
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

DIMITRI E. KVASOV

Algoritmi diagonali di ottimizzazione globale Lipschitziana basati su una efficiente strategia di partizione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2007), n.2, p. 255–258.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_255_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_255_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algoritmi diagonali di ottimizzazione globale Lipschitziana basati su una efficiente strategia di partizione

DMITRI KVASOV

1. – Introduzione e impostazione del problema.

La programmazione non lineare, come insieme di tecniche matematiche, fornisce un supporto sia teorico che pratico per molti problemi, relativi alle scienze, all'ingegneria, all'economia, in cui i processi decisionali sono comuni attività quotidiane. Molto spesso nelle applicazioni reali si richiede di ottimizzare (minimizzare) una funzione obiettivo multidimensionale e multiestremale, rispettando un insieme di vincoli. Inoltre, le soluzioni localmente ottime sono sconosciute e frequentemente sono molto distanti dalla migliore soluzione possibile (ottimo globale). In questo caso possono fallire i metodi standard di ricerca locale, per i quali esiste una letteratura approfondita. Questo spiega la particolare attenzione che molti ricercatori dedicano allo sviluppo delle tecniche di ottimizzazione globale sempre più efficienti (si vedano, per esempio, i riferimenti bibliografici in [4], [7]).

Problemi di ottimizzazione globale, spesso derivanti da applicazioni industriali, risultano in gran quantità essere di tipo "black-box", con la funzione obiettivo multiestremale e non necessariamente differenziabile. Inoltre, ogni valutazione della funzione obiettivo può richiedere una quantità notevole del tempo computazionale (si possono vedere gli esempi in [4], [7]). Assumendo soddisfatta una condizione di limitatezza della variazione della funzione obiettivo, dipendente dalla corrispondente variazione dei parametri, si potrebbero applicare i metodi di ottimizzazione globale Lipschitziana (OGL). Questa assunzione è naturale per numerosi sistemi fisici e quindi permette una vasta applicazione di metodi OGL ai problemi pratici. La ricerca di tesi è dedicata allo studio di algoritmi di OGL.

Il problema affrontato nella tesi può essere impostato nel modo seguente:

$$(1) \quad f^* = f(x^*) = \min_{x \in D} f(x), \quad x \in D,$$

dove

$$(2) \quad D = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}^N : a(j) \leq x(j) \leq b(j), 1 \leq j \leq N\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^N,$$

la funzione obiettivo $f(x)$ soddisfa la condizione di Lipschitz

$$(3) \quad |f(x') - f(x'')| \leq L \|x' - x''\|, \quad \forall x', x'' \in D, \quad 0 < L < \infty,$$

e $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea. La funzione obiettivo $f(x)$ si assume di essere di

tipo “black-box”, multiestremale, non necessariamente differenziabile e difficile da calcolare.

2. – Descrizione dell’elaborato di tesi e dei principali risultati.

La tesi si articola nelle seguenti parti: un’introduzione, tre capitoli, una conclusione, un’appendice e l’elenco di riferimenti bibliografici.

Il capitolo 1, diviso in quattro sezioni, è dedicato alla rassegna dei principali risultati ed algoritmi di OGL, sia unidimensionali che multidimensionali. Gli algoritmi descritti nel capitolo 1 sono stati scelti per la discussione in base a due motivi: (1) per la loro importanza nell’ambito di OGL; (2) per l’applicazione di essi alla costruzione di nuovi algoritmi multidimensionali, basati su una nuova strategia di partizione dello spazio di ricerca.

Tra i molti approcci alla risoluzione del problema (1)–(3) una particolare attenzione nella tesi è stata prestata alla tecnica diagonale [4], nella quale l’iperintervallo D si suddivide adattivamente in un insieme di più piccoli iperintervalli $D_i \subset D$ e la funzione obiettivo si valuta nei vertici a_i e b_i della diagonale principale $[a_i, b_i]$ di ogni iperintervallo D_i . La conclusione, riguardante l’andamento della funzione obiettivo su tutto l’iperintervallo multidimensionale D_i , viene fatta in base allo studio del comportamento di $f(x)$ lungo la diagonale principale $[a_i, b_i]$. Tale tecnica permette di applicare i metodi unidimensionali di OGL alla minimizzazione della funzione obiettivo relativamente al segmento unidimensionale $[a_i, b_i]$ e quindi estenderli al caso multidimensionale. L’approccio diagonale viene discusso nella sezione 1 del capitolo 2. Inoltre nella stessa sezione si descrivono le strategie di partizione dello spazio di ricerca (Partizione 2^N , dove per N si intende la dimensione del problema, e Bisezione) che si usano tradizionalmente nell’approccio diagonale.

