collegare tra loro domini diversi attraverso la metafora per ottenerne un terzo che è proiezione di entrambi, costituirebbero il meccanismo cognitivo principale usato per concettualizzare gli oggetti matematici. Il fondamento delle metafore concettuali è l'esperienza corporea; esse preservano le inferenze e permettono di creare mappature comuni utilizzabili in domini diversi ([29], p. 6): non si tratta qui di un fenomeno semplicemente linguistico, ma di un elemento cruciale del pensiero. Il libro offre diverse piste per interpretare alcune inferenze matematiche e alcuni processi di ragionamento coinvolti nello sviluppo della matematica: la matematica è incorporata perché in ultima istanza è possibile comprenderla e spiegarla facendo riferimento a meccanismi cognitivi incorporati, dei quali la metafora concettuale è quello centrale.

Alcuni filosofi, pur apprezzando positivamente il tentativo di Lakoff e Núñez, ne hanno criticato la mancanza di prospettiva storica. Schlimm ad esempio si è focalizzato in un recente articolo sul loro utilizzo della metafora concettuale del "contenitore" per render conto del concetto matematico di insieme [40]. È vero che molti autori non esitano a scrivere che gli insiemi "contengono" i loro elementi, ed è vero anche molti studenti pensano agli insiemi in questo modo. Lo stesso utilizzo della parola "elemento" suggerisce questa lettura, come mostrato d'altronde dai diagrammi di Venn. Per Lakoff e Núñez, la metafora concettuale implicita in questo contesto è la seguente: *gli insiemi sono lo schema di un contenitore* (*container-schemas*). Schlimm fa notare tuttavia che questa interpretazione si basa sulla considerazione della matematica dei manuali, mentre una maggiore attenzione allo sviluppo storico dell'idea d'insieme, per esempio in Cantor, mostrerebbe che solo un'indagine molto più dettagliata può fornire un'analisi "cognitivo-storica", alla stregua di quello che è stato già fatto per la filosofia della scienza per esempio da Nersessian [32].

Un esempio molto interessante in questo senso è lo studio di Netz sulla deduzione nella geometria greca [33]. Come spiega lo stesso autore, il suo lavoro vuole confrontarsi con due punti di riferimento: Kuhn [27] e Fodor [13]. Kuhn ha sbagliato a ritenere che il compito dello storico sia di articolare i singoli enunciati considerati, in maniera più o meno esplicita, veri dagli scienziati, perché il reale oggetto di studio sono piuttosto le *pratiche* che contraddistinguono una scienza. Fodor ha invece messo in guardia sul fatto che più un processo cognitivo è globale, meno è possibile comprenderlo; ma questo non accade se se ne si fa una "storia cognitiva", propone Netz. La storia cognitiva si situa nell'intersezione tra storia della scienza e scienze cognitive, e il suo oggetto di studio sono gli artefatti cognitivi. Come le scienze cognitive, non si occupa di contenuti proposizionali ma guarda alla scienza attraverso le sue forme e le sue pratiche; sebbene dunque non sia possibile fornire regole generali e universali per il ragionamento matematico, è possibile farlo *storicamente*, guardando a contesti specifici. Nel caso della matematica greca, uno strumento e una pratica fondamentale da analizzare risulta essere l'uso del diagramma.

