Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Salvatore Triolo

Moduli di Banach su $C*$-algebre: rappresentazioni Hilbertiane ed in spazi L_p non commutativi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 303–306.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_303_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 303-306

Moduli di Banach su C*-algebre: rappresentazioni Hilbertiane ed in spazi L_p non commutativi

SALVATORE TRIOLO

1. – Introduzione.

La teoria delle *-rappresentazioni delle *-algebre localmente convesse o normate costituisce un argomento classico di cui dà conto una vasta letteratura. Le C*-algebre costituiscono sicuramente la classe di *-algebre di Banach per la quale la teoria delle rappresentazioni fornisce, probabilmente, i risultati più profondi ed importanti per le applicazioni. Nel 1964 R. Haag e D. Kastler formularono, in un celebre lavoro, il cosiddetto approccio algebrico alle teorie quantistiche per sistemi con infiniti gradi di libertà. In esso, ad una regione limitata dello spazio delle configurazioni del sistema, si associa la C*-algebra delle *osservabili* locali. L'unione di tutte queste C*-algebre costistuice la C*-algebra delle osservabili del sistema. Sul finire degli anni '80, G.Lassner introdusse la nozione di *quasi *-algebra* nel tentativo di ampliare l'approccio di Haag e Kastler a sistemi fisici le cui osservabili, per la loro stessa natura, non si possono pensare come elementi di una C*-algebra. Un esempio tipico di quasi *-algebra è fornito dal completamento di una *-algebra localmente convessa la cui moltiplicazione non è congiuntamente continua. Se le rappresentazioni di C*-algebre coinvolgono solo *-algebre di operatori limitati, non altrettanto può dirsi per altre classi di *-algebre, anche normate o di quasi *-algebre.

Nell'ambito della linea di ricerca brevemente descritta sopra considereremo, nella prima sezione, una costruzione del tipo GNS per i moduli di Banach su C*-algebre nel tentativo di dare una rappresentazione di questi oggetti. Nella seconda parte orienteremo la nostra discussione su una certa classe di C*-bimoduli di Banach, chiamati CQ*-algebre. Dimostreremo un teorema di rappresentazione di un certo rilievo: ogni CQ*-algebra *fortemente *-semisemplice* può essere rappresentata da una CQ*-algebra di operatori misurabili nel senso di Segal.

Chiaramente, questo lavoro non vuole fornire una esposizione dettagliata delle idee sopra delineate e per maggiori dettagli rinviamo ai lavori [1], [2], [3], [4], [5].

2. – Rappresentazioni di alcuni C*-moduli di Banach.

L'ingrediente di base della nostra discussione è costituito da una classe di forme sesquilineari non-ovunque definite.

DEFINIZIONE 1. – *Sia $\mathcal{X}$ un modulo di Banach sinistro sulla C*-algebra $\mathcal{A}_\sharp$. Una forma sesquilineare positiva su $D(\varphi) \times D(\varphi)$, dove $D(\varphi)$ è un sottospazio di $\mathcal{X}$, tale che*

(i) *$D(\varphi)$ è un $\mathcal{A}_\sharp$-modulo sinistro;*
(ii) *$\varphi(ax, y) = \varphi(x, a^*y), \quad \forall a \in \mathcal{A}_\sharp,\ x, y \in D(\varphi)$,*

è chiamata un biweight modulare di $\mathcal{X}$. L'insieme di tutti i biweights modulari di $\mathcal{X}$ è indicato con $\mathcal{BW}(\mathcal{X})$.

TEOREMA 1. – *Per ogni $\varphi \in \mathcal{BW}(\mathcal{X})$, esistono uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$, un'applicazione lineare $\Phi_\varphi : D(\varphi) \to \mathcal{H}_\varphi$ e una *-rappresentazione limitata π_φ di $\mathcal{A}_\sharp$ in $\mathcal{H}_\varphi$ tale che:*

$\varphi(x, y) = \langle \Phi_\varphi(x), \Phi_\varphi(y) \rangle, \quad \forall x, y \in D(\varphi)$
$\varphi(ax, y) = \langle \pi_\varphi(a)\Phi_\varphi(x), \Phi_\varphi(y) \rangle, \quad \forall a \in \mathcal{A}_\sharp,\ x, y \in D(\varphi).$

Inoltre $(\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{A}_\sharp)$ può essere reso un $\mathcal{A}_\sharp$-modulo di Banach sinistro definendo la moltiplicazione del modulo nel modo seguente $a \cdot \xi = \pi_\varphi(a)\xi, \quad a \in \mathcal{A}_\sharp, \xi \in \mathcal{H}_\varphi$.

