Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti in Napoli

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Margherita Guida, Emanuela Romano, Carlo Sbordone

# L'importanza delle definizioni in Matematica

*Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Serie 4*, Vol. **86** (2019), n.1, p. 147–164.

Società Nazione di Scienze, Lettere e Arti in Napoli; Giannini

<http://www.bdim.eu/item?id=RASFMN_2019_4_86_1_147_0>

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Società Nazione di Scienze, Lettere e Arti in Napoli; Giannini, 2019.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXXVI, (2019) pp. 147-164

DOI 10.32092/1022

# L'importanza delle definizioni in Matematica

Nota di Margherita Guida[1], Emanuela Romano[2] e del socio Carlo Sbordone[3]
(Adunanza del 20 dicembre 2019)

*Keywords*: Theorems, proofs, definitions in Mathematics

**Abstract -** The purpose and nature of definitions, theorems and mathematical proofs are considered. It is our duty as teachers to support students to overcome the difficulties when accepting a "hundred percent precise" definition or recognizing the difference between an empirical argument and the rigorous proof. It is very important to avoid an excess of unnecessary notions in the presentation of single chapters of Mathematics.

**Riassunto:** Si considerano alcuni aspetti dell'insegnamento della matematica ritenuti essenziali per consentire agli allievi una migliore comprensione della materia. Dalla necessità di dare definizioni precise "al cento per cento", all'opportunità di limitare un eccesso di definizioni (per evitare il rischio di nozionismo matematico). Si raccomanda la massima cura da parte dell'insegnante per un corretto passaggio da considerazioni empiriche, basate su esempi particolari, alle dimostrazioni complete e rigorose.

## 1 - INTRODUZIONE

Una delle critiche comunemente rivolte alla Matematica ed agli insegnanti di Matematica è che tale disciplina si possa ridurre ad una lista di teoremi tra loro non chiaramente collegati. Tale critica in parte è dovuta alle presentazioni della nostra materia che non si preoccupano di dare definizioni precise delle no-

[1] I.S.I.S. "Elena di Savoia", Largo S. Marcellino 15, Napoli, Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Complesso Monte S. Angelo, via Cintia, 80126 Napoli, maguida@unina.it.

[2] Scuola Secondaria di I grado "San Tommaso", Piazza Ettore Imperio 4, Mercato San Severino (SA), emanuela.romano3@istruzione.it.

[3] Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Complesso Monte S. Angelo, via Cintia, 80126 Napoli, sbordone@unina.it.

zioni matematiche. Per definizione precisa, qui si intende "precisa al cento per cento". Trattare il tema delle "definizioni precise" significa pensare alle difficoltà che gli studenti possono incontrare nell'apprendimento di certe nozioni matematiche, analizzando gli errori e i fraintendimenti più comuni. In particolare, se l'insegnante sceglie di indicare particolari rappresentazioni di ciò che è oggetto di definizione, quali rappresentazioni può scegliere per la nozione oggetto di studio e come può evitare che l'allievo identifichi l'oggetto con una sua rappresentazione?

La soluzione rigorosa di tale problema si ottiene scegliendo di dare come **definizione** uno dei possibili enunciati e poi dimostrando mediante teoremi che gli altri enunciati sono a loro volta veri, secondo il metodo naturale della matematica che si sviluppa per teoremi.

È ovvio che queste questioni dipendono sia dalla nozione da definire che da altre condizioni, come ad esempio, l'età degli studenti, il percorso didattico seguito, le esperienze matematiche vissute. È anche evidente che, dal punto di vista didattico, nessuna delle precedenti questioni può essere sottovalutata e che, in generale, tali problematiche coinvolgono aspetti di carattere logico, cognitivo ed epistemologico. In mancanza del requisito della precisione nelle definizioni è difficile, anche per uno studente dotato, dare delle spiegazioni logiche, fare ragionamenti corretti.

La matematica è un libro aperto. È accessibile a chiunque sia disposto a rispettare le regole esplicite del gioco. Gli studenti devono acquisire questa consapevolezza prima di impegnarsi a studiarla. Perché ciò accada, gli insegnanti di matematica dovrebbero per primi avere tale convinzione.

Qui di seguito consideriamo due esempi: la nozione di frazione, la nozione di area di una figura piana e, più in generale, descriviamo alcune questioni di geometria.

**La nozione di frazione**

Dal punto di vista della matematica di livello universitario, la definizione di frazione (o di numero razionale) è la seguente:

frazione = classe di equivalenza

tra coppie ordinate di interi rispetto ad un'opportuna relazione binaria.
Non si può pretendere di presentare a livello così astratto le frazioni in una classe di scuola secondaria di primo grado.
Infatti, i ragazzi concepiscono le frazioni come "parte di un tutto" e questa giusta concezione intuitiva è molto lontana dal mondo delle coppie ordinate e delle relazioni di equivalenza.

