Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alberto Ferrero

Sulle equazioni quasilineari ellittiche con termini di reazione di tipo polinomiale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 239–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_239_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 239-242

Sulle equazioni quasilineari ellittiche con termini di reazione di tipo polinomiale

ALBERTO FERRERO

1. – Introduzione.

Questa tesi riguarda lo studio delle equazioni quasilineari ellittiche della forma

$$-\Delta_m u = f(u) \tag{1}$$

dove con $\Delta_m u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)$ denotiamo l'm-Laplaciano degenere mentre con f denotiamo una funzione dipendente soltanto da u essenzialmente di tipo polinomiale. Diversi tipi di problemi vengono trattati, sia su tutto $\boldsymbol{R}^n$ sia su domini limitati con condizioni al bordo di Dirichlet e Neumann. In ognuno di questi problemi è stata introdotta l'ipotesi $n > m > 1$. Sotto tale condizione risulta ben definito l'esponente critico di Sobolev $m^* = \dfrac{nm}{n-m}$. Per $m = 2$, è ben noto che la mancanza di compattezza per l'immersione $H^1 \subset L^{2^*}$ e le identità di tipo Pohozaev sono strettamente legate all'esistenza e non esistenza di soluzioni per equazioni semilineari ellittiche (si veda [1, 5]). Il nostro obiettivo è quello di chiarire che cosa significhi crescita critica e in che modo l'esponente critico di Sobolev 2^* venga coinvolto. Per capire meglio questi due fenomeni, ci proponiamo di studiare l'equazione piú generale (1) cercando di spiegare come l'esistenza delle sue soluzioni sia legata all'immersione di Sobolev $W^{1,m} \subset L^{m^*}$. Nella presente nota ci limiteremo ad enunciare alcuni dei risultati della tesi concernenti l'esistenza e la non esistenza di soluzioni dell'equazione (1) in $\boldsymbol{R}^n$. Verrà evidenziato come le ipotesi di tipo sottocriticitá non sono sempre necessarie per ottenere l'esistenza di soluzioni.

2. – Risultati di esistenza e comportamento asintotico per stati fondamentali in $\boldsymbol{R}^n$.

Consideriamo il problema modello

$$-\Delta_m u = f(u) \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^n. \tag{2}$$

Ci occuperemo dell'esistenza di stati fondamentali a simmetria radiale di (2) quando $n > m > 1$. Con stato fondamentale intendiamo una funzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$ non negativa, non banale, che risolve l'equazione (2) nel senso delle distribuzioni e che tende a zero per $|x| \to \infty$. Poichè da ora in poi ci occuperemo soltanto di soluzioni radiali di (2), con stato fondamentale intenderemo precisamente uno stato fondamentale a simmetria radiale.

È chiaro che i risultati di esistenza dipenderanno fondamentalmente dalla funzione f. In questa trattazione studieremo il caso in cui la funzione $f = f(s)$ sia negativa in un intorno destro di $s = 0$ e definitivamente positiva per s grande. Questo viene di solito chiamato *caso normale* in accordo con la notazione introdotta in [4]. Nel caso $n > m = 2$ sono stati dimostrati numerosi risultati di esistenza di stati fondamentali di (2) ottenuti sia con metodi variazionali sia con i così detti metodi di *shooting* per equazioni ordinarie. L'obiettivo principale è quello di estendere alcuni di questi risultati di esistenza (si veda H. Berestycki, P. L. Lions, Arch. Rat. Mech. Anal. 1983) al caso di un qualunque $m > 1$ (si veda [3]).

