
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ERMANNO LANCONELLI

Strutture subriemanniane in alcuni problemi di Analisi

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-B (2005),
n.2, p. 273–298.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_273_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_273_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Strutture subriemanniane in alcuni problemi di Analisi.

ERMANNO LANCONELLI (*)

Summary. – *We present some problems, ideas and techniques arising in the theory of Partial Differential Equations of Second Order with non-negative characteristic form and with underlying sub-riemannian structures. We show their development starting from the basic properties of classical harmonic and caloric functions. We stress their relationship with abstract potential theory and local regularity theory of solutions.*

Sunto. – *Vengono presentati alcuni problemi, idee e tecniche sorte nell'ambito della teoria delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, con forma caratteristica semidefinita positiva e con sott giacenti strutture sub-riemanniane. Se ne traccia lo sviluppo a partire dalla classica teoria delle funzioni armoniche e caloriche, attraverso la teoria del potenziale negli spazi armonici astratti e la teoria della regolarità locale delle soluzioni.*

1. – Funzioni olomorfe, funzioni armoniche, funzioni caloriche.

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione polinomiale di grado $n \geq 1$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Per $|z| \rightarrow \infty$ risulta $|f(z)| \rightarrow \infty$ ed esiste quindi almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che

$$|f(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |f|$$

Se fosse $f(z_0) \neq 0$ allora, in un opportuno intorno sferico U di z_0 la funzione reale

$$u(z) := \ln \frac{1}{|f(z)|}$$

risulterebbe *armonica* con un *massimo* nel punto z_0 . Dal principio del massi-

(*) Conferenza tenuta a Milano l'11 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

mo forte per le *funzioni armoniche* seguirebbe $\ln \frac{1}{|f(z)|} = \text{costante}$ in U e quindi

$$f(z) - f(z_0) = 0 \quad \forall z \in U,$$

in contraddizione col Teorema sul numero degli zeri di un polinomio di grado positivo. Deve quindi essere

$$f(z_0) = 0$$

e dunque: *l'equazione algebrica*

$$f(z) = 0$$

ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

Questa dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra è soltanto una delle innumerevoli applicazioni del principio del massimo forte per le funzioni armoniche, i.e. per le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2.$$

È ben noto che una funzione di due variabili reali è armonica in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ se (e solo se, nel caso di Ω semplicemente connesso) esiste una funzione complessa f olomorfa in Ω tale che

$$u = \Re(f).$$

Questo stretto legame fra olomorfia e armonicità, da un lato ha fornito allo studio delle funzioni armoniche in due variabili reali risultati e metodi della teoria delle funzioni olomorfe, dall'altro ha profondamente influenzato, suggerendone linee di sviluppo, la teoria delle funzioni armoniche in un numero arbitrario di variabili.

Un ruolo centrale nella teoria delle funzioni olomorfe è tenuto, come è ben noto, dalla formula integrale di Cauchy. Un importante surrogato di quest'ultima, valido per le funzioni armoniche in un qualunque numero di variabili, è la formula *integrale di Poisson*.

Una funzione continua $u : \Omega(\subseteq \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica in Ω se e solo se

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_N r} \int_{\partial D(x_0, r)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x - y|^N} u(y) d\sigma(y), \quad x \in D(x_0, r),$$

per ogni disco $D(x_0, r)$ tale che $\overline{D(x_0, r)} \subseteq \Omega$. Qui σ_N indica l'area della superficie sferica unitaria. Da questa formula, introdotta da Poisson nel 1823, ma studiata in modo rigoroso da W. Thomson, e soprattutto da H. A. Schwarz nel 1870, si deducono facilmente, per esempio, l'*analiticità*

reale delle funzioni armoniche e l'analogo del teorema di Weierstrass sulle successioni di funzioni olomorfe uniformemente convergenti:

una successione di funzioni armoniche in Ω , uniformemente convergente su ogni compatto in esso contenuto, ha come limite una funzione armonica.

Se nella precedente formula integrale di Poisson si prende $x = x_0$, si ottiene la celeberrima formula di media di Gauss:

una funzione u armonica in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ verifica l'identità

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_N r^{N-1}} \int_{\partial D(x_0, r)} u d\sigma,$$

per ogni disco $D(x_0, r)$ con la chiusura contenuta in Ω .

Da questa formula di *media di superficie* si ottiene immediatamente la formula di *media di volume*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{D(x_0, r)} u dy, \quad \omega_N = \text{volume del disco unitario},$$

e da questa, mediante un argomento di connessione, si deduce il Principio del Massimo forte:

una funzione armonica in un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ è ivi costante se assume il massimo in un punto (interno) del suo dominio.

Dalla formula di media di volume si ottiene anche una notevole disuguaglianza, scoperta da Harnack nel 1886: *esiste una costante positiva C , puramente dimensionale, tale che*

$$\sup_{D_r} u \leq C \inf_{D_r} u$$

per ogni funzione u armonica e non negativa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e per ogni disco $D_r = D(x_0, r)$ tale che $D(x_0, 2r) \subset \Omega$.

Le conseguenze di questa disuguaglianza sono rilevanti. Una di queste è il Teorema di Liouville per le funzioni armoniche:

ogni funzione $u: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, armonica e non negativa, è costante.

Un'altra importante conseguenza della disuguaglianza di Harnack è il seguente Teorema di Convergenza: *sia (u_n) una successione monotona crescente di funzioni armoniche in un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che la successione numerica $(u_n(x_0))$ è convergente in $\mathbb{R}$, allora (u_n) converge uniformemente su ogni compatto contenuto in Ω (e quindi $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ è armonica in Ω).*

Il principio del massimo, la disuguaglianza di Harnack e la formula integrale di Poisson costituiscono i tre principi fondamentali della teoria classica del potenziale, forse la più profonda fra tutte le teorie riguardanti le funzioni armoniche e, più in generale, le soluzioni dell'equazione di Poisson $\Delta u = f$.

