
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ILARIA FRAGALÀ

Fenomeni di concentrazione per energie di tipo Ginzburg-Landau

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-B (2005),
n.2, p. 397–414.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_397_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_397_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fenomeni di concentrazione per energie di tipo Ginzburg-Landau.

ILARIA FRAGALÀ (*)

Summary. – *We discuss the asymptotic behaviour of energies of Ginzburg-Landau type, for maps from $\mathbb{R}^{n+k}$ into $\mathbb{R}^k$, and when the growth exponent p is strictly larger than k . We illustrate a compactness and Γ -convergence result, with respect to a suitable topology on the Jacobians, seen as n -dimensional currents. The limit energy is defined on the class of n -integral boundaries M , and its density depends locally on the multiplicity of M through a family of optimal profile constants.*

Sunto. – *Si discute il comportamento asintotico di energie di tipo Ginzburg-Landau, per funzioni da $\mathbb{R}^{n+k}$ in $\mathbb{R}^k$, e sotto l'ipotesi che l'esponente di crescita p sia strettamente maggiore di k . In particolare, si illustra un risultato di compattezza e di Γ -convergenza, rispetto a una opportuna topologia sui Jacobiani, visti come correnti n -dimensionali. L'energia limite è definita sulla classe degli n -bordi interi M , e la sua densità dipende localmente dalla molteplicità di M tramite una famiglia di costanti di profilo ottimale.*

1. – Introduzione.

Lo studio di fenomeni di concentrazione da un punto di vista variazionale induce a investigare il comportamento asintotico, al tendere del parametro positivo ε a 0, dei minimi di funzionali del tipo

$$(1) \quad F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^p + \frac{1}{\varepsilon^p} W(u) \right] dx, \quad u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k),$$

dove $n \geq 0$ e $k \geq 1$ sono interi, Ω è un dominio limitato e regolare in $\mathbb{R}^{n+k}$, $p \geq 1$ è un esponente reale, e W è un potenziale non negativo su $\mathbb{R}^k$, nullo solo sulla sfera unitaria S^{k-1} .

Chiaramente, dato che $F_\varepsilon(u)$ è non negativo per ogni funzione ammissibile u , e si annulla su tutte le funzioni costanti di modulo 1, quando si parla di mini-

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

mi di F_ε si sottintende che nel processo di minimizzazione si imponga una qualche condizione aggiuntiva che renda il problema non ovvio, tipicamente un dato al bordo topologicamente non banale. A quel punto scatta una competizione tra i due addendi dell'energia: infatti il secondo termine tende a privilegiare le funzioni di modulo 1, ma la presenza del dato al bordo costituisce un'ostruzione topologica al fatto che i minimi abbiano modulo 1 ovunque, e quindi il primo termine interviene a penalizzare la variazione spaziale di u . Al tendere di ε a 0, ci si aspetta che i minimi assumano valori in modulo vicini a 1 tranne che su un insieme singolare di misura piccola, in cui si ha concentrazione dell'energia.

Nel caso *scalare* $k = 1$ (in cui W si annulla solo in -1 e $+1$), il comportamento asintotico dei funzionali F_ε per $\varepsilon \rightarrow 0$ è ben noto. Negli anni '70, utilizzando la tecnica di Γ -convergenza appena introdotta da De Giorgi e Franzoni [9], Modica e Mortola dimostrarono che i minimi di F_ε nella classe di funzioni con media assegnata convergono a un multiplo dell'area di una n -superficie minima [17]. La costante moltiplicativa è determinata da un problema di «profilo ottimale», che seleziona la transizione di minimo costo tra i due pozzi del potenziale (si veda anche [1]). Negli anni successivi, numerose generalizzazioni del teorema di Modica e Mortola sono apparse in letteratura; in particolare, la scelta dell'esponente di crescita p non risulta essere di importanza rilevante ai fini del problema.

Nel caso *vettoriale* $k \geq 2$ la situazione è molto più delicata. Negli anni '90 Bethuel, Brezis e Hélein hanno ottenuto numerosi risultati studiando l'equazione di Eulero dei funzionali di Ginzburg-Landau che si ottengono prendendo $n = 0$ e $p = k = 2$ in (1.1) [5]. Solo recentemente, Alberti, Baldo e Orlandi [3] (e indipendentemente Jerrard e Sonner per $k = 2$ [16]) sono riusciti tramite un approccio variazionale a descrivere il comportamento asintotico di F_ε per $n \geq 0$ e $k \geq 2$ arbitrari, e $p = k$. Quando il dato al bordo è singolare, l'energia si concentra vicino a una « n -superficie minima generalizzata» (nel senso delle correnti). Tale concentrazione invece *non* avviene per $p < k$: pertanto, il caso $p = k$ finora trattato in letteratura può definirsi «critico».

In questo articolo si presentano dei nuovi risultati relativi al caso «super-critico» $p > k (\geq 2)$, illustrando in particolare come nel funzionale limite intervenga una famiglia di costanti di «profilo ottimale», ottenute come soluzioni di certi problemi di minimo su classi di funzioni di grado assegnato. La comparsa di problemi di profilo ottimale in ambito vettoriale sembra essere un fatto molto originale, e costituisce una differenza sostanziale rispetto al caso $p = k$. Di conseguenza, ciò apre una serie di problemi e questioni, collegate ad esempio al tipo di dipendenza delle costanti di profilo dal grado, o al comportamento asintotico delle singolarità.

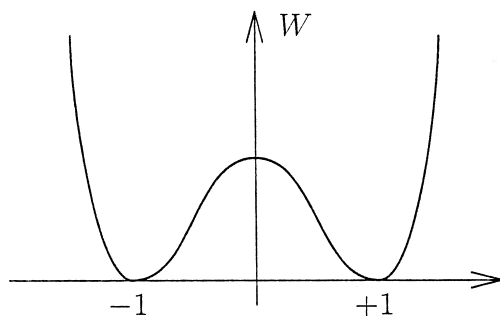
I risultati di questa ricerca sono stati ottenuti nell'anno accademico 2003/04 in collaborazione con Niccoló Desenzani, dell'Università di Milano, e saranno parte della sua Tesi di Dottorato. La presentazione in questo articolo intende

mantenere il carattere discorsivo e non specialistico della comunicazione tenuta presso il XVII convegno UMI il giorno 11 settembre 2004 a Milano. Si omettono quindi tutti i dettagli di tipo tecnico negli enunciati (a costo di commettere qualche imprecisione) e le loro dimostrazioni, facendo per entrambi riferimenti a [10]. Segnaliamo anche che le origini di questo argomento di ricerca sono rintracciabili nel precedente lavoro [3] di Alberti, Baldo, e Orlandi. In particolare, i nostri ringraziamenti vanno a Giovanni Alberti per averci indicato il problema, e per le molte preziose conversazioni.