DIMOSTRAZIONE. – Poniamo

$$N_\varphi = \{x \in D(\varphi) :\ \varphi(x, x) = 0\} = \{x \in D(\varphi) :\ \varphi(x, y) = 0,\ \forall y \in D(\varphi)\}. \tag{1}$$

Sia $\mathcal{X}_\varphi := D(\varphi)/N_\varphi$ ed inoltre $\lambda_\varphi(x) := x + N_\varphi$, $x \in D(\varphi)$. Allora $\mathcal{X}_\varphi$ è un pre-Hilbert spazio rispetto al prodotto interno

$$\langle \lambda_\varphi(x), \lambda_\varphi(y) \rangle = \varphi(x, y), \quad x, y \in D(\varphi).$$

Denotiamo con $\mathcal{H}_\varphi$ il suo completamento. Chiaramente, l'applicazione $\Phi_\varphi : x \in D(\varphi) \to \lambda_\varphi(x) \in \mathcal{X}_\varphi \subset \mathcal{H}_\varphi$ è lineare.

Se $x \in N_\varphi$ allora $ax \in N_\varphi$, per ogni $a \in \mathcal{A}_\sharp$; quindi l'applicazione lineare

$$\pi_\varphi(a)\lambda_\varphi(x) = \lambda_\varphi(ax), \quad x \in D(\varphi) \tag{3}$$

è un operatore ben definito limitato in $\mathcal{X}_\varphi$ che si estende a tutto $\mathcal{H}_\varphi$. È facile provare che π_φ è una *-rappresentazione di $\mathcal{A}_\sharp$. ■

La terna $(\Phi_\varphi, \pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ è chiamata la costruzione GNS per φ.

È naturale chiedersi sotto quali condizioni una rappresentazione modulare (Φ, π) di $\mathcal{X}$ è continua.

TEOREMA 2. – *Sia $\mathcal{X}$ un modulo di Banach sinistro sulla C*-algebra $\mathcal{A}_\sharp$ e $\varphi \in \mathcal{BW}(\mathcal{X})$. Supponiamo che $D(\varphi) = \mathcal{X}$. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(i) *Esiste $\gamma > 0$ tale che $|\varphi(x, y)| \le \gamma \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in D(\varphi)$.*
(ii) *Se $(\Phi_\varphi, \pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ è la GNS costruzione per φ, allora Φ_φ è continua da $\mathcal{X}$ in $\mathcal{H}_\varphi$.*
(iii) *Esiste un'applicazione antilineare limitata $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^\sharp$ (lo spazio duale di $\mathcal{X}$) con le seguenti proprietà*

(iii.1) $(Tx)(x) \geq 0, \quad \forall x \in D(\varphi)$
(iii.2) $T(ax) = T(x) \circ a^*, \quad \forall a \in \mathcal{A}_\sharp, x \in D(\varphi)$
(iii.3) $\varphi(x, y) = (Ty)(x), \quad \forall x, y \in D(\varphi)$.

3. – Teorema di rappresentazione delle CQ*-algebre.

Una CQ*-algebra nasce dal completamento di una C*-algebra $\mathcal{A}_\sharp$ con unità rispetto ad una norma più debole $\|\cdot\|$ della norma C* che soddisfa certe proprietà di *accoppiamento* con la norma originale:

$$\|a\| \leq \|a\|_\sharp \tag{4}$$

$$\|a\| = \|a^*\| \tag{5}$$

$$\|ab\| \leq \|a\|_\sharp \|b\| \quad \forall a, b \in \mathcal{A}_\sharp. \tag{6}$$

Sia $(\mathcal{X}[\|\cdot\|], \mathcal{A}_\sharp[\|\cdot\|_\sharp])$ una CQ*-algebra e

$$\mathcal{T}(\mathcal{X}) = \{\Omega \in \mathcal{BW}(\mathcal{X}) : D(\Omega) = \mathcal{X}, \quad \Omega(x, x) = \Omega(x^*, x^*),\ \forall x \in \mathcal{X}\}. \tag{7}$$

Supponiamo che $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ sia sufficiente cioè $\Omega(x, x) = 0$, per ogni $\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$, implica $x = 0$. Sia $\pi : \mathcal{A}_\sharp \to \mathcal{M}$ la rappresentazione universale. Non è resstrittivo supporre che la C^*-algebra $\mathcal{M}$ sia un' algebra di von Neumann [2].