**La nozione di area di una figura piana**

Dal punto di vista della matematica di livello universitario, la definizione di area di un poligono del piano è la seguente:

area = classe di equivalenza

tra poligoni rispetto alla relazione di congruenza fra insiemi misurabili.
Non si può presentare in modo così astratto la nozione di area in una classe di scuola secondaria di primo grado.

Infatti, i ragazzi percepiscono che l'area di un rettangolo con lati di lunghezza intera (ad esempio 4 cm e 3 cm) intesa come numero di quadrati unitari necessari a ricoprire il rettangolo completamente e senza sovrapposizioni, misura 12 centimetri quadri (Fig. 1).

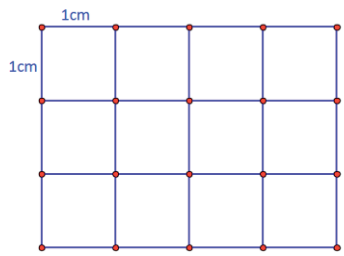



Fig. 1 – Rettangolo di lati di lunghezza 3 cm e 4 cm.

Le definizioni devono esser precise, ma possono avere diversi gradi di accuratezza e completezza a seconda dei destinatari. Una cosa sono gli studenti universitari, altra cosa sono gli allievi di una secondaria di primo grado. Per questi ultimi è opportuno inizialmente limitare ai poligoni le definizioni di area perché, per tali figure geometriche, l'area può essere calcolata esattamente, una volta nota l'area dei rettangoli (base per altezza).

Il riferimento poi alle figure circolari va fatto menzionando procedimenti di approssimazione (basati sulla nozione di limite). Si perviene così ad una definizione incompleta di area, ma almeno la definizione è del tutto corretta. Spesso occorre fare scelte didattiche tra due situazioni del tipo di quella appena descritta. Da un lato la massima correttezza e completezza e dall'altro la necessità di mettere l'ascoltatore in condizioni di capire.

Quali sono i problemi che incontrano i docenti di matematica nelle scuole? Proveremo ad analizzare questo quesito, ponendo l'accento sulle definizioni di nozioni e sulle dimostrazioni di teoremi.

**2 - IL RUOLO DELLE DEFINIZIONI**

La maggior parte degli insegnanti deve risolvere autonomamente il problema di colmare il divario tra ciò che viene insegnato loro durante il percorso universitario e ciò che essi insegnano agli studenti nelle scuole. Probabilmente va dedicato maggior impegno per consentire ai futuri insegnanti di valorizzare le caratteristiche essenziali della matematica: la sua precisione, l'importanza del ragionamento logico e la sua coerenza come disciplina. La matematica dovrebbe essere per sua natura un argomento di grande chiarezza. Eppure, essa viene spesso presentata agli studenti delle scuole in modo confuso. Riteniamo auspicabile una solida condivisione delle seguenti caratteristiche della matematica:

1) le definizioni precise costituiscono la base di qualsiasi spiegazione matematica e senza spiegazioni la matematica diventa difficile da imparare;
2) il ragionamento logico è l'essenza della matematica;
3) nozioni ed enti della matematica sono organizzati come parte di un insieme coerente, in modo che la comprensione di qualsiasi nozione richieda anche la comprensione di tutti i legami con altre nozioni ed enti.

Come già accennato, talvolta gli insegnanti non si soffermano con sufficiente enfasi ed efficacia sulle definizioni. Per esempio, nell'introdurre un nuovo ente matematico, a volte gli insegnanti ricorrono ad una presentazione discorsiva e troppo articolata soprattutto se scelgono di descrivere tutte insieme le diverse prestazioni del nuovo ente. *La procedura corretta è invece quella di dare una sola definizione e poi di ottenere attraverso teoremi le proprietà che individuano le altre prestazioni.* In altre parole, occorre che solo una di esse sia adottata come definizione e quindi usata per spiegare perché anche le altre siano valide. Qui consideriamo con attenzione l'insegnamento delle frazioni e della geometria nelle scuole secondarie di primo grado.

Una frazione viene spesso presentata come un ente matematico con diverse identità allo stesso tempo:

1) Una frazione è parte di un tutto (la frazione $\frac{2}{3}$ rappresenta due parti, quando il tutto è diviso in tre parti uguali e poiché non è chiaro cosa intendere per "il tutto", spesso si fa riferimento alla metafora della "pizza");
2) Una frazione è un rapporto (la frazione $\frac{2}{3}$ rappresenta una situazione: vi sono due banchi per ogni terzetto di studenti);
3) Una frazione corrisponde ad una divisione tra due numeri interi di cui il secondo diverso da zero (la frazione $\frac{2}{3}$ rappresenta l'operazione "2 diviso 3").