I contenuti sono organizzati in tre ulteriori sezioni, dedicate rispettivamente al caso scalare, al caso di Ginzburg-Landau, e al caso vettoriale in dimensione arbitraria; per quest'ultimo, si suddivide il problema in caso critico e caso supercritico, cercando di illustrare le principali differenze.

2. – Il caso scalare.

Quando nei funzionali F_ε si prende $k = 1$, l'insieme degli zeri del potenziale W è dato dai numeri reali di modulo 1, ovvero W è un potenziale cosiddetto a doppio pozzo.



In questo contesto, la scelta dell'esponente di crescita p si rivela sostanzialmente irrilevante ai fini del problema, e quindi per semplicità possiamo concentrare l'attenzione sul caso quadratico in cui $p = 2$, e i funzionali F_ε sono definiti nel modo seguente, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$(2) \quad F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u) \right] dx, \quad u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}).$$

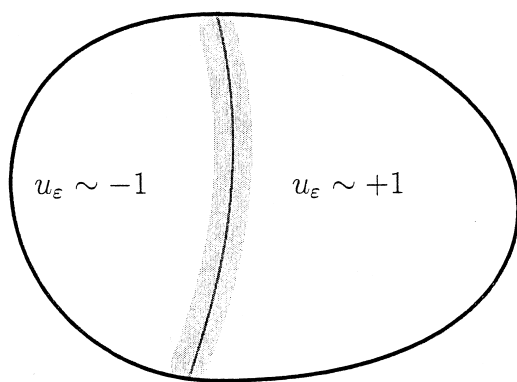
La motivazione fisica per studiare questo tipo di funzionali fu fornita da un modello di Cahn e Hilliard per la transizione di fase di fluidi immiscibili [7]: sicco-

me in questo modello $u(x)$ rappresenta la densità in di volume nel punto x di una delle due fasi (fasi che corrispondono ai due pozzi del potenziale), il vincolo che si impone per rendere la minimizzazione non banale è un vincolo di volume

$$(3) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = V,$$

per una certa costante V . Se V è scelta nell'intervallo *aperto* $(-1, 1)$, questo vincolo forza la presenza di entrambe le fasi, e perciò rende il processo di minimizzazione non banale.

Al tendere di ε a 0, ci si aspetta quindi che siano presenti entrambe le fasi, separate da una sottile intercapedine T di spessore δ attorno a una ipersuperficie S , e che in questa intercapedine i minimi u_{ε} abbiano gradiente di ordine $1/\delta$.



Quindi euristicamente le energie dei minimi saranno date dal volume di T per il contributo di gradiente (dell'ordine di $1/\delta^2$) più il contributo di potenziale (dell'ordine di $1/\varepsilon^2$); ora, se approssimiamo il volume di T come δ per l'area di S e ottimizziamo rispetto al parametro di spessore δ , otteniamo che il termine principale dello sviluppo di $F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$ è ε^{-1} per l'area di S :

$$(4) \quad F_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \sim \text{vol}(T) \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \sim \frac{\text{area}(S)}{\varepsilon}.$$

Da questo conto molto qualitativo, ci si aspetta che l'energia limite dovrà essere finita solo per le funzioni che assumono unicamente i valori ± 1 , e sarà proporzionale all'area dell'interfaccia tra le due fasi tramite una costante τ che ha il significato fisico di una tensione superficiale.

Per capire invece qual è il significato *variazionale* della costante τ , possiamo fare qualche altra osservazione di tipo qualitativo. Innanzitutto, visto che l'insieme singolare atteso è n -dimensionale, e lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^{n+1}$, l'«attraversamento» dell'insieme singolare da parte dei minimi avverrà in *una* dimensione. Per questo possiamo dire che la natura del problema è sostanzialmente unidimensionale, e per coglierne la sostanza possiamo limitarci a considerare il caso in cui $n = 0$, e quindi le funzioni ammissibili u sono reali di variabile reale. Consideriamo allora la più semplice singolarità 0-dimensionale possibile, ovvero una massa di Dirac, posta ad esempio nell'origine, e prendiamo una funzione u che abbia questa singolarità come gradiente distribuzionale; quindi, a meno di costante moltiplicativa, possiamo prendere la funzione

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

La domanda di base che ci poniamo è:

«qual è asintoticamente il minimo costo, in termini delle energie F_ε , per approssimare questa funzione u tramite una successione $\{u_\varepsilon\}$ di funzioni regolari?»

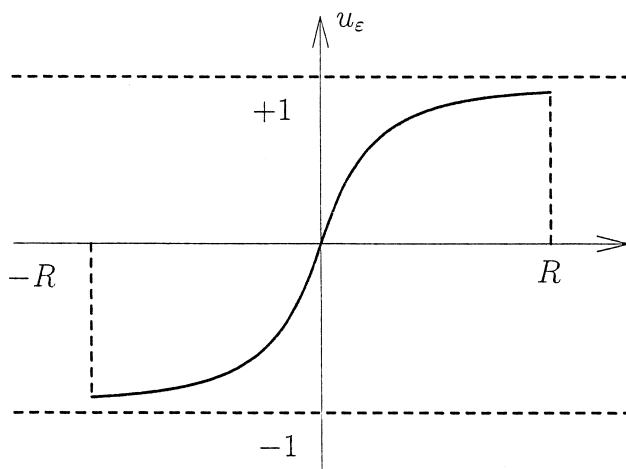
Per rispondere a questa domanda bisogna osservare che vale la seguente fondamentale proprietà di riscaldamento, che si verifica facilmente tramite cambio di variabile:

$$(5) \quad E_\varepsilon := \varepsilon F_\varepsilon \Rightarrow E_\varepsilon(u(x), I) = E_1\left(u(\varepsilon x), \frac{I}{\varepsilon}\right).$$

(Qui e nel seguito, indichiamo con $E_\varepsilon(\cdot, I)$, la localizzazione di $E_\varepsilon(\cdot)$ a un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$, ossia il funzionale che si ottiene restringendo ad I il dominio di integrazione di E_ε .)

