Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco Debernardi

Sottovarietà Lagrangiane di Bohr-Sommerfeld e nucleo di Szegö equivariante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 211–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_211_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 211-214

Sottovarietà Lagrangiane di Bohr-Sommerfeld e nucleo di Szegö equivariante

MARCO DEBERNARDI

1. – Introduzione.

La tesi ha motivazioni fisico-matematiche, che provengono dalla teoria della quantizzazione geometrica.

In meccanica classica, lo stato di un sistema è rappresentato da un punto in una *varietà simplettica*, ovvero una varietà M differenziabile dotata di una 2-forma chiusa e non-degenere Ω. La quantizzazione geometrica associa al sistema meccanico classico un sistema quantistico, costituito da uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, tale che alle osservabili classiche (che sono funzioni su M) corrispondano degli operatori su $\mathcal{H}$.

Molti problemi nella teoria della quantizzazione vengono studiati dal punto di vista "semi-classico", ovvero cercando di capire quali oggetti geometrici corrispondano agli stati quantistici quando si valuta il limite $\hbar \to 0$. In particolare, utilizzando l'approssimazione WKB, si vede che al limite semi-classico di stati quantistici corrispondono delle sotto-varietà Lagrangiane su M, unitamente a semi-densità su di esse.

D'altra parte, il principio di incertezza indica che i luoghi più piccoli dello spazio delle fasi di un sistema che hanno significato fisico sono le sue sottovarietà Lagrangiane. La categoria delle sotto-varietà Lagrangiane corrispondenti a stati quantistici è quella delle "sottovarietà Lagrangiane di Bohr-Sommerfeld".

2. – Breve riassunto.

Si consideri una varietà M compatta, complessa, proiettiva, di dimensione complessa n, dotata di una *forma di Hodge* Ω, ovvero di una forma di Kähler tale che la classe di coomologia $[\Omega]$ sia intera. In tal caso, esiste un fibrato in rette $\pi : (L; h) \longrightarrow M$ hermitiano ampio, tale che la curvatura dell'unica connessione compatibile sia $-2\pi i\Omega$. Tale fibrato si dice "fibrato quantizzante", e lo spazio di Hilbert associato alla teoria meccanica su M è lo spazio delle sezioni olomorfe $\mathcal{H} = H^0(M; L^{\otimes k})$, dove $L^{\otimes k} = L \otimes ... \otimes L$ (k volte). L'intero k rappresenta, nella teoria quantistica, l'inverso della costante di Planck. Esso è dotato di un prodotto hermitiano "L^2", dato da

$$(s_1; s_2)_h = \int_M h_m^{\otimes k}(s_1(m); s_2(m))dV, \tag{1}$$

per ogni $s_1, s_2 \in H^0(M; L^{\otimes k})$, dove dV è la forma di volume su M indotta dalla forma di Kähler.

Per meglio studiare lo spazio $\mathcal{H} = H^0(M; L^{\otimes k})$, può essere conveniente interpretarlo in modo differente. Sia L^* il fibrato duale di L, con la corrispondente metrica hermitiana duale (che verrà indicata ancora con h), e sia $X \subseteq L^*$ il corrispondente fibrato in cerchi unitario. Si indica con a la 1-forma di connessione su X. X è un fibrato in cerchi su M, e l'azione di S^1 su X si indica con $r_\theta x = e^{i\theta}x$, $x \in X$, $e^{i\theta} \in S^1$. Si introduce il fibrato in dischi $D = \{v \in L^* \,|h(v; v) \leq 1\}$, con $X = \partial D$. Lo *spazio di Hardy* $H(X)$ è l'L^2-completamento dello spazio dei valori al bordo delle funzioni olomorfe su D che stiano in $L^2(X)$.

Si ha la seguente decomposizione:

$$H(X) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} H_k(X), \tag{2}$$

dove $H_k(X) = \{f \in H(X) | f(r_\theta x) = e^{ik\theta} f(x)\}$.

Si verifica che c'è un'equivalenza unitaria tra $H(M; L^{\otimes k})$ e $H_k(X)$, intesi come spazi muniti dei rispettivi prodotti scalari L^2.

Si indica con $\Pi_k : L^2(X) \longrightarrow H(X)$ il proiettore di Szegö, che è la proiezione ortogonale su $H_k(X)$, rispetto al prodotto Hermitiano definito in $L^2(X)$.