La terza interpretazione può generare un equivoco. Infatti, gli allievi si apprestano allo studio delle frazioni subito dopo aver appreso la divisione fra numeri interi $m : n$ con $n$ diverso da zero. Pertanto, sono portati ad interpretare la frazione come suddivisione in gruppi uguali solo se $m$ è multiplo di $n$. In caso contrario, la divisione $m : n$ è da riguardarsi come divisione con resto e quindi coinvolge **due** numeri: il quoziente $q$ ed il resto $r$.

Ad esempio, riguardare 2:3 come un solo ente numerico e tentare di definire $\frac{2}{3}$ come 2:3 è fuorviante.

In realtà l'uguaglianza

$$m : n \;=\; \frac{m}{n}$$

è frutto di un **Teorema.**

Alle volte si trova anche scritto che il termine "frazione" si riferisce ad un "operatore" per esempio la frazione $\frac{1}{2}$ corrisponde all'operatore che dimezza gli oggetti. Altre volte si dice che la frazione rappresenta una certa forma di scrittura di numeri. In questo senso una frazione è una coppia di numeri interi $a$ e $b$ scritti nella forma $\frac{a}{b}$, con la condizione che il numero al denominatore deve essere diverso da zero.

Alla luce di queste difficoltà è matematicamente più appropriato utilizzare la retta dei numeri per definire una frazione come punto su questa retta, come segue. Sulla retta dei numeri fissato un punto origine detto zero ed indicato con 0, per esempio $\frac{1}{3}$ è il primo punto di suddivisione a destra di zero, quando il segmento da 0 a 1 è diviso in tre segmenti di uguale lunghezza (Fig. 2):


Fig. 2 – Costruzione sequenza dei terzi

Analogamente, se dividiamo in tre parti di uguale lunghezza tutti i segmenti [1,2], [2,3], [3,4], … otteniamo la sequenza dei terzi:

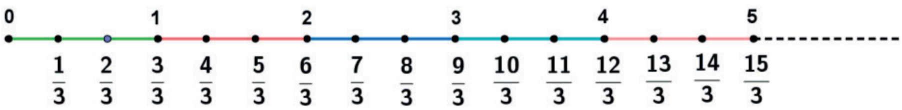



Fig. 3 – Sequenza dei terzi.

Ogni punto della sequenza (Fig. 3) misura la sua distanza da zero, ad esempio $\frac{5}{3}$ è la lunghezza di [0, $\frac{5}{3}$], ma $\frac{5}{3}$ è anche 5 volte la lunghezza di [0, $\frac{1}{3}$], e inoltre è la quinta frazione, nella sequenza dei terzi, a destra di zero.

I numeri $\frac{m}{3}$ sono i multipli di $\frac{1}{3}$ al variare di $m \in N$.

A partire da questo esempio appare chiaro che è possibile dare la seguente definizione di frazione:

**Definizione 2.1** *Dati i numeri naturali m ed n, costruiamo la sequenza degli n-simi:* $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$, *..., dividendo i segmenti* [0,1], [1,2], [2,3], ... *in n parti uguali.*
*La frazione* $\frac{m}{n}$ *è l'm-simo punto, nella sequenza degli n-simi, a destra di zero.*

In questo modo, fissato n in *N*, al variare di $m \in N \cup \{0\}$ si ottengono tutti i multipli interi positivi $\frac{m}{n}$ di $\frac{1}{n}$ e zero. Esattamente come per *n=1* al variare di $m \in N \cup \{0\}$, si ottengono tutti gli interi positivi m e zero.

Questa definizione di frazione, confrontata con quella che si basa su un pezzo di torta è più facile da applicare: abbiamo scelto di dividere un segmento in n parti di uguale lunghezza piuttosto che un cerchio in n parti congruenti.

**Osservazione 2.2** *Per dividere il segmento unitario in un dato numero di parti uguali possiamo usare o il metodo classico delle proiezioni parallele, basato sul Teorema di Talete, oppure il metodo ricorsivo illustrato di seguito (Guida, Sbordone, 2016), che è una versione semplificata dell'algoritmo scoperto in classe da due ragazzi americani, Daniel Litchfield e Dave Goldenheim, che con l'aiuto del loro insegnante Charles Dietrich pubblicarono nel 1997 un articolo sulla rivista Mathematics Teacher* (Litchfield *et al.*,1997).