Ora, se u_ε è una qualunque successione di funzioni regolari che approssima la nostra funzione di salto u , possiamo immaginare che, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, ci sarà un intervallo I centrato nell'origine su cui le funzioni u_ε «salteranno circa da -1 a 1 », ovvero esisterà un R tale che

$$u_\varepsilon(x) \sim \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq R \\ -1 & \text{se } x < -R. \end{cases}$$



Dunque ci si aspetta che l'energia $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$ sia concentrata sull'intervallo $I = (-R, R)$, e, essendo uguale per la proprietà di riscaldamento all'energia $E_1(u_\varepsilon(\varepsilon x), I/\varepsilon)$, risulti asintoticamente minorata da una costante positiva τ (indipendente da ε). Tale costante è definita tramite un problema variazionale ausiliario, di solito detto *problema di profilo ottimale*:

$$(6) \quad \tau := \inf \left\{ E_1(u, R), u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(x) = \pm 1 \right\}.$$

D'altra parte, per trovare una successione approssimante il cui costo asintotico in energia sia esattamente τ , basta prendere $u_\varepsilon(x) = \gamma(x/\varepsilon)$, dove γ è una soluzione del problema di profilo ottimale. (Si può dimostrare che tale soluzione esiste; si osservi comunque che, per costruire una successione $\{u_\varepsilon\}$ con la proprietà voluta, basta lavorare con una quasi-soluzione, ovvero con una successione minimizzante per il problema di profilo).

In conclusione, possiamo dire che *la costante τ rappresenta il minimo costo in energia per ogni transizione di fase da -1 a 1* . Perciò è ragionevole aspettarsi che l'energia limite sia data nel caso $n = 0$ da τ per il numero di salti della funzione limite u , e nel caso $n > 0$ da τ per la misura n -dimensionale dell'insieme di salto di u .

Per dimostrare queste deduzioni qualitative in modo rigoroso, lo strumento matematico adeguato fu fornito dalla Γ -convergenza introdotta negli anni '70 da De Giorgi e Franzoni [9], e oggi divenuta ormai una tecnica insostituibile del Calcolo delle Variazioni. Rimandiamo al trattato [8] e alla più recente monografia [6] per la definizione, la teoria e le numerose applicazioni della Γ -convergenza. Ci limitiamo qui a ricordare che il suo fondamentale significato variazionale risiede nella seguente proprietà di convergenza dei minimi:

«se una successione di funzionali F_ε semicontinui inferiormente definiti su uno spazio topologico X e a valori in $[0, +\infty]$ Γ -converge a un funzionale limite F , se $\{u_\varepsilon\}$ è una successione di punti di minimo per F_ε , e se $\{u_\varepsilon\}$ converge a una funzione u in X , allora u è un minimo per il Γ -limite F .»

In particolare, dall'ultima condizione necessaria per dedurre che u minimizza il funzionale limite, e cioè il fatto che la successione dei minimi $\{u_\varepsilon\}$ risulti effettivamente convergente a una qualche funzione u , si capisce che un enunciato di Γ -convergenza non ha nessun significato se non è accompagnato da un enunciato di compattezza. Per *proprietà di compattezza* intendiamo che ogni successione di funzioni $\{u_\varepsilon\}$ con energie equilimitate risulti precompatta in X .

È anche importante osservare che possono cambiare drasticamente la forma del Γ -limite di una successione di funzionali $\{F_\varepsilon\}$ sia la scelta di diverse *topologie* sullo spazio di funzioni X , sia la scelta di diversi *riscaldamenti* di F_ε . Infatti, se moltiplichiamo ciascun F_ε per una costante positiva λ_ε , chiaramente non si alterano i minimi, ma d'altra parte una scelta più o meno opportuna della successione $\{\lambda_\varepsilon\}$ può fornire un Γ -limite interessante o, viceversa, banale. In particolare, per i funzionali di Cahn-Hilliard, per l'espansione asintotica (4) e per la proprietà di riscaldamento (5), la scelta più opportuna è quella di considerare i funzionali E_ε ottenuti moltiplicando F_ε per ε .

TEOREMA 1 (Modica-Mortola). – *Per i funzionali E_ε definiti come sopra, e considerati sullo spazio delle funzioni ammissibili munito della norma L^1 , vale la proprietà di compattezza. Inoltre E_ε Γ -convergono a un'energia E che risulta data, per le funzioni u che prendono solo i valori ± 1 , dalla costante τ definita in (6) per la misura n -dimensionale $\mathcal{H}^n$ dell'insieme di salto Su di u . (Più precisamente, il dominio di finitezza di E è lo spazio delle funzioni BV a valori in $\{-1, 1\}$, per le quali il gradiente distribuzionale Du è una misura, e l'insieme Su può essere opportunamente definito usando la teoria geometrica della misura [4]: in particolare, gli insiemi $\{x : u(x) = \pm 1\}$ risultano insiemi di perimetro finito, e $\mathcal{H}^n(Su)$ è esattamente il loro perimetro (ovvero metà della variazione totale della misura Du).*

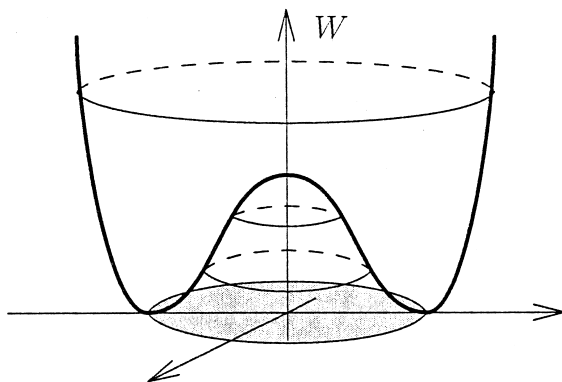
Questo risultato ci dice che, nel caso scalare, i minimi dei funzionali F_ε approssimano i minimi del funzionale dell'area per ipersuperfici che dividono il dominio Ω in regioni di volume assegnato (si ricordi il vincolo in (3)). Sempre relativamente al caso scalare, svariate estensioni del Teorema 1 sono state date in letteratura da parte di numerosi autori; ricordiamo tra gli altri Owen-Sternberg, Bouchitté, Barroso-Fonseca, Alberti-Bellettini (per le relative referenze, si veda ad esempio la bibliografia di [1]).