Nella sezione 2 del capitolo 2 vengono proposti due nuovi algoritmi diagonali che utilizzano sia le idee geometriche (S. A. Piyavski, 1972) che la tecnica del “local tuning” al comportamento della funzione obiettivo (Ya. D. Sergeyev, 1992; 1995). I due algoritmi si distinguono in base alla suddivisione dello spazio di ricerca: nel primo è stata usata la tecnica di Partizione 2^N , mentre nel secondo la tecnica di Bisezione. Il confronto numerico tra i due metodi e alcuni algoritmi con una stima adattiva della costante di Lipschitz globale viene effettuato con un duplice scopo: (1) verificare l’efficienza dei metodi multidimensionali che usano le stime delle costanti di Lipschitz locali; (2) confrontare le due strategie di partizione della regione ammissibile. Come dimostrano gli esperimenti numerici condotti, il numero di valutazioni di $f(x)$ è, generalmente, minore con la strategia di Bisezione e, inoltre, l’applicazione del “local tuning” aumenta notevolmente la velocità di ricerca dell’ottimo globale. Tale parte del lavoro di tesi ha permesso la redazione dell’articolo [2].

Nella sezione 3 del capitolo 2 viene affrontato il problema di verifica di algoritmi di ottimizzazione globale e viene proposto un generatore di tre classi (non-differenziabile, continuamente differenziabile e due volte continuamente differenziabile) di funzioni

test per l'ottimizzazione globale, ciascuna formata da 100 funzioni e definita da cinque parametri intuitivi. Per ogni funzione test si conosce esattamente la distribuzione dei minimi locali e le corrispondenti regioni di attrazione. Il generatore è custodito nella collezione di algoritmi CALGO (gestita dall'Association for Computing Machinery, ACM) e può essere scaricato dalla pagina Web <http://www.info.deis.unical.it/~yaro>. Dal momento della creazione (2003) il generatore è stato richiesto dalle compagnie e dalle organizzazioni scientifiche di più di 20 paesi del mondo. La descrizione del generatore è presentata nell'articolo [1].

Il capitolo 3 presenta i risultati relativi ad un nuovo schema di costruzione di algoritmi multidimensionali di OGL, basato su una nuova ed efficiente strategia diagonale di partizione dello spazio di ricerca. Innanzitutto, vengono individuati alcuni problemi relativi alle strategie di partizione tradizionalmente usate negli algoritmi diagonali (sezione 1 del capitolo 3). Poi (sezione 2 del capitolo 3), viene descritta (seguendo [5]) la nuova strategia di partizione che permette di evitare le difficoltà incontrate con l'uso delle strategie tradizionali e di costruire i metodi multidimensionali di OGL in una maniera unificata ed efficiente. L'applicazione di tale strategia consente un notevole risparmio delle risorse computazionali (soprattutto per i problemi di ottimizzazione globale di grandi dimensioni) a confronto con i metodi diagonali tradizionali. Il risparmio diventa ancora più significativo grazie all'implementazione di una speciale base di dati, contenente i risultati delle valutazioni della funzione obiettivo. In [5] è stato teoricamente dimostrato il fatto dell'esistenza di questa base di dati. Tuttavia l'implementazione di essa non è un compito semplice e presenta diverse difficoltà, le quali sono state, comunque, risolte in una maniera efficiente durante la ricerca di tesi. In particolare, è stato progettato ed implementato (in linguaggio C) un prototipo del sistema che gestisce la base di dati. Tale prototipo può essere usato per lo sviluppo di vari metodi di ottimizzazione globale, basati sulla nuova strategia di partizione, e viene descritto nella sezione 2 del capitolo 3.