**Versione semplificata algoritmo C. Dietrich, D. Goldenhein, D. Litchfield**

Sia AB il segmento unitario [0;1], per determinare la posizione di $\frac{1}{3}$:

- Costruiamo il quadrato ABCD e tracciamo le diagonali DB e AC. Detto V il punto di incontro delle diagonali, indichiamo con M la proiezione ortogonale di V su AB, il punto M sarà il punto medio di AB e quindi $\overline{AM} = \frac{1}{2}$;

- Congiungiamo il punto D con il punto M. Detto G il punto di incontro di DM con AC, indichiamo con H la proiezione ortogonale di G su AB. Per la similitudine dei triangoli AGM e CGD otteniamo $\overline{AH} = \frac{1}{3}$.
- Con analogo procedimento si determinano $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, . . . del segmento unitario.

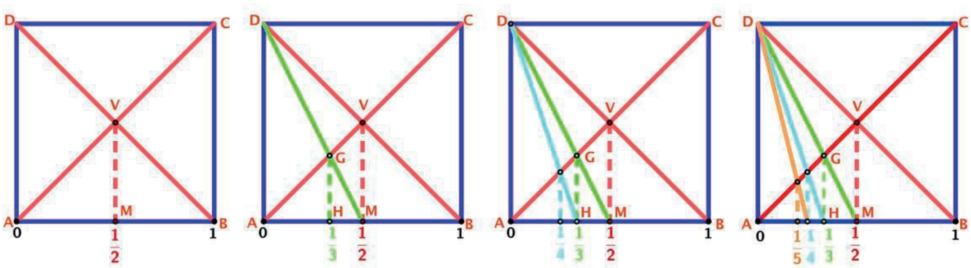



Fig. 4: Determinazione posizione di $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$ , . . . del segmento unitario.

### 3 - ADDIZIONE DI FRAZIONI

Quando si definiscono le operazioni di addizione e moltiplicazione di due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$ , è ingannevole dare tali definizioni usando rispettivamente le formule

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

e

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

che sono frutto di **teoremi**.

L'allievo attento che si vedesse presentare le formule precedenti come **definizioni** di addizione e moltiplicazione, noterebbe subito che quella per l'addizione è più elaborata ed artificiosa di quella della moltiplicazione. Il che è in stridente contrasto con ciò che viene detto a proposito della moltiplicazione e cioè che essa è un'operazione più complessa dell'addizione che a volte viene presentata come un'addizione ripetuta. Gli studenti si domanderebbero: perché non adottare una formula analoga a quella della moltiplicazione (numeratore =

prodotto dei numeratori e denominatore = prodotto dei denominatori) anche per l'addizione e cioè:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n+l} \qquad \text{? (FORMULA ERRATA!)}$$

La risposta corretta è che la definizione di somma di due frazioni va data diversamente e deve avere il requisito che, quando le due frazioni da addizionare hanno denominatore uguale a 1, la definizione deve coincidere con quella precedentemente studiata di addizione tra interi.

Vogliamo segnalare che il secondo membro di tale formula (somma dei numeratori fratto somma dei denominatori), come notato da McKay (Sherzer, 1973), tuttavia ha un significato interessante, in quanto a partire da due frazioni positive ridotte ai minimi termini $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$ tale secondo membro costituisce una frazione **compresa** tra esse, che nella pratica è molto più agevole da calcolare rispetto alla media aritmetica tra i due addendi.

Tornando alla definizione di addizione, ci serviamo ora della rappresentazione dei numeri come punti della retta reale.

Il primo caso che esamineremo, nel seguente esempio, è quello più semplice, ossia quello della somma di frazioni con lo stesso denominatore.

**Esempio 3.1:** La somma $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$ può essere interpretata come la lunghezza della *concatenazione* di due segmenti adiacenti, aventi rispettivamente lunghezza $\frac{2}{9}$ e $\frac{5}{9}$ del segmento unitario [0, 1]. Infatti, se dividiamo in 9 parti uguali il segmento [0, 1] e su di esso evidenziamo in rosso prima i $\frac{2}{9}$ del segmento e poi altri $\frac{5}{9}$ otteniamo che la lunghezza della concatenazione delle due frazioni è la loro somma (Fig. 5).

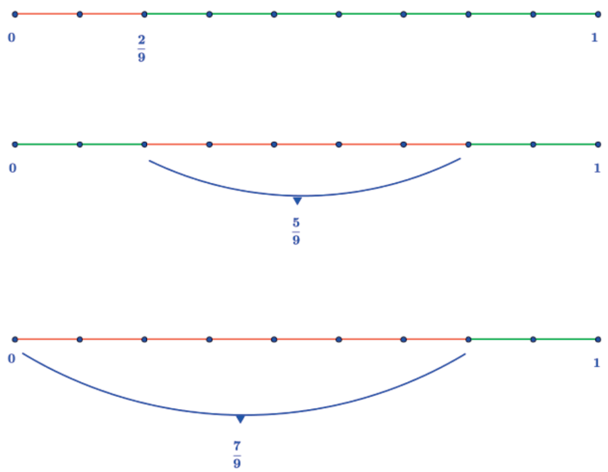



Fig. 5 – Somma delle frazioni: $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$

Da ciò risulta chiaro che in generale la definizione di somma deve essere compatibile con quella illustrata nell'Esempio 3.1.