3. – Il caso di Ginzburg-Landau.

Questo caso corrisponde alla scelta $k = p = 2$ e $n = 0$ in (1). I funzionali F_ε sono quindi definiti nel modo seguente, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$(7) \quad F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u) \right] dx, \quad u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2).$$

Ora il potenziale W si annulla sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^2$, e la motivazione fisica viene dalla teoria dei superconduttori e dei superfluidi, da cui il nome di funzionali di Ginzburg-Landau [11, 12].



In particolare, il vincolo che si introduce per rendere il problema non banale è un dato al bordo g nello spazio delle tracce $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$, dato al bordo che in qualche modo risulta sostituire la presenza di un termine di campo magnetico trascurato nello scrivere l'energia. Quindi il problema di minimo è posto sullo spazio $H_g^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ dato dalle funzioni $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ che soddisfano il dato al bordo $u = g$ su $\partial\Omega$:

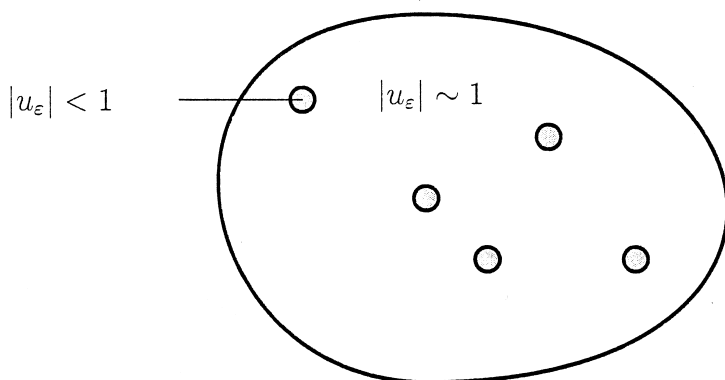
$$(8) \quad \min \{ F_\varepsilon(u) : H_g^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \}.$$

Il comportamento asintotico dei minimi in (8) risulta dipendere in modo cruciale dal grado $\deg(g, \partial\Omega)$ del dato al bordo g sulla frontiera di Ω . Più precisamente:

– quando $\deg(g, \partial\Omega) = 0$, lo spazio $H_g^1(\Omega; \mathbb{S}^1)$ dato dalle funzioni $H_g^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ che prendono valori nella sfera unitaria, risulta non vuoto: di conseguenza le energie dei minimi in (8) risultano equilimitate, e a meno di sottosuccessioni i minimi convergono debolmente a una soluzione del problema di minimo

$$(9) \quad \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 : u \in H_g^1(\Omega; \mathbb{S}^1) \right\};$$

– quando $\deg(g, \partial\Omega) \neq 0$, il problema limite in (9) non ha più senso: infatti, se Ω è semplicemente connesso, la non esistenza di un'omotopia tra il dato al bordo e una funzione costante permette di dimostrare che lo spazio $H_g^1(\Omega, \mathbb{S}^1)$ risulta vuoto. In effetti in questo caso le energie dei minimi non risultano equilibrate, e il comportamento qualitativo atteso è che l'energia diverga e si vada a concentrare su un insieme di misura piccola. Siccome il ruolo di questo insieme è in pratica quello di distruggere la semplice connessione di Ω (invece della connessione come avviene nel caso scalare), in prima approssimazione è ragionevole pensare che l'insieme singolare sia fornito da un numero imprecisato di dischi di raggio infinitesimo.



In effetti uno dei risultati principali dimostrati da Béthuel, Brezis e Hélein nella loro fondamentale monografia sui funzionali di Ginzburg-Landau ci conferma questa aspettativa.

TEOREMA 2 (Béthuel-Brezis-Hélein). – Se Ω è semplicemente connesso, esistono d punti isolati $\{x_1, \dots, x_d\}$ in Ω (dove $d = \deg(g, \partial\Omega)$), esiste una funzione $u : \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_d\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ smooth e armonica, ed esiste una sottosuccessione $\{u_{\varepsilon_k}\}$ dei minimi in (8) tali che $\{u_{\varepsilon_k}\}$ converge a u al di fuori dei punti x_i , ad esempio in tutte topologie $C_{\text{loc}}^k(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_d\})$. Inoltre, si può dire di più sul comportamento delle singolarità x_i , che vengono anche chiamate vortici di Ginzburg-Landau:

(i) tutti gli x_i sono singolarità di grado $+1$ (con questo intendendo che in un loro intorno la funzione limite u si comporta asintoticamente come $u(x) \sim x - x_i / |x - x_i|$);

(ii) al tendere di ε a 0, gli x_i sono soggetti a una sorta di effetto di confinamento, per cui tendono a stare il più possibile lontani da $\partial\Omega$, e a una sorta di effetto repulsivo, per cui tendono a respingersi tra di loro.

La dimostrazione di questo risultato, come di quasi tutti gli altri dimostrati

dagli stessi Autori sui vortici di Ginzburg-Landau, si basa su metodi di equazioni alle derivate parziali applicati all'equazione di Eulero dei funzionali F_ε , combinati con alcuni metodi di analisi complessa. Queste tecniche *non* risultano adattabili al caso di dimensione arbitraria.

4. – Il caso vettoriale in dimensione arbitraria.

In questo caso il problema consiste nello studio del comportamento asintotico dei funzionali F_ε definiti nel modo seguente, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$, essendo $n \geq 0$ e $k \geq 2$ interi arbitrari:

$$(10) \quad F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^p + \frac{1}{\varepsilon^p} W(u) \right] d, \quad u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k).$$

Similmente al caso di Ginzburg-Landau, si considera il problema di minimo per tali funzionali F_ε soggetto a un dato al bordo di tipo $u = g$ su $\partial\Omega$, con g nello spazio delle tracce $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega, \mathbb{S}^{k-1})$.