Per ogni forma sesquilineare $\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ definiamo su $\mathcal{M}$ la seguente traccia $\tau_\Omega(\pi(a)) := \Omega(a, e) \quad \forall a \in \mathcal{A}_\sharp$. Allora $\{\tau_\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})}$, è una famiglia di tracce normali finite sulla algebra di von Neumann $\mathcal{M}$. Poiché $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ è sufficiente, $\|X\|_2 = \sup\limits_{\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})} \tau_\Omega(|X|^p)^{1/p}$ è una norma su $\mathcal{M}$. Il completamento a spazio di Banach di $\mathcal{M}$ rispetto alla suddetta norma, $\mathcal{M}_2$, è costituito da operatori misurabili nel senso di Segal [1] [2] [3].

TEOREMA 3. – *Sia $(\mathcal{X}[\|\cdot\|], \mathcal{A}_\sharp[\|\cdot\|_\sharp])$ una CQ*-algebra con $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ sufficiente e con unità e. Sia inoltre π la rappresentazione universale di $\mathcal{A}_\sharp$ e sia $\pi(\mathcal{A}_\sharp) := \mathcal{M}$ una algebra di von Neumann. Allora esiste un monomorfismo $\Phi : x \in \mathcal{X} \to \Phi(x) := X \in \mathcal{M}_2$ con le seguenti proprietà:*

1. *Φ estende l'isometria costruita nel teorema di Gelfand Naimark;*
2. *$\Phi(x^*) = \Phi(x)^*, \quad \forall x \in \mathcal{X}$*
3. *$\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{X}$ tale che $x \in \mathcal{A}_\sharp$ o $y \in \mathcal{A}_\sharp$*
4. *se $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_\sharp)$ è fortemente regolare, cioè $|x| = \sup\limits_{\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})} \Omega(x, x)^{1/2}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$ allora Φ è un isomorfismo *-isometrico di $\mathcal{X}$ in $\mathcal{M}_2$.*

Dunque $\mathcal{X}$ può essere identificato con uno spazio di operatori misurabili nel senso di Segal.

DIMOSTRAZIONE. – Definiamo la funzione Φ: per ogni elemento $x \in \mathcal{X}$, esiste una successione $\{a_n\}$ di elementi di $\mathcal{A}_\sharp$ convergenti a x rispetto alla norma di $\mathcal{X}(\|\cdot\|)$. Sia $X_n = \pi(a_n)$, allora,

$$\|X_n - X_m\|_{2,\mathcal{T}(\mathcal{X})} = \sup_{\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})} \|\pi(a_n) - \pi(a_m)\|_{2,\Omega} = \tag{8}$$

$$= \sup_{\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{X})} [\Omega(|a_n - a_m|^2, e)]^{1/2} \leq \|a_n - a_m\| \to 0. \tag{9}$$

Sia X il $\|\cdot\|_{2,\mathcal{T}(\mathcal{X})}$-limite della successione (X_n) in $\mathcal{M}_2$. Definiamo $\Phi(x) := X$.

Φ è un monomorfismo*-isometrico di $\mathcal{X}$ in $\mathcal{M}_2$ che estende l'isometria di Gelfand Naimark e possiede le caratteristiche elencate prima. ■

Ringraziamenti: Ringrazio il Professor Camillo Trapani per il suo prezioso sostegno e solerte guida al mio lavoro durante i quattro anni del Dottorato. Un particolare ringraziamento anche al Professor Fabio Bagarello, per il suo appoggio morale e scientifico.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. TRIOLO, *Moduli di Banach su C*-Algebre: Rappresentazioni Hilbertiane ed in spazi L_p non commutativi*, Tesi di Dottorato.

[2] F. BAGARELLO, C. TRAPANI e S. TRIOLO, *Quasi *-algebras of measurable operators*, Studia Mathematica, **172** (2006), 289-305.

[3] C. TRAPANI, S. TRIOLO, *Representations of certain Banach C*-modules*, Mediterranean J. Math., **1** (2004), 441-461.

[4] F. BAGARELLO, C. TRAPANI e S. TRIOLO, *A note on faithful traces on a von Neumann algebra*, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **55** (2006), in stampa.

[5] I. E. SEGAL, *A non commutative extension of abstract integration*, Ann. Math., **57** (1953), 401-457.

Dipartimento di Matematica Università di Palermo
e-mail: salvo@math.unipa.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo XV
Direttore di Ricerca: Prof. Camillo Trapani, Università di Palermo