**Definizione 3.2** *Date due frazioni* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$ *, la loro somma* $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}$ *è la lunghezza della concatenazione dei due segmenti adiacenti di lunghezze rispettive* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$.

Introdotta tale definizione, usando il Teorema sulla semplificazione di frazioni si ottiene che per l'addizione di frazioni vale la formula illustrata nel seguente Teorema:

**Teorema 3.3** *Date due frazioni* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$ *, con* $m,k \in N \cup \{0\}$ *ed* $l,n \in N$*, allora vale la seguente formula per l'addizione:*

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{ml+nk}{nl}$$

## 4 – MOLTIPLICAZIONE DI FRAZIONI

Esaminiamo ora il caso del prodotto di due frazioni partendo da un esempio.

**Esempio 4.1:** Consideriamo il prodotto $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$ che è definito come $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{7}$ , ed è la lunghezza di una parte del segmento $[0, \frac{3}{7}]$ quando tale segmento è diviso in 4 parti di uguale lunghezza (Fig. 6).

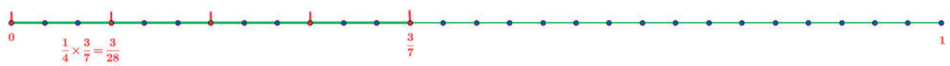



Fig. 6: Prodotto delle frazioni: $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$.

Precisamente, sulla retta dei numeri a partire dal segmento [0, 1] si disegna il punto $\frac{3}{7}$ e poi si divide il segmento $[0, \frac{3}{7}]$ , in 4 segmenti di uguale lunghezza, il primo segmento evidenziato nella figura 3 è $\frac{3}{28}$ di [0,1] cioè $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$ (Fig. 6).

**Osservazione 4.2** *Si potrebbe anche presentare la moltiplicazione in quattro fasi:*

- *prima fase: eseguire il prodotto dei denominatori delle frazioni che si vanno a moltiplicare;*
- *seconda fase: suddividere l'unità per tale prodotto;*
- *terza fase: eseguire il prodotto dei numeratori;*
- *quarta fase: addizionare un numero di parti dell'unità frazionaria ottenuta pari al prodotto dei numeratori.*

*I primi due passaggi possono allora riconnettersi a quella che generalmente viene chiamata frazione di frazione.*
*Nella definizione* (Guida, Sbordone, 2016, Definizione 1.18*) si potrebbe allora dire:*
*Date due frazioni* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$, *con* $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ed* $l, n \in \mathbb{N}$, *il prodotto* $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ *è uguale alla totalità di km parti, quando il segmento [0, 1] è diviso in ln parti di uguale lunghezza, come da utile suggerimento del Prof. Luciano Carbone, che ringraziamo.*

In generale, si ha quindi la seguente definizione di prodotto di due frazioni.

**Definizione 4.3** *Date due frazioni* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$ *, con* $m, k \in N \cup \{0\}$ *ed* $l, n \in N$*, il prodotto* $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ *ossia* $\frac{k}{l}$ *di* $\frac{m}{n}$ *è dato dalla totalità di km parti, quando il segmento* [*0*, 1] *è diviso in ln parti di uguale lunghezza.*

**Osservazione 4.4** *Dalla Fig. 3 risulta chiaro che se utilizziamo* $\frac{3}{7}$ *come unità di misura sulla retta dei numeri, otteniamo una nuova retta dei numeri dove l'unità è* $\frac{3}{7}$ *e rispetto a questa nuova unità* $\frac{1}{4}$ *è la lunghezza di una parte quando il segmento [0,* $\frac{3}{7}$*] è ripartito in 4 parti di uguale lunghezza. Tale parte ha lunghezza* $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$*, quindi* $\frac{1}{4}$ *in termini della nuova unità è* $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$ .

Usando la definizione, si dimostra che il prodotto di due frazioni è dato dalla formula illustrata nel Teorema 4.5.

**Teorema 4.5** *Date due frazioni* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{k}{l}$ *, con* $m, k \in N \cup \{0\}$ *ed* $l, n \in N$ *, allora vale la seguente formula per il prodotto:*

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

**5 – DIVISIONE DI FRAZIONI**

Esaminiamo ora la divisione di due frazioni partendo da un quesito:

**Domanda:**
Come giustificare l'uguaglianza

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

brevemente soprannominata "inverti e moltiplica"?

Consideriamo il caso concreto

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

che schematizza la situazione seguente:

Un tale ha un certo budget per acquistare un pezzo di terreno. Gli viene detto che con $\frac{2}{3}$ di quel budget potrà acquistare $\frac{3}{4}$ del terreno.