Nelle successive sezioni del capitolo 3 vengono presentati ed esaminati nuovi algoritmi diagonali, basati sulla strategia di partizione introdotta, che generalizzano alcuni efficienti metodi unidimensionali di OGL al caso multidimensionale. Infatti nella sezione 3 del capitolo 3 viene proposto un metodo "information" per la risoluzione del problema (1)–(3), che utilizza una stima adattiva della costante di Lipschitz globale. Viene condotto uno studio approfondito sulle condizioni di convergenza del nuovo algoritmo. I test numerici eseguiti confermano il vantaggio di tale metodo a confronto con alcuni metodi diagonali multidimensionali di OGL, il quale cresce con l'aumentare della dimensione dei problemi. Tale risultato è la conseguenza delle proprietà teoriche della nuova strategia di partizione. Questa parte del lavoro di tesi ha avuto come sbocco l'articolo [3].

La sezione 4 del capitolo 3 presenta un altro metodo per la risoluzione del problema (1)–(3). In questo metodo la costante di Lipschitz viene scelta da un insieme di possibili valori, da zero all'infinito, come è stato originariamente proposto (nell'algoritmo DIRECT) da D. R. Jones et al. (1993) per gli algoritmi di partizione

che valutano la funzione obiettivo nei punti centrali di ogni iperintervallo. Tale idea viene applicata al caso dell'approccio diagonale e successivamente potenziata grazie alla nuova strategia di partizione. Inoltre, viene introdotto un approccio nuovo che permette di combinare, nell'ambito dello stesso algoritmo globale, la fase di miglioramento di una soluzione ottima trovata e la fase di esplorazione della regione ammissibile alla ricerca delle possibili soluzioni migliori. Il nuovo algoritmo viene testato su un numero notevole (oltre 1600) delle funzioni test, usando il generatore di classi di funzioni test (descritto nella sezione 3 del capitolo 2). Gli esperimenti numerici si effettuano per confrontare l'algoritmo proposto con il metodo DIRECT e con una sua versione modificata, DIRECT-1, entrambi frequentemente usati per la risoluzione dei vari problemi industriali di ottimizzazione globale. In base ai criteri di confronto proposti nella tesi, tali esperimenti numerici dimostrano la superiorità del nuovo algoritmo rispetto ai metodi DIRECT e DIRECT-1. I risultati della ricerca in questa direzione sono stati pubblicati in [6].

Complessivamente, durante la ricerca di dottorato sono stati pubblicati 5 articoli su riviste internazionali, 9 lavori su atti di congressi e 3 rapporti tecnici. Inoltre, la tesi ha ricevuto una menzione speciale dalla Commissione del concorso INdAM-SIMAI 2006 per le migliori tesi di dottorato su temi di Matematica Applicata.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] GAVIANO M., KVASOV D.E., LERA D. e SERGEYEV YA.D., *Algorithm 829: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization*, ACM Transactions on Mathematical Software, **29** (4) (2003), 469-480.
- [2] KVASOV D.E., PIZZUTI C. e SERGEYEV YA.D., *Local tuning and partition strategies for diagonal GO methods*, Numerische Mathematik, **94** (1) (2003), 93-106.
- [3] KVASOV D.E. e SERGEYEV YA.D., *Multidimensional global optimization algorithm based on adaptive diagonal curves*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **43** (1) (2003), 40-56.
- [4] PINTÉR J.D., *Global Optimization in Action (Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).
- [5] SERGEYEV YA.D., *An efficient strategy for adaptive partition of N-dimensional intervals in the framework of diagonal algorithms*, Journal of Optimization Theory and Applications, **107** (1) (2000), 145-168.
- [6] SERGEYEV YA.D. e KVASOV D.E., *Global search based on efficient diagonal partitions and a set of Lipschitz constants*, SIAM Journal on Optimization, **16** (3) (2006), 910-937.
- [7] STRONGIN R.G. e SERGEYEV YA.D., *Global Optimization with Non-Convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica, Università della Calabria
 e-mail: kvadim@si.deis.unical.it
 Dottorato in Ricerca Operativa
 (sede amministrativa: Università di Roma "La Sapienza") - Ciclo XVIII
 Direttore di ricerca: Prof. Yaroslav Sergeyev, Università della Calabria