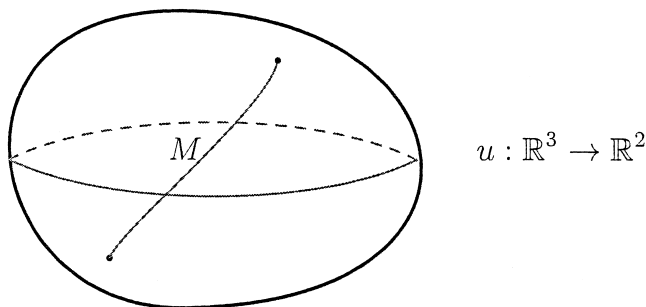
In tale generalità sembra più ragionevole affrontare il problema tramite un approccio di tipo variazionale. Tuttavia, ottenere un risultato di Γ -convergenza per il caso vettoriale è notevolmente più complicato rispetto al caso scalare, il che spiega almeno in parte i quasi 30 anni intercorsi tra il teorema di Modica-Mortola e il primo risultato di convergenza variazionale in ambito vettoriale.

Cerchiamo innanzitutto di capire qual è il ruolo dell'esponente p e qual è il comportamento qualitativo atteso dai minimi. Per $p < k$, qualunque sia il dato al bordo fissato, lo spazio $W_g^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{k-1})$ dato dalle funzioni di $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ che allo stesso tempo soddisfano il dato al bordo e prendono valori in $\mathbb{S}^{k-1}$, risulta essere non vuoto [13]. Di conseguenza, le energie dei minimi risultano equilimitate, e a meno di sottosuccessioni i minimi di F_ε convergono a una funzione p -armonica a valori nella sfera unitaria, ossia a una soluzione del problema di minimo

$$(11) \quad \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p : u \in W_g^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{k-1}) \right\}.$$

Per questo motivo, chiamiamo l'esponente $p = k$ *critico*, in quanto è il più piccolo esponente per cui si ha concentrazione dell'energia. Infatti, se $p \geq k$ e il dato al bordo è «singolare» (in un senso opportuno per il quale rimandiamo a [3]), lo spazio $W_g^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{k-1})$ risulta vuoto, e in particolare il problema limite in (11) non ha più senso. Ci si aspetta quindi che le energie dei minimi divergano al tendere di ε a 0, e che i minimi convergano in qualche senso a una funzione u regolare al di fuori di un insieme singolare di dimensione n (ricordiamo che n è la differenza di dimensione tra lo spazio di partenza e quello di arrivo). La presenza di tale insieme singolare è imposta dalle singolarità del dato al

bordo. Ad esempio, la figura qui sotto si riferisce al caso in cui u va da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, per cui $k = 2$ e $n = 1$; se il dato al bordo ha due singolarità 0-dimensionali su $\partial\Omega$, l'insieme singolare limite atteso è una «varietà unidimensionale» M che collega i due punti di singolarità di g .



Resta da capire che tipo di funzionale venga minimizzato dalla «varietà» M , e per analogia col caso scalare ci si aspetta che il funzionale limite abbia qualcosa a che vedere con l'area. Per chiarire questa analogia tramite un approccio di tipo variazionale, uno dei passi fondamentali consiste nel capire come si possa descrivere l'insieme singolare di una funzione vettoriale a valori nella sfera unitaria. Per far questo, bisogna passare dalla nozione di gradiente distribuzionale necessaria per studiare il problema nel caso scalare, a quella di jacobiano distribuzionale, introdotta da Ball e poi studiata anche da altri Autori, tra cui Müller, Jerrard-Soner (si veda [15] e le referenze incluse). Se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}; \mathbb{R}^k)$, e indichiamo con dy la k -forma di volume standard su $\mathbb{R}^k$, il jacobiano classico di u si ottiene come pull-back di dy tramite u :

$$(12) \quad Ju := u^\#(dy) = du^1 \wedge \dots \wedge du^k.$$

Questa definizione continua ad essere ben posta, come k -forma con coefficienti in L^1 , finché u è di classe $W^{1,k}$. Ora, se osserviamo che possiamo scrivere dy come il differenziale di una $(k-1)$ -forma, e precisamente

$$dy = d \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} y_i \widehat{dy}_i \right\} \quad (\text{dove } \widehat{dy}_i := dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{i-1} \wedge dy_{i+1} \wedge \dots \wedge dy_k)$$

e che in (12) possiamo scambiare l'ordine tra pull-back e differenziale esterno, otteniamo una nuova nozione di jacobiano:

$$(13) \quad Ju = du^\# \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} y_i \widehat{dy}_i \right\}.$$

La definizione in (13) coincide con quella in (12) per u di classe $W^{1,k}$;

ma, a differenza di (12), la (13) continua ad avere senso, come k -forma a coefficienti *distribuzionali*, per tutte le funzioni u limitate di classe $W^{1, k-1}$.

L'esempio tipico è la funzione $x/|x|$, da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^k$, il cui jacobiano classico non ha senso, mentre il jacobiano distribuzionale è concentrato nell'insieme singolare di u , ed infatti si può facilmente verificare usando la (13) che Ju è dato da una massa di Dirac in 0, con molteplicità uguale alla misura α_k della palla unitaria di $\mathbb{R}^k$.

Più in generale vale questo fatto: se u è a valori nella sfera unitaria, per interpretare in modo più geometrico possibile il suo jacobiano, conviene applicare alla k -forma Ju una sorta di operatore $\star$ di Hodge, che identifica k -covettori con n -vettori, e quindi k -forme con n -correnti. Le n -correnti sono sostanzialmente il duale delle n -forme, e per i nostri scopi possono essere pensate come insiemi n -rettificabili, muniti di un'orientazione e di una molteplicità. In particolare, siccome la k -forma Ju è un differenziale, l'operatore $\star$ di Hodge ha la proprietà di trasformarla in un n -bordo, ovvero in una n -corrente senza bordo che quindi a sua volta è bordo (in senso distribuzionale). Questo n -bordo risulta supportato nell'insieme singolare di u , e la sua molteplicità risulta data da α_k per un intero, che corrisponde sostanzialmente al «grado di avvolgimento» di u attorno al suo insieme singolare.

Per la teoria delle correnti, facciamo riferimento a [18], mentre per la definizione precisa dell'operatore $\star$, si veda [3].