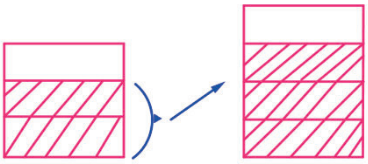
**Domanda**: “Quale frazione del budget servirà per acquistare l’intero pezzo di terreno?”

**Risposta**: impostiamo la proporzione

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = x : 1$$

Allora si avrà che x è uguale al rapporto considerato.

D’altra parte, riflettendo sul fatto che egli acquisisce 3 parti su 4 dell’intero terreno con $\frac{2}{3}$ del budget (Fig. 7)



$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

Fig. 7 – Divisione tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$

per determinare la frazione del budget che serve a comprare ciascuna di quelle parti, si deve

1) dividere $\frac{2}{3}$ per 3, ottenendo

$$\frac{\frac{2}{3}}{3}$$

2) moltiplicare per 4 quanto appena trovato,

$$\frac{\frac{2}{3}}{3} \times 4 = \frac{\frac{2}{3} \times 4}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$$

in quanto si vogliono comprare tutte e 4 le parti.

Gli esempi precedenti mostrano come sia possibile dare una sola definizione di frazione e ottenere attraverso teoremi le proprietà che individuano le altre prestazioni. Questa procedura migliora la comprensione della nozione in questione, perché sottolinea l'interazione logica dei diversi significati. Infatti, è generalmente riconosciuto che l'attuale crisi di educazione matematica deriva dall'assenza di ragionamento logico nelle aule di matematica. È importante anche presentare ogni argomento nuovo di matematica partendo da qualche problema concreto e applicativo, che ne giustifichi l'utilità e lo studio. Generalmente, per conoscere l'utilità della matematica basterebbe un solo esempio significativo per indicare il motivo per cui è importante per poi passare subito alla definizione rigorosa.

In particolare, lo studio della geometria nella scuola merita una considerazione a parte. Il problema principale riguarda l'approccio universitario: se nel corso degli studi universitari la geometria non viene insegnata adeguatamente, l'unica esperienza di "geometria per la scuola" che gli insegnanti di matematica della secondaria di primo grado hanno nel loro bagaglio culturale è la loro stessa esperienza di ex allievi di scuola superiore.

Si può osservare quindi come le questioni riguardanti le frazioni e quelle riguardanti la geometria euclidea abbiano un elemento in comune: un loro insegnamento inadeguato diverrà responsabile del rifiuto dello studio matematica da parte degli studenti per tutto il successivo percorso di studi.

## 6 - DIMOSTRAZIONI EMPIRICHE E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

La geometria è fondamentale come studio e comprensione dello spazio che ci circonda ed è uno dei più complessi edifici concettuali sviluppati dall'uomo. La crisi della Geometria dipende dalla difficoltà che presentano le dimostrazioni nella pratica di tale ramo della matematica. A differenza di quanto avviene in aritmetica o in algebra, le dimostrazioni geometriche presentano la caratteristica dell'interazione tra immagine visive e aspetti analitici. È molto difficile arrivare ad una autonoma capacità dimostrativa in mancanza di esperienza di geometria sperimentale. Inoltre, senza una buona dose di intuizione geometrica non c'è verso di portare a termine una dimostrazione. Non sembra possibile, da vari studi eseguiti da matematici professionisti, che l'intuizione geometrica si possa acquisire attraverso animazioni ottenute al computer. Nonostante le animazioni contengano importanti ed innovativi elementi di apprendimento, sembra fondamentale per acquisire sicurezza in geometria (specialmente dello spazio) la costruzione a mano di modelli e l'uso di riga e compasso. Sin dalla scuola primaria occorre una frequente esperienza geometrica. Le dimostrazioni geometriche non si basano su un insieme di tecniche e algoritmi. Per tale ragione, in molte circostanze lo studente non sa da dove cominciare il processo dimostrativo. È opportuno apprendere e ripetere più volte le dimostrazioni in geometria. Obiettivo importante dell'insegnante è quello di comunicare correttamente la natura delle dimostrazioni in Matematica, far comprendere gli enunciati dei teoremi e le loro dimostrazioni agli allievi. La difficoltà che si incontra sta nelle differenze che sussistono tra contesto matematico e realtà quotidiana. Infatti, nella vita quotidiana la nozione di "ragionamento corretto" non è ovvia, perché partendo dalle stesse premesse si può arrivare a conclusioni diverse. In matematica, invece, un "ragionamento matematico corretto" porta ad un'unica conclusione. In molti casi, l'azione di dimostrazione intrapresa dagli studenti è quella di partire da esempi particolari in cui il teorema funziona per poi dedurre l'universale. Sebbene tale approccio abbia i suoi lati positivi, perché se non altro semplifica la situazione, deve esser ben chiaro a tutti che un enunciato è vero se lo è in tutti i casi possibili, senza eccezione alcuna. Dunque, bene partire dal particolare per congetturare l'universale, in quanto è come aver fatto una "dimostrazione empirica". Nel seguito mostriamo come sia diverso il concetto di "dimostrazione" quando si fa Matematica da quando si fa Fisica.