3.2 – *Rappresentazioni in movimento*

Per concludere, considererò in quest'ultimo paragrafo alcune pratiche matematiche specifiche nella prospettiva della matematica incorporata. Schiralli e Sinclair hanno ripreso le idee di Lakoff e Núñez e proposto di distinguere tra una matematica *concettuale* e una matematica *ideazionale*: la prima si riferisce alle radici concettuali della matematica formale e scritta, riportata nei manuali e negli articoli di ricerca; la seconda invece alle radici concettuali proprie dei singoli matematici, che nella comprensione della matematica non mancano di riferirsi anche a tempo e movimento [39]. In un articolo più recente, Sinclair e Gol Tabaghi sostengono che non solo a fini pedagogici, ma anche e in maniera più decisiva per definire la comprensione matematica in generale, sia necessario analizzare nei dettagli l'utilizzo da parte dei matematici di numerose rappresentazioni dalla natura eterogenea: il discorso parlato, i gesti, i diagrammi [41]. Con quest'obiettivo, hanno intervistato sei matematici chiedendo loro di fornire il significato del concetto matematico di "autovettore" (*eigenvector*). L'intervista è stata filmata, in modo da poter valutare il loro modo "incorporato" di ragionare. Un manuale offre una definizione formale di autovettore; tuttavia un matematico, per spiegare cos'è un autovettore, non ripete la definizione formale ma ne offre diverse rappresentazioni, passando senza alcuna difficoltà da una all'altra e travalicando in questo modo i presunti confini tra mondo matematico e mondo fisico. I sei matematici intervistati vengono da diverse aree disciplinari, pure e applicate, dalla teoria dei numeri alla matematica discreta applicata. Ciascuno di essi, nonostante la definizione formale di autovettore "da manuale" sia singola, atemporale e statica, dà, sia nelle parole sia nei gesti, una descrizione dell'autovettore che allude a una maniera molto diversa di comprenderlo, che include anche elementi temporali e cinestetici. Ritornano le metafore: alcuni matematici si concentrano sulle trasformazioni dei vettori in una moltiplicazione di matrici: "si restringono", "ruotano", "si piegano", ecc.; altri descrivono la "personalità" che li caratterizza: "vanno nella stessa direzione", "si allineano", ecc. In breve, nessuno dei matematici parla di autovettori solo nei termini di uguaglianze algebriche. Tutte le metafore identificate contengono una componente di movimento, ma ve ne sono anche di percettive: uno dei matematici dice di pensare alla funzione quadratica come a un "bicchiere". Inoltre, provenendo da aree disciplinari diverse, la variabilità nei loro gesti e nelle loro immagini mentali sembra derivare dalle loro rispettive esperienze e formazioni. La conclusione degli autori è che i gesti darebbero maggiori possibilità di espressione del semplice discorso parlato per esprimere continuità, tempo e movimento. Questo sembrerebbe dare ragione al matematico francese Châtelet, che vedeva in un diagramma matematico la "cristallizzazione" di un gesto [4]. Ricordiamo a questo proposito che uno dei campi attualmente più attivi nelle scienze cognitive è proprio lo studio del ruolo del gesto nella comunicazione, nel confronto con il discorso parlato [16] .

Si è detto che tempo e movimento sono dimensioni del pensiero tipicamente assenti in una definizione formale. Recentemente mi sono interessata, in collaborazione con Silvia De Toffoli, alla pratica di dimostrazione in topologia, in particolare in teoria dei nodi e in topologia in basse dimensioni [10, 11]. Molta indagine filosofica sul ruolo delle figure in matematica si è concentrata sulla geometria euclidea, confermando una certa preferenza per lo studio di una pratica che in effetti non ha subìto grosse variazioni in migliaia di anni. La topologia, per quanto molto più recente come disciplina, sembra però essere ancora più vicina alla nostra esperienza con e nello spazio. Come spiega Jones, medaglia Fields nel 1990, la topologia in basse dimensioni è per esempio un'area molto speciale della matematica perché in essa è possibile riferirsi pienamente alle nostre intuizioni dello spazio tridimensionale, che contano qui anche come giustificazione [24]. La nostra analisi mostra come molte delle visualizzazioni utilizzate in topologia sembrerebbero inoltre avere un intrinseco carattere cinestetico, perché è necessario immaginarne trasformazioni e movimenti. In questo senso la topologia, non solo quella in basse dimensioni, sembra essere tra i candidati ideali per parlare di matematica incorporata.