In conclusione possiamo dire che, nel caso vettoriale, l'analogo delle funzioni BV sarà dato dalle funzioni dette da Jerrard e Sonner BkV [15], il cui jacobiano invece di essere una distribuzione qualunque è una misura; un ruolo molto simile a quello degli insiemi di perimetro finito sarà quello delle funzioni BkV a valori nella sfera unitaria; mentre l'analogo della variazione totale del gradiente distribuzionale sarà dato dalla massa del jacobiano distribuzionale, intesa nel senso delle correnti (cioè l'integrale sul supporto della molteplicità presa in modulo). In particolare possiamo affermare che

«la massa del jacobiano si candida in modo naturale a Γ -limite nel caso vettoriale.»

Per capire se questo candidato è ragionevole, possiamo fare qualche conto euristico.

Innanzitutto, iniziamo ad osservare che l'insieme singolare atteso è n -dimensionale e lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^{n+k}$, dunque l'«avvolgimento» dei minimi attorno all'insieme singolare avverrà in k dimensioni. Per questo motivo, come nel caso scalare la natura del problema era sostanzialmente unidimensionale, ora possiamo dire che essa è sostanzialmente k -dimensionale. Perciò di nuovo possiamo inizialmente limitarci a considerare il caso in cui $n = 0$, e quindi le

funzioni ammissibili u vanno da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^k$. Di nuovo, consideriamo la più semplice singolarità 0-dimensionale possibile, ovvero una massa di Dirac posta nell'origine, e prendiamo una funzione u che abbia questa volta tale singolarità come *jacobiano* distribuzionale. A meno della costante moltiplicativa α_k , possiamo prendere la funzione $u(x) = x/|x|$. Di nuovo, la domanda di base che ci poniamo è:

«qual è asintoticamente il minimo costo, in termini delle energie F_ε , per approssimare questa funzione u tramite una successione $\{u_\varepsilon\}$ di funzioni regolari?»

Ora, se $\{u_\varepsilon\}$ è una qualunque successione di funzioni regolari che approssima la nostra funzione singolare u , possiamo immaginare che, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, ci sarà una pallina B_r di raggio r centrata nell'origine (su cui si concentra l'energia F_ε) tale che, su ∂B_r , u_ε avranno modulo vicino a 1 e grado 1. (Quest'ultimo perché stiamo considerando una singolarità di grado 1: se fossimo partiti da una singolarità di grado d , le u_ε avrebbero avuto grado d). Quindi la nostra domanda diventa:

«come possiamo stimare dal basso le energie di u_ε sulla pallina, sapendo che il grado sul bordo è bloccato uguale ad 1?»

A questo punto il caso critico e il caso supercritico si dividono, perché la risposta alla domanda sopra è fondamentalmente diversa nei due casi.

Caso critico.

Per $p = k$, la risposta alla nostra domanda è fornita da un fondamentale risultato di Jerrard [14]. Infatti Jerrard ha dimostrato una stima molto delicata che, riportata in modo estremamente approssimativo, ci dice che le energie di u_ε sulla pallina si stimano asintoticamente dal basso con $|\log \varepsilon|$ per una costante dimensionale β_k :

$$(14) \quad F_\varepsilon(u_\varepsilon, B_r) \geq \beta_k |\log \varepsilon|.$$

(Da osservare che, se le funzioni u_ε avessero avuto grado d su ∂B_r , il membro destro in (14) sarebbe stato moltiplicato per $|d|$.)

La stima in (14) ci suggerisce che i funzionali riscaldati giusti da considerare siano i funzionali E_ε ottenuti moltiplicando F_ε per $|\log \varepsilon|^{-1}$, e che l'energia limite pagata da una singolarità di grado 1 sia la costante dimensionale β_k . Analogamente, se avessimo avuto tre singolarità di grado 1,2,5 rispettivamente, l'energia attesa nel limite sarebbe stata $8\beta_k$, ovvero β_k per la massa totale della singolarità.

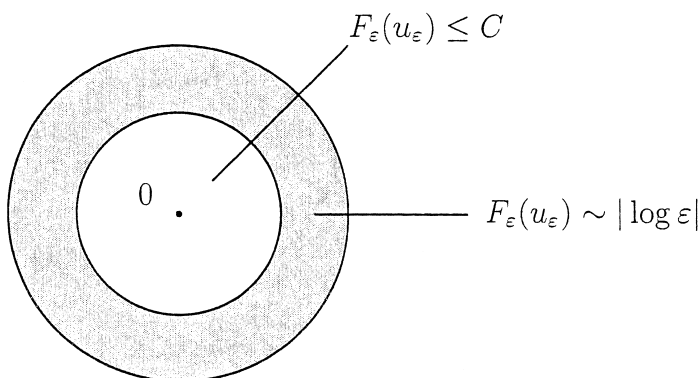
Per confermare questa aspettativa nel caso di una singolarità di grado 1, bisogna trovare una particolare successione approssimante $\{u_\varepsilon\}$ il cui costo

asintotico in energia sia proprio β_k . Per costruirla, basta prendere

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{in } \mathbb{R}^k \setminus B_\varepsilon \\ x/\varepsilon & \text{in } B_\varepsilon, \end{cases}$$

dove B_ε è una pallina di raggio ε centrata nell'origine.

Vale la pena osservare che l'energia di questa successione si concentra in un intorno «bucato» della singolarità, ovvero esiste un «cuscinetto» tra la singolarità e la zona di concentrazione dell'energia (il cerchio interno in bianco nella figura sotto), in cui le energie restano equilibrate. Questo è qualitativamente il motivo per cui, nel caso critico $p = k$, nessuna costante di profilo interviene a governare la concentrazione dell'energia.



Caso supercritico.