Si consideri ora una *sottovarietà Legendriana* immersa $\tilde{\imath} : \Lambda \longrightarrow X$. Questo significa che $\imath(\widetilde{\Lambda})$ è orizzontale e di dimensione massima possibile n. Le *sottovarietà Lagrangiane di Bohr-Sommerfeld* (B-S) sono le proiezioni su M di sotto-varietà Legendriane in X.

La quantizzazione geometrica di sotto-varietà di B-S è stata, in particolare, affrontata in [1], utilizzando la teoria degli operatori di Fourier-Hermite. Più precisamente, ogni semi-forma liscia su Λ determina una semi-forma generalizzata su X che rappresenta, in pratica, una distribuzione delta a supporto contenuto in Λ.

Nella presente tesi viene studiato anche il caso equivariante, in presenza dell'azione olomorfa di un gruppo di Lie compatto e connesso, utilizzando semi-densità invece di semi-forme.

Sia dunque $(\Lambda; \lambda)$ una sotto-varietà Legendriana compatta, immersa in X, dotata di una semi-densità liscia λ. Essa individua in modo unico una semi-densità generalizzata $\delta_{\Lambda,\lambda}$ su X, avente supporto compatto contenuto in Λ.

Se $\Pi : L^2(X) \longrightarrow H(X)$ è la proiezione ortogonale rispetto al prodotto L^2, e $\Pi_k : L^2(X) \longrightarrow H_k(X)$ è la proiezione su $H_k(X)$, è possibile estendere in modo continuo Π per costruire $\Pi(\delta_{\Lambda,\lambda})$. Esso, però, non sta in $H(X)$, bensì in $H_k(X)$. Tuttavia, $u_k = \Pi_k(\delta_{\Lambda,\lambda})$ è un oggetto che sta in $H_k(X)$. La teoria di [1] descrive il comportamento asintotico della successione $\{u_k\}$, legandolo alla struttura geometrica locale di Λ.

Nel caso equivariante, si consideri un gruppo di Lie G connesso e compatto, di dimensione reale g, avente algebra di Lie $\mathcal{G}$. Supponiamo che G agisca in modo olomorfo ed Hamiltoniano su $(M; \Omega)$, in modo tale che esista una mappa momento

$\Phi : M \longrightarrow \mathcal{G}^*$ equivariante, che soddisfi la proprietà

$$d\langle\Phi, \xi\rangle = \Omega(\xi_M; \cdot), \ \forall\xi \in \mathcal{G}. \tag{3}$$

Inoltre, $0 \in \mathcal{G}^*$ deve essere un valore regolare per tale applicazione.

Si suppone in aggiunta che l'azione di G si linearizzi ad L, e che la metrica Hermitiana h su L sia G-invariante. In questa situazione, abbiamo una decomposizione unitaria di $H^0(M; L^{\otimes k})$ rispetto alle rappresentazioni irriducibili di G:

$$H^0(M; L^{\otimes k}) = \bigoplus_{\varpi} H^0(M; L^{\otimes k})_{\varpi}. \tag{4}$$

ϖ varia nell'insieme dei pesi massimali, e quindi indicizza tutte le possibili rappresentazioni irriducibili V_ϖ di G. Per ogni ϖ, $H^0(M; L^{\otimes k})_\varpi$ è isomorfo a una somma diretta di un numero finito di copie dello stesso V_ϖ.

Se $\{u_k\} \in H^0(M; L^{\otimes k})$ è la successione associata alla coppia (Λ, λ), si ha per ogni k una decomposizione $u_k = \oplus_\varpi u_{k;\varpi}$, dove $u_{k;\varpi} \in H^0(M; L^{\otimes k})_\varpi$. È stato studiato, in particolare, il comportamento asintotico della successione $u_{k;\varpi}$, per ϖ fissato e $k \longrightarrow +\infty$.