Concludo con un ultimo breve riferimento a un altro aspetto della matematica pensata come incorporata che potrebbe alimentare la ricerca filosofica. La visione della matematica come scienza astratta cui abbiamo accennato andrebbe anche contro l'idea che per fare matematica ci sia necessariamente bisogno di un supporto materiale. Tuttavia, in analogia con altre scienze, è possibile al contrario pensare che anche in matematica l'introduzione di artefatti e strumenti sia cruciale, e che essi evolvano anche sulla base della loro "fruibilità" cognitiva, tanto da poter persino essere abbandonati una volta che se ne siano scoperti i limiti. In quest'ottica, anche gli artefatti introdotti in aritmetica e in geometria, come i numeri arabi o le figure della geometria euclidea, sono in linea di principio modificabili, sebbene si siano dimostrati molto convenienti e per questo non siano stati finora rimpiazzati. Un campo ancora tutto da esplorare riguarda il ruolo della notazione in matematica. Come sostiene Colyvan in una recente introduzione alla filosofia della matematica, la scelta di una specifica notazione può avere delle conseguenze sulla scoperta di nuovi oggetti di studio e di nuove aree di ricerca [7]. Inoltre, ogni notazione ha un apporto cognitivo diverso, e la preferenza di una notazione su un'altra può dipendere anche dalla valutazione di quanto essa sia in grado di farci risparmiare costi cognitivi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Campbell, J. (a cura di) (2005), *Handbook of mathematical cognition*, Psychology Press, New York.

[2] Cappelletti, M. e Giardino, V. (2007), 'The cognitive basis of mathematical knowledge', in M. Leng, A. Paseau e M. Potter (a cura di), *Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, pp. 73-83.

[3] Carey, S. (2009), 'Where our number concepts come from', *Journal of Philosophy*, vol. 106, pp. 220-54.

[4] Châtelet, G. (1993), *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, Collection des Travayx, Edition du Seuil, Paris.

[5] Cheng, K. (1986), 'A purely geometric module in the rat's spatial representation', *Cognition*, vol. 23, pp. 149-78.

[6] Church, R.M. e Meck, W.H. (1984), 'The numerical attribute of stimuli', in H.L. Roitblat, T.G. Bover e H.S. Terrace (a cura di), *Animal Cognition*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale (NJ), pp. 445-64.

[7] Colyvan, M. (2012), *An Introduction to the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. e Spelke, E.S. (2006), 'Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group', *Science*, vol. 311, pp. 381-84.

[9] De Cruz, H. e De Smedt, J. (2013), 'Mathematical symbols as epistemic actions', *Synthese*, vol. 190, pp. 3-19.

[10] De Toffoli, S. e Giardino, V. (2014), 'Forms and roles of diagrams in knot theory', *Erkenntnis*, vol. 79, pp. 829-42.

[11] De Toffoli, S. e Giardino, V. (2015), 'An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology', in G. Lolli, M. Panza e G. Venturi (a cura di), *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics (Boston Studies in the Philosophy and History of Science, Vol. 308)*, Springer, Berlin, pp. 315-36.

[12] Feigenson, L., Carey, S. e Hauser, M. (2002), 'The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes', *Psychological Science*, vol. 13, pp. 150-56.