Nel caso supercritico $p > k$, per rispondere alla nostra domanda iniziamo ad osservare che, quando $n = 0$, i funzionali E_ε ottenuti moltiplicando F_ε per ε^{p-k} hanno una fondamentale proprietà di riscaldamento, del tutto simile a quella che abbiamo visto nel caso scalare:

$$(15) \quad E_\varepsilon := \varepsilon^{p-k} F_\varepsilon \Rightarrow E_\varepsilon(u(x), A) = E_1\left(u(\varepsilon x), \frac{A}{\varepsilon}\right) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^k.$$

Come conseguenza di (15), le energie E_ε della nostra successione approssimante $\{u_\varepsilon\}$ risulteranno asintoticamente minorate da una costante positiva τ_1 (indipendente da ε):

$$(16) \quad E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \tau_1,$$

essendo τ_1 definita tramite il seguente *problema di profilo ottimale*:

$$(17) \quad \tau_1 := \inf \{E_1(u, \mathbb{R}^k), u: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k: \deg(u, \infty) = 1\}.$$

Qui $\deg(u, \infty)$ indica una opportuna nozione di *grado all'infinito*, per la quale rimandiamo a [10] (sostanzialmente, la parola «infinito» si riferisce al fatto che il bordo della pallina dilatata B_r/ε si allontana all'infinito al tendere di ε a 0).

La stima in (16) ci suggerisce che l'energia limite pagata da una singolarità di grado 1 sia proprio la costante di profilo τ_1 ; naturalmente, se avessimo preso una singolarità di grado d , avremmo ottenuto un'analoga costante di profilo τ_d , definita come τ_1 ma cambiando il vincolo $\deg(u, \infty) = 1$ in $\deg(u, \infty) = d$.

Così come nel caso scalare τ rappresentava il minimo costo in energia per una transizione da -1 a $+1$, ora avremo un'intera famiglia di costanti di profilo τ_d , al variare di d negli interi, ciascuna delle quali rappresenta il minimo costo per una singolarità di grado d . Quindi, se avessimo avuto tre singolarità di grado 1,2,5 rispettivamente, l'energia attesa nel limite sarebbe stata la somma delle corrispondenti costanti di profilo $\tau_1 + \tau_2 + \tau_5$.

Per confermare questa aspettativa nel caso di una singolarità di grado 1, bisogna trovare una particolare successione approssimante $\{u_\varepsilon\}$ il cui costo asintotico in energia sia proprio τ_1 . Per costruirla, il modo più naturale è prendere una pallina $B_{h(\varepsilon)}$ di raggio $h(\varepsilon)$ infinitesimo con ε e porre

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{in } \mathbb{R}^k \setminus B_{h(\varepsilon)} \\ \gamma(x/\varepsilon) & \text{in } B_{h(\varepsilon)} \end{cases}$$

essendo γ soluzione (o quasi-soluzione) di un problema di profilo ottimale.

Se l'andamento a zero di $h(\varepsilon)$ è scelto in modo opportuno ($\varepsilon = o(h(\varepsilon))$), il contributo in energia *fuori* da $B_{h(\varepsilon)}$ è infinitesimo, e conta solo quello che succede *dentro* $B_{h(\varepsilon)}$. A questo punto ci si accorge però che il problema di profilo più naturale da considerare per definire u_ε dentro $B_{h(\varepsilon)}$ è un problema di profilo *diverso* da quello introdotto in (17). Infatti, siccome le u_ε si devono «incollare» con $x/|x|$ sul bordo della pallina, si tratterà di minimizzare l'energia E_1 su tutto $\mathbb{R}^k$, al variare delle funzioni u che soddisfano una condizione strettamente più forte di quella richiesta in (17), e cioè che hanno una opportuna nozione di *traccia all'infinito* uguale a $x/|x|$. Si arriva così in modo naturale a una diversa definizione di costante di profilo:

$$(18) \quad \tau_1^* := \inf \{E_1(u, \mathbb{R}^k), u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k : \text{tr}(u, \infty) = 1\}.$$

In effetti, possiamo dire che questa è la principale difficoltà che si incontra affrontando lo studio del problema nel caso supercritico: nel dimostrare le cosiddette disuguaglianze del Γ -liminf e del Γ -limsup si trovano in modo naturale due problemi di profilo *diversi* fra loro. (Forse questo spiega anche in parte perchè sia venuto cronologicamente prima il risultato nel caso critico, che si fonda in modo essenziale sulla stima di Jerrard.)

In [10], abbiamo dimostrato che in realtà la dicotomia di cui sopra è solo apparente. Infatti, anche se i problemi di profilo introdotti in (17) e (18) sono di-

versi, le loro soluzioni τ_1 e τ_1^* coincidono (e lo stesso vale per ogni intero d).

– Siamo quindi finalmente in grado di enunciare e porre a confronto i risultati di compattezza e Γ -convergenza per il caso vettoriale in dimensione arbitraria, relativi rispettivamente al caso critico e al caso supercritico.

TEOREMA 3 [Alberti-Baldo-Orlandi]. – *Sia $p = k$, e $E_\varepsilon := |\log \varepsilon|^{-1} F_\varepsilon$.*

(i) *Se $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$, a meno di sottosuccessioni gli jacobiani di u_ε convergono flat a $\alpha_k S$, dove S è un n -bordo con molteplicità intera nel senso delle correnti;*

(ii) *il Γ -limite delle energie E_ε rispetto all convergenza flat degli jacobiani è il funzionale E definito sugli n -bordi con molteplicità intera da:*

$$E(S) = \beta_k \|S\|,$$

dove $\|S\|$ indica la massa di S nel senso delle correnti.

TEOREMA 4 [Desenzani-Fragalà]. – *Sia $p > k$, e $E_\varepsilon := \varepsilon^{p-k} F_\varepsilon$.*

(i) *Se $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$, a meno di sottosuccessioni gli jacobiani di u_ε convergono flat a $\alpha_k S$, dove S è un n -bordo con molteplicità intera nel senso delle correnti;*

(ii) *il Γ -limite delle energie E_ε rispetto all convergenza flat degli jacobiani è il funzionale integrale E definito sugli n -bordi con molteplicità intera da:*

$$E(S) = \int_S \tau_{\sigma(x)} d\mathcal{H}^n(x),$$

essendo $\tau_{\sigma(x)}$ la costante di profilo corrispondente alla molteplicità (intera) di S nel punto x .