Teorema 1. Sia M una varietà complessa compatta proiettiva, di dimensione complessa n; sia G un gruppo di Lie di dimensione reale g che agisce su L. Sopponiamo che $0 \in \mathcal{G}^*$ sia un valore regolare per la mappa momento Φ. Sia $\Lambda \subseteq X$ una sottovarietà Legendriana compatta, **trasversale** a $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0))$. Siano $\boldsymbol{\lambda}$ una semidensità liscia su Λ e ϖ un peso massimale per G. Se $\{u_{k;\varpi}\}$ è la componente di $\boldsymbol{\delta}_{\Lambda;\lambda}$ in $\mathcal{H}(X)_{k;\varpi} \subseteq \mathcal{H}(X)$, e $\Lambda' = \Lambda \cap \boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0))$, allora:

i) se $x \notin (S^1 \times G) \cdot \Lambda'$, allora $u_{k;\varpi}$ è rapidamente decrescente per $k \longrightarrow +\infty$;

ii) se $x \in (S^1 \times G) \cdot \Lambda'$, siano $(h_j; g_j)$ gli elementi di $(S^1 \times G)$ tali che $x_j = (h_j; g_j) \cdot x \in \Lambda'$. Allora:

$$u_{k;\varpi}(x) \sim C_1(\varpi, h_j, g_j) \cdot k^{\frac{n-g}{2}} + O(k^{\frac{n-g-1}{2}}) \tag{5}$$

Il termine C_1 è calcolato esplicitamente, ed è una somma di addendi corrispondenti agli elementi $(h_j; g_j) \in (S^1 \times G)$ tali che $x_j = (h_j; g_j) \cdot x \in \Lambda'$. Esso risulta essere, inoltre, inversamente proporzionale alla cardinalità dello stabilizzatore di $\pi(x)$ e al volume effettivo $V_{eff.}(\pi(x))$, che è il volume Riemanniano dell'orbita contenente $\pi(x)$.

Sia ora $m = \pi(x)$, $w \in T_m(M)$. A meno della scelta di un sistema di coordinate locali, è ben definito il punto $x + \frac{w}{\sqrt{k}}$. È stato analizzato il termine del primo ordine dello sviluppo asintotico di $\left\{u_{k;\varpi}\left(x + \frac{w}{\sqrt{k}}\right)\right\}$ quando ϖ è fissato e $k \longrightarrow +\infty$. Questo ci fornisce precise indicazioni sul comportamento della successione $u_{k;\varpi}$ in un intorno di Λ'.

Si ha:

$$u_{k;\varpi}\left(x+\frac{w}{\sqrt{k}}\right)\sim C_2(\varpi;x;k,w)\cdot k^{\frac{n-g}{2}}+L.O.T., \tag{6}$$

dove L.O.T. indica genericamente termini di grado inferiore in k.

Un'applicazione del risultato ottenuto si trova nel seguente problema. Siano $\Lambda;\Sigma\subseteq X$ due sottovarietà Legendriane compatte con semidensità liscie su di esse, λ e σ, rispettivamente. Se $u_{k;\varpi}$ e $v_{k;\varpi}$ sono le due successioni associate, si vuole studiare il comportamento dei prodotti L^2 $(u_{k;\varpi};v_{k;\varpi})$.

Si dimostra che:

- Se $(S^1\times G)\cdot\Lambda)\cap\Sigma\cap\pi^{-1}(\Phi^{-1}(0))=\emptyset$, allora $(u_{k;\varpi};v_{k;\varpi})$ è rapidamente decrescente per $k\longrightarrow+\infty$.
- Se $(S^1\times G)\cdot\Lambda$ è trasversale a $\Sigma\cap\pi^{-1}(\Phi^{-1}(0))$, allora esiste uno sviluppo asintotico

$$(u_{k;\varpi};v_{k;\varpi})\sim k^{-\frac{g}{2}}\rho_0+\sum_{f\geq 1}k^{-\frac{g+f}{2}}\rho_f. \tag{7}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BORTHWICK D., PAUL T. e URIBE A., *Legendrian distributions with applications to relative Poincarè series*, Invent. Math., **142** (1995), 359-402

[2] BOUTET DE MONVEL L. e SJÖSTRAND J., *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Astérisque, **34-35** (1976), 123-164.

[3] GUILLEMIN V. e STERNBERG S., *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math., **67** (1982), 515-538.

[4] PAOLETTI R., *Moment maps and equivariant Szegö kernels*, J. Sympl. Geom., **2** (2003), 133-175.

[5] SHIFFMANN B. e ZELDITCH S., *Asymptotics of almost holomorphic sections of ample line bundles on symplectic manifolds*, J. Reine Angew. Math., **544** (2002), 181-222.

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
e-mail: marco.debernardi@mfn.unipmn.it
Dottorato in Matematica e Statistica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Pavia) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Roberto Paoletti (Università di Milano-Bicocca)