Introduciamo ora in modo rigoroso le ipotesi sulla funzione f. Supponiamo che f sia abbastanza regolare:

$$f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}[0, \infty), \qquad f(0) = 0. \tag{3}$$

Sia $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi di segno

$$\exists \zeta > 0 \ \text{ t.c. } \ f(s) > 0 \ \forall s \in [\zeta, \infty), \quad F(\zeta) = 0, \quad F(s) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < s < \zeta. \tag{4}$$

Infine introduciamo le seguenti condizioni di comportamento asintotico rispettivamente per $s \to 0^+$ e per $s \to +\infty$:

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s^{m^*-1}} \leq 0, \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^{m^*-1}} = 0. \tag{5}$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente

TEOREMA 1. – [3] *Supponiamo che valgano le ipotesi* (3)-(5). *Allora esiste uno stato fondamentale u di* (2) *tale che* $u \in D^{1,m}(\boldsymbol{R}^n)$.

Nel Teorema 1 abbiamo indicato con $D^{1,m}(\boldsymbol{R}^n)$ il completamento dello spazio $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ delle funzioni $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ a supporto compatto rispetto alla norma

$$\|w\|_{D^{1,m}} = \left(\int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla w|^m \, dx \right)^{1/m} \qquad \forall w \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

Vediamo di dare un'idea della dimostrazione. Definiamo sullo spazio $D^{1,m}(\boldsymbol{R}^n)$ i due funzionali

$$T(w) = \int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla w|^m dx \qquad V(w) = \int_{\boldsymbol{R}^n} F(w) \, dx; \tag{6}$$

è opportuno osservare che il funzionale V potrebbe non essere definito su tutte le funzioni $w \in D^{1,m}(\boldsymbol{R}^n)$. La soluzione dell'equazione (2) verrà determinata quale minimizzante del seguente problema

$$\min_{w \in \boldsymbol{K}} T(w) \tag{7}$$

dove

$$\boldsymbol{K} = \{w \in D^{1,m}(\boldsymbol{R}^n),\ F(w) \in L^1(\boldsymbol{R}^n),\ V(w) = 1\}. \tag{8}$$

L'ipotesi di sottocriticità all'infinito introdotta in (5) risulta essere per certi versi ottimale. Per chiarire meglio questo fatto consideriamo il problema modello

$$-\Delta_m u = -u^{q-1} + u^{p-1} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^n \tag{9}$$

con $1 < q < p$ in modo tale che il secondo membro dell'equazione risulti negativo in un intorno destro di zero e definitivamente positivo.

Grazie ai risultati di non esistenza contenuti in [4] sappiamo che l'equazione (9) non ammette stati fondamentali per $p \geq m^*$. D'altra parte l'esistenza di stati fondamentali per $p < m^*$ segue immediatamente dal Teorema 1. Il precedente esempio potrebbe fare pensare che la crescita critica della non-linearità $f(u)$ in (2) sia un limite invalicabile al di là del quale non sia possibile ottenere l'esistenza di soluzioni. Si tenga presente che $p = m^*$ è l'esponente massimale per l'immersione di Sobolev $D^{1,m}_{loc}(\boldsymbol{R}^n) \subset L^p_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ e che si potrebbero avere problemi utilizzando metodi di tipo variazionale come quello descritto in (6)-(8). Tuttavia, utilizzando metodi di *shooting*, è possibile dimostrare esistenza di stati fondamentali di (2) anche per alcune non-linearità $f(u)$ con crescita critica o supercritica come mostrato nel prossimo teorema.

TEOREMA 2. – [3] *Siano* $1 < m < r < m^* \leq q$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *sia*

$$f_\varepsilon(s) = -s^{m-1} + s^{r-1} + \varepsilon s^{q-1}.$$

Allora esiste $\varepsilon_1 > 0$ *tale che se* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *allora l'equazione*

$$-\Delta_m u = f_\varepsilon(u) \quad \textit{in } \boldsymbol{R}^n \tag{10}$$

ammette almeno uno stato fondamentale. Inoltre se $q > m^*$ *allora esiste* $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ *tale che se* $\varepsilon > \varepsilon_2$ *allora* (10) *non ammette alcun stato fondamentale.*

Per concludere, nell'ultima parte di questa nota ci occuperemo del seguente problema modello

$$-\Delta_m u = -\,\delta u^{q-1} + u^{p-1} \quad \text{in } \boldsymbol{R}^n \tag{11}$$

dove $\delta > 0, n > m > 1$ e $1 < q < p < m^*$.