[13] FODOR, J. (1983), *The modularity of mind: An essay on faculty psychology*, MIT Press, Cambridge (MA).
[14] GIAQUINTO, M. (2007), *Visual thinking in mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
[15] GIARDINO, V. (di prossima pubblicazione), 'I fondamenti cognitivi della matematica umana: dove cercarli?', in P. Graziani, G. Grimaldi e M. Sangoi (a cura di), *Animali Razionali. Studi sui confini e sulle possibilità della razionalità*, numero speciale di *Isonomia – Epistemologica*.
[16] GOLDIN-MEADOW, S. (2003), *Hearing gesture: How our hands help us think*, Belknap Press, Cambridge (MA).
[17] GORDON, P. (2004), 'Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia', *Science*, vol. 306, pp. 496-99.
[18] GROSHOLZ, E. (2007), *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences*, Oxford University Press, Oxford.
[19] HERMER, L. e SPELKE, E.S. (1994), 'A geometric process for spatial reorientation in young children', *Nature*, vol. 370, pp. 57-59.
[20] HERMER, L. e SPELKE, E.S. (1996), 'Modularity and development: The case of spatial reorientation', *Cognition*, vol. 61, pp. 195-232.
[21] HERMER-VAZQUEZ, L., MOFFET, A. e MUNKHOLM, P. (2001), 'Language, space, and the development of cognitive flexibility in humans: The case of two spatial memory tasks', *Cognition*, vol. 79, pp. 263-99.
[22] HERSH, R. (a cura di) (2006), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Springer, Berlin.
[23] HUTCHINS, E. (2001), 'Distributed cognition', in N. J. Smelser e P. B. Baltes (a cura di), *The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences*, Elsevier, Amsterdam, pp. 2068-72.
[24] JONES, V. F. R. (1998), 'A credo of sorts', in G. Dales e G. Oliveri (a cura di), *Truth in mathematics*, Oxford University Press, Oxford, pp. 203-14.
[25] KINZLER, K.D. e SPELKE, E.S. (2007), 'Core systems in human cognition', *Progress in Brain Research*, vol. 164, pp. 257-64.
[26] KÖHLER, O. (1951), 'The ability of birds to count', *Bulletin of Animal Behaviour*, vol. 9, pp. 41-45.
[27] KUHN, T. (1962), *The structure of scientific revolutions*, University of Chicago Press, Chicago.
[28] LAKOFF, G. e JOHNSON, M. (1980), *Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago.
[29] LAKOFF, G. e NÚÑEZ, R. (2000), *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*, Basic Books, New York.
[30] MACBETH, D. (2012), 'Seeing how it goes: Paper-and-pencil reasoning in mathematical practice', *Philosophia Mathematica*, vol. 20, pp. 58-85.
[31] MATSUZAWA, T. (1985), 'Use of numbers by a chimpanzee', *Nature*, vol. 315, pp. 57-59.
[32] NERSESSIAN, N.J. (2008), *Creating scientific concepts*, MIT Press, Cambridge (MA).
[33] NETZ, R. (1999), *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study of cognitive history*, Cambridge University Press, Cambridge.
[34] NEWCOMBE, N.S. e UTTAL, D.H. (2006), 'Whorf versus Socrates, round 10', *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 10, pp. 394-96.
[35] PIAGET, J. (1948/1960), *The child's conception of geometry*, Routledge and Kegan Paul, London.
[36] PIAGET, J. (1952), *The child's conception of number*, Routledge and Kegan Paul, London.
[37] PICA, P., LEMER, C., IZARD, V. e DEHAENE, S. (2004), 'Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group', *Science*, vol. 306, pp. 499-503.

[38] RUGANI, R., KELLY, D. M., SZELEST, I., REGOLIN, L. e VALLORTIGARA, G. (2010), 'Is it only humans that count from left to right?', *Biology Letters*, vol. 6, pp. 290-92.

[39] SCHIRALLI, M. e SINCLAIR, N. (2003), 'A constructive response to where mathematics comes from', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 52, pp. 79-91.

[40] SCHLIMM, D. (2013), 'Mathematical practice and conceptual metaphors: On cognitive studies of historical developments in mathematics', *Topics in Cognitive Science*, vol. 5, pp. 283-98.

[41] SINCLAIR, N. e GOL TABAGHI, S. (2010), 'Drawing space: mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors', *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74, pp. 223-40.

[42] SOVRANO, V. A., BISAZZA, A. e VALLORTIGARA, G. (2003), 'Modularity as a fish views it: Conjoining geometric and nongeometric information for spatial reorientation', *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, vol. 29, pp. 199-210.

[43] SOVRANO, V. A., POTRICH, D., VALLORTIGARA, G. (2013), 'Learning of geometry and features in bumblebees (Bombus terrestris)', *Journal of Comparative Psychology*, vol. 3, pp. 312-18.

[44] THURSTON, W. (1994), 'On proof and progress in mathematics', *Bullettin of the American Mathematical Society*, vol. 30, pp. 161-77.

[45] ULLER, C., CAREY, S., HUNTLEY-FENNER, G. e KLATT, L. (1999), 'What representations might underlie infant numerical knowledge', *Cognitive Development*, vol. 14, pp. 1-36.

[46] VALLORTIGARA, G., ZANFORLIN, M. e PASTI, G. (1990), 'Geometric modules in animal's spatial representation: A test with chicks', *Journal of Comparative Psychology*, vol. 104, pp. 248-54.

[47] WIGNER, E. P. (1960), 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, pp. 1-14.

[48] WYNN, K. (1992), 'Addition and subtraction by human infants', *Nature*, vol. 358, pp. 749-50.

Valeria Giardino
Institut Jean Nicod, CNRS – EHESS – ENS (Paris)
Département d'Etudes Cognitives, Ecole Normale Supérieure (Paris)
e-mail: valeria.giardino@gmail.com