In Matematica, se proviamo a scomporre un numero pari (maggiore di 2) nella somma di una coppia di numeri dispari, notiamo che fra queste coppie è sempre possibile trovarne una o più d'una costituita da due numeri primi:

- 10 = 3+7
- 28 = 11+17

- 100 = 53+47 = 59+41 = 71+29 = 83+17 = 89+11

- 1000 = 491+509 = 479+521 = 443+557 = 431+569 = 383+617 = 359+641 = 353+ 647 = 347+653 = 317+683 = 281+719 = 257+743 = 239+761 = 227+773 = 191+809 = 179+821 = 173+827 = 137 + 863 = 113+887 = 89+911 = 71+929 = 59+941 = 53+947 = 47+953 = 29+971= 23+977 = 17+983 = 3+997

Se si effettuano moltissime prove su numeri pari, si controlla che ciò è vero senza nessuna eccezione. In altre parole, non è stato mai trovato un numero pari che non sia scomponibile nella somma di due numeri primi. Quindi, è naturale dire che:

**A) OGNI NUMERO PARI (MAGGIORE DI 2) È SCOMPONIBILE NELLA SOMMA DI DUE NUMERI PRIMI**

In Fisica, analogamente, cioè eseguendo moltissime prove, si controlla la validità della legge della caduta libera dei gravi nel vuoto. Perciò i fisici dicono:

**B) OGNI GRAVE CADE LIBERAMENTE NEL VUOTO CON MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO, E OGNUNO CON LA STESSA ACCELERAZIONE**

La proposizione **B)** viene ritenuta vera perché dimostrata sperimentalmente, la proposizione **A)** per i matematici è solo una congettura (la congettura di Goldbach).

Per i matematici non basta aver fatto un enorme quantità di verifiche per avere la certezza che essa valga sempre (cioè per tutti i numeri pari), dato che l'insieme dei numeri pari è **infinito**, mentre le prove che noi possiamo fare sono sempre in numero finito.

La circonferenza della matematica ha una perfezione irraggiungibile mediante i modelli che di volta in volta possiamo realizzare.

Siamo in presenza di un fenomeno interessante: gli enti geometrici vengono definiti e trattati con un linguaggio astratto, ma noi non siamo in grado di concretizzare questi enti nel nostro mondo sensibile.

La Matematica a volte viene sviluppata indipendentemente dalle sue applicazioni agli altri rami del sapere e spesso i suoi risultati trovano riscontro sensibile solo in epoche successive.

Il Teorema di Pitagora, ad esempio, secondo il quale: "*il quadrato costruito sull'ipotenusa c di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti a e b*" è stato talvolta concretamente presentato in qualche “Science Centre”, realizzando un dispositivo del tipo in nella Fig. 8 e facendolo ruotare adeguatamente.

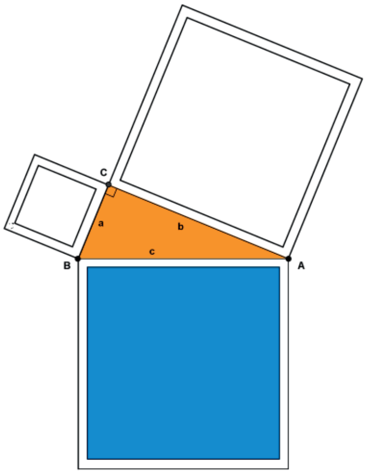



Fig. 8 – Teorema di Pitagora con liquidi

Il liquido, che inizialmente riempie il recipiente a forma di quadrato costruito sulla ipotenusa, previa una rotazione, va a riempire i due recipienti quadrati costruiti sui cateti. Si ottiene così una prova “tangibile” del teorema di Pitagora: Prima di passare ad approfondire tale “prova sperimentale” e di mostrarne i limiti, presentiamo una ben nota dimostrazione rigorosa e semplice, relativo al caso particolare che il triangolo rettangolo sia anche isoscele, cioè che abbia i cateti uguali (Fig. 9).