Sottolineiamo che la nozione di convergenza utilizzata per gli jacobiani nei risultati sopra è una lieve modifica della usuale convergenza flat nel senso delle correnti; tale modifica è ottenuta sostanzialmente restringendo la convergenza flat alla classe dei bordi (si veda [3] per la definizione precisa). Sottolineiamo altresì che non è possibile ottenere nessuna forma significativa di compattezza per le successioni di funzioni $\{u_\varepsilon\}$ con energie equilimitate (in altri termini, l'equilimitatezza degli jacobiani non induce nessuna equilimitatezza sulle funzioni), ed è per questo che si sceglie di formulare anche l'enunciato di Γ -convergenza rispetto alla convergenza degli jacobiani. Sottolineiamo infine che uno strumento fondamentale per dimostrare la disuguaglianza del Γ -limsup in dimensione arbitraria, sia nel Teorema 3 che nel Teorema 4, è costituito dal risultato di esistenza di mappe con singolarità prescritte (ovvero jacobiano prescritto) dimostrato da Alberti, Baldo e Orlandi in [2].

Problemi aperti

Concludiamo menzionando qualcuno dei problemi aperti a nostro avviso più interessanti che nascono dal Teorema 4, e che riguardano il comportamento al variare dell'intero d delle costanti di profilo τ_d . Alcuni fatti che abbiamo potuto dimostrare in merito sono i seguenti:

- $\tau_d = \tau_{-d}$ per ogni intero d ;
- $\tau_d > 0$ per ogni intero d (si ha anche di più, infatti esiste una costante $C > 0$, che dipende dal potenziale W , tale che $\tau_d > C|d|$);
- τ_d è subadditiva rispetto a d (ovvero $\tau_{d_1+d_2} \leq \tau_{d_1} + \tau_{d_2}$, e quindi in particolare $\tau_d \leq d\tau_1$).

Alcune domande cui invece al momento non sappiamo rispondere (e le risposte sembrano essere in qualche modo collegate fra loro), sono:

- τ_d è raggiunta? (ovvero i problemi di minimo che definiscono τ_d ammettono soluzione?)
- τ_d è additiva rispetto a d ? (ovvero, $\tau_d = d\tau_1$?)
- è ancora vero o no nel caso supercritico che i *vortici* sono tutte singolarità di grado $+1$? è ancora vero o no che tendono a stare lontani da $\partial\Omega$? è ancora vero o no che tendono a respingersi tra loro?

Si osservi in particolare che, se sapessimo che τ_d è additiva, e quindi che τ_d è uguale a d volte τ_1 , otterremmo che la nostra energia limite del Teorema 4 è un multiplo della massa:

$$E(S) = \int_S \tau_{\sigma(x)} d\mathcal{J}^n(x) = \tau_1 \cdot \int_S |\sigma(x)| d\mathcal{J}^n(x).$$

Al contrario, se τ_d non risultasse additiva, allora il problema limite nel caso supercritico sarebbe completamente diverso da quello che si ottiene nel caso critico. In altre parole, qualche altro funzionale, presumibilmente significativo e *diverso dalla massa*, sarebbe legato al comportamento asintotico dei minimi dei funzionali F_ε nel regime $p > k$. In tal caso sarebbe abbastanza plausibile poter osservare fenomeni qualitativamente diversi da quelli noti per i funzionali di Ginzburg-Landau (*e.g.*, attrazione invece che repulsione delle singolarità). Questi problemi saranno per noi oggetto di ulteriori ricerche in un prossimo futuro.

In ultimo, i nostri ringraziamenti vanno al Comitato Scientifico del XVII convegno nazionale dell'Unione Matematica Italiana, al Presidente Carlo Sbordone, e al Coordinatore di sezione Italo Capuzzo Dolcetta, per la possibilità di aver tenuto questa comunicazione a Milano, nonché per la possibilità di divulgarla tramite questo articolo sulla sezione B del Bollettino.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ALBERTI, *Variational models for phase transitions. An approach via Γ -convergence*. Differential equations and calculus of variations. Topics on geometrical evolutions problems and degree theory (Pisa 1996). Eds. G. Buttazzo et al. Springer, Berlin (2000), 95-114.
- [2] G. ALBERTI - S. BALDO - G. ORLANDI, *Functions with prescribed singularities*, J. Eur. Math. Soc, **5** (2003), 275-311.
- [3] G. ALBERTI - S. BALDO - G. ORLANDI, *Variational convergence for functionals of Ginzburg-Landau type*, preprint (2003), in fase di stampa su Indiana Univ. Math. J.
- [4] L. AMBROSIO - N. FUSCO - D. PALLARA, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **18**, Oxford University Press, New York (2000).
- [5] F. BETHUEL - H. BREZIS - F. HÉLEIN, *Ginzburg-Landau vortices*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **13**, Birkhäuser, Boston (1994).
- [6] A. BRAIDES, *G-Convergence for Beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **22**, Oxford University Press, New York (2002).
- [7] J. W. CAHN - J. E. HILLIARD, *Free energy of a non-uniform system I - Interfacial free energy*, J. Chem. Phys., **28** (1958), 258-267.
- [8] G. DAL MASO, *An introduction to Γ -convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **8**, Birkhäuser, Boston (1993).
- [9] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **58** (1958), 258-267.
- [10] N. DESENZANI - I. FRAGALÀ, *Concentration of Ginzburg-Landau energies with «supercritical» growth*, Preprint no. 554 del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano (2003).
- [11] V. GINZBURG - L. LANDAU, *On the theory of superconductivity*, Zh. Èksper. Teoret. Fiz., **20** (1950), 1064-1082.
- [12] V. GINZBURG - L. PITAEVSKII, *On the theory of superfluidity*, Soviet Phys. JETP, **7** (1958), 858-861.
- [13] R. HARDT - F. LIN, *Mappings minimizing the L^p -norm of the gradient*, Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 555-588.
- [14] R. L. JERRARD, *Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals*, Siam J. Math. Anal., **30** (1999), 721-746.
- [15] R. L. JERRARD - H. M. SONER, *Functions of bounded higher variation*, Indiana Univ. Math. J., **51** (2002), 645-677.
- [16] R. L. JERRARD - H. M. SONER, *The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **14** (2002), 151-191.
- [17] L. MODICA - S. MORTOLA, *Un esempio di Γ -convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5), **14** (1977), 285-299.
- [18] L. SIMON, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis **3**, Australian National University, Canberra (1983).

Dipartimento di Matematica del Politecnico, piazza Leonardo da Vinci 32
20133 Milano, Italy. E-mail: fragala@mate.polimi.it