Si vuole studiare il comportamento asintotico degli stati fondamentali di (11) al variare di δ e p. Sappiamo che (11) ammette un unico stato fondamentale (radiale) per ogni δ, q, p nelle ipotesi sopra riportate (si veda J. Serrin, M. Tang, Indiana Univ. Math. J. 2000). D'altra parte se $p = m^*$ e $\delta > 0$ o $\delta = 0$ e $p \in (1, m^*)$ allora (11) non ammette stati fondamentali (si vedano rispettivamente [4] e W. M. Ni, J. Serrin, Accad. Naz. Lincei, Atti dei convegni, 1986). Se invece supponiamo che $p = m^*$ e $\delta = 0$ è ben noto che (11) ammette una famiglia di stati fondamentali U_d dipendente dal parametro $d > 0$ con d tale che $U_d(0) = d$.

Ci proponiamo di capire che cosa succede agli stati fondamentali di (11) quando $p \uparrow m^*$ e/o $\delta \downarrow 0$. Vale il seguente risultato:

TEOREMA 3. – [2] *Siano* $1 < q < p < m^*, \delta > 0$ *e sia* u *l'unico stato fondamentale di* (11).

(i) *Sia* $\delta = 1$ *fissato e sia* $\varepsilon = m^* - p$. *Allora esiste una costante* $\upsilon_{n,m}$ *dipendente soltanto da* n, m *tale che*

$$u^{m^*} \to \upsilon_{n,m}\delta_0 \quad e \quad |\nabla u|^m \to \upsilon_{n,m}\delta_0 \quad per \quad \varepsilon \to 0^+$$

nel senso delle distribuzioni dove δ_0 *è la misura di Dirac concentrata in* $x = 0$.

(ii) *Sia* $\delta > 0$ *con* $1 < q < p < m^*$ *fissati. Allora*

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |u(x)| \to 0 \quad per \quad \delta \to 0^+.$$

Si possono osservare nei punti (i), (ii) del Teorema 3 due fenomeni diametralmente opposti: *concentrazione della massa* della soluzione intorno a $x = 0$ e *schiacciamento a zero* rispettivamente per $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta \downarrow 0$.

Se invece $\varepsilon \downarrow 0$ e $\delta = \delta_d(\varepsilon) \downarrow 0$ con $\delta_d(\varepsilon)$ scelta opportunamente allora u converge uniformemente in $\boldsymbol{R}^n$ ad una delle funzioni U_d precedentemente citate (si veda il Teorema 7 in [2]). Tale scelta di $\delta_d(\varepsilon)$ fa sì che i due fenomeni di *concentrazione* e *schiacciamento* si bilancino vicendevolmente.

Il Teorema 3 ha l'obiettivo di dare un parziale chiarimento ai fenomeni di esistenza e non esistenza di stati fondamentali nelle situazioni limite sopra descritte.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS e L. NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[2] A. FERRERO e F. GAZZOLA, *Asymptotic behavior of ground states of quasilinear elliptic problems with two vanishing parameters, Part III*, J. Diff. Eq., **198** (2004), 53-90.

[3] A. FERRERO e F. GAZZOLA, *On subcriticality assumptions for the existence of ground states of quasilinear elliptic equations*, Adv. Diff. Eq., 8 (2003), 1081-1106.

[4] W. M. NI e J. SERRIN, *Non existence theorems for quasilinear partial differential equations*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Series II, 8 (1985), 171-185.

[5] S. J. POHOZAEV, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady, **6** (1965), 1408-1411.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: ferrero@mail.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano Università) – Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Filippo Gazzola, Politecnico di Milano