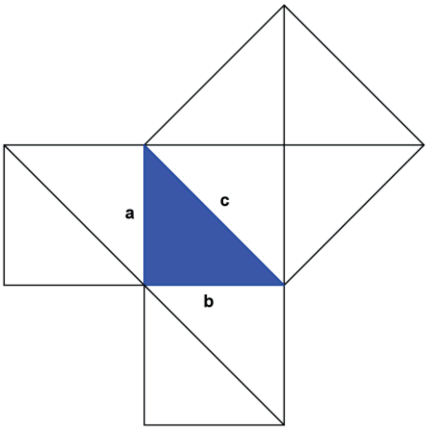



Fig. 9 – Teorema di Pitagora per triangolo rettangolo isoscele

Il quadrato costruito sull'ipotenusa $c$ viene scomposto in quattro triangoli equivalenti a quello dato, mentre ciascuno dei due quadrati costruiti sui cateti è scomponibile in due triangoli equivalenti a quello dato. Ne segue il teorema.

Eppure, il dispositivo non funziona perfettamente. Si vede chiaramente che spostando il liquido dal quadrato grande in quelli piccoli, ve ne è una piccola quantità che avanza (Fig. 10):

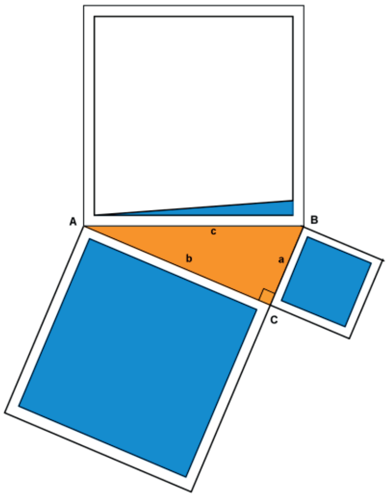



Fig. 10 – Teorema di Pitagora (dimostrazione con liquidi)

Il motivo è il seguente. Un qualsiasi contenitore di liquido deve avere delle pareti con certo spessore. Dunque anche i contenitori a sezione quadrata costruiti nel dispositivo avranno uno spessore e se le loro pareti esterne misurano $a, b, c$ con $a^2+b^2=c^2$, le loro pareti interne misureranno per lati non $a, b, c$ ma $a\text{-}\varepsilon, b\text{-}\varepsilon, c\text{-}\varepsilon$.

Si verifica subito che a fronte dell'uguaglianza pitagorica $a^2+b^2=c^2$ si ha invece la disuguaglianza

$$(a\text{-}\varepsilon)^2+(b\text{-}\varepsilon)^2 < (c\text{-}\varepsilon)^2$$

per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo.

Per convincerci con un esempio di questo fatto, immaginiamo di partire dalla terna pitagorica $a=3, b=4, c=5$ ($3^2+4^2=5^2$) e supponiamo che sia $\varepsilon=1$.
Si ha:

$$a\text{-}\varepsilon=3\text{-}1=2,\ \ b\text{-}\varepsilon = 4\text{-}1 = 3,\ \ c\text{-}\varepsilon=5\text{-}1=4$$

dunque

$$2^2 + 3^2 = 13 < 16 = 4^2$$

Dunque la terna 2,3,4 non è una pitagorica e la somma delle aree dei quadrati di lato 2 e 3 è inferiore all'area del quadrato di lato 4.

In sostanza il dispositivo non riproduce una dimostrazione esatta del Teorema di Pitagora, ma ne costituisce una prova sperimentale approssimativa, che suscita anche interesse, perché mette in luce un'ulteriore proprietà delle terne pitagoriche.

In conclusione, per quel che concerne la matematica non possiamo non rilevare un dato estremamente positivo per la scuola italiana: con il corso di laurea in Scienze della formazione primaria lo spazio di crediti (CFU) di matematica è notevole, raggiungendo il numero di 20 in molte sedi. In tale contesto, si riesce a dare una buona formazione sulle nozioni matematiche ai futuri insegnanti della scuola primaria.

## 7 - BIBLIOGRAFIA


Guida M., Sbordone C. (2015) La Matematica e le sue attrattive per i giovani, *Quale Scuola? Le proposte dei Lincei per l'italiano, la matematica, le scienze*. *Introduzione di Tullio De Mauro.* A cura di F. Clementi, L. Serianni, Collana: Sfere (105), Casa editrice Carocci, Roma, pp.85–101.

Guida M., Sbordone C. (2016) Sull'insegnamento delle frazioni nella scuola secondaria, *Orizzonti Matematici. Tra didattica e divulgazione. A cura di S. Cuomo, S. Rionero, C. Sbordone*, Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, Memorie dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche, Giannini Editore, Napoli, pp.105-126.

Litchfield D.C., Goldenheim D.A., Dietrich C.H. (1997) Euclid Fibonacci Sketchpad, *The Mathematics Teacher*, **Vol. 90**, N.1, 8–12.

Sherzer L. (1973) McKay's Theorem, *Mathematics Teacher*, **Vol. 66**, 229–230.

Wu H. (2011) *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 551 pp.