I tre principi precedenti, sotto forme opportune, valgono anche per le soluzioni di molti tipi di equazioni alle derivate parziali. In particolare essi valgono per le *funzioni caloriche*, i.e. per le soluzioni dell'*equazione del calore*.

Se indichiamo con (x, t) il punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, l'operatore differenziale

$$H := \Delta - \partial_t$$

è l'operatore del calore in $\mathbb{R}^{N+1}$, e una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, si dice *calorica* in Ω se è di classe C^2 e verifica l'equazione

$$Hu = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Il Principio del Massimo forte per le funzioni caloriche, dimostrato da Nirenberg nel 1953, si formula nel modo seguente: sia u una soluzione di $Hu = 0$ in Ω e sia $(x_0, t_0) \in \Omega$ tale che

$$u(x_0, t_0) = \max_{\Omega} u.$$

Allora $u \equiv u(x_0, t_0)$ in $\Omega_{(x_0, t_0)}$ [39].

Con $\Omega_{(x_0, t_0)}$ indichiamo l'insieme dei punti $(x, t) \in \Omega$ raggiungibili da (x_0, t_0) mediante traiettorie contenute in Ω e decrescenti nelle loro componenti temporali. Precisamente:

$(x, t) \in \Omega_{(x_0, t_0)}$ se esiste $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N, \gamma_{N+1}) : [0, 1] \rightarrow \Omega$, regolare a tratti, tale che $\dot{\gamma}_{N+1} \leq 0$ q.d. in $[0, 1]$ e con $\gamma(0) = (x_0, t_0)$ e $\gamma(1) = (x, t)$.

Una disuguaglianza di tipo Harnack per le temperature, i.e. per le funzioni caloriche non negative, fu dimostrata da Hadamard e Pini, indipendentemente, nel 1954 ([19] [44]).

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e siano $(x_0, t_0) \in \Omega$ e $r > 0$ tali che

$$Q_r(x_0, t_0) := D(x_0, r) \times [t_0 - r^2, t_0] \subset \Omega.$$

Allora esiste una costante $c > 0$, puramente dimensionale, tale che

$$(1.1) \quad \sup_{Q_r^-} u \leq c \inf_{Q_r^+} u$$

per ogni temperatura $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ove

$$Q_r^- = D\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \times \left[t_0 - \frac{3}{4}r^2, t_0 - \frac{1}{2}r^2\right]$$

e

$$Q_r^+ = D\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \times \left[t_0 - \frac{1}{4}r^2, t_0\right].$$

Anche per le funzioni caloriche vale una formula integrale di tipo Poisson. Es-

sa prende la forma seguente. Si indichi con $P(z_0, r)$, $z_0 = (x_0, t_0)$, $r > 0$, la regione parabolica:

$$P(z_0, r) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : |x - x_0|^2 < t_0 - t < r^2\}.$$

Allora, per ogni $z \in P(z_0, r)$ esiste una misura di Radon non negativa $\mu_z^{(z_0, r)}$, col supporto contenuto sul bordo di $P(z_0, r)$, tale che: una funzione continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, è calorica in Ω se e solo se risulta

$$u(z) = \int_{\partial P(z_0, r)} u(\zeta) d\mu_z^{(z_0, r)}(\zeta), \quad \forall z \in P(z_0, r), \quad \forall P(z_0, r) : \overline{P(z_0, r)} \subseteq \Omega.$$

Da questa formula, e dalla disuguaglianza di Harnack di Hadamard-Pini, si ottiene la versione calorica del teorema di convergenza enunciato più sopra nel caso armonico: sia (u_n) una successione monotona crescente di funzioni caloriche in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, puntualmente convergente in un sottoinsieme denso in Ω . Allora (u_n) converge uniformemente su ogni compatto di Ω e la funzione limite $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ è calorica in Ω .

2. – Teoria assiomatica del Potenziale.

La teoria assiomatica del potenziale si è sviluppata nell'arco di circa venti anni, a cavallo del 1950, ad opera principalmente di G. Tautz, J. L. Doob, M. Brelot e H. Bauer. Essa nasce dalla constatazione che larga parte dei risultati della teoria classica del potenziale, e della teoria delle funzioni caloriche, discende solamente dai tre principi messi in evidenza nel precedente paragrafo: principio del massimo (in una versione «debole»), formula integrale di Poisson, teorema di convergenza.

L'assiomatizzazione trae interesse dal fatto che questi tre principi valgono non solo per le funzioni armoniche e per quelle caloriche, ma anche per le soluzioni di ampie classi di equazioni lineari del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva (preciseremo nel seguito il significato di queste espressioni).

Nella teoria assiomatica del potenziale viene anzitutto assegnato uno spazio topologico $\mathcal{T}$ localmente compatto e con una base numerabile di aperti. Negli esempi «concreti» $\mathcal{T}$ può essere un aperto contenuto in una varietà. Su $\mathcal{T}$ viene dato un *fascio* $\mathcal{C}$ di funzioni con le seguenti proprietà (A1)-(A3).

(A1) Per ogni aperto di $\Omega \subset \mathcal{T}$ l'insieme $\mathcal{C}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $C(\Omega, \mathbb{R})$, lo spazio delle funzioni reali continue su Ω . $\mathcal{C}$ viene chiamato *fascio armonico* e le funzioni di $\mathcal{C}(\Omega)$ sono, per definizione, le funzioni *$\mathcal{C}$ -armoniche* in Ω . Il ruolo di $\mathcal{C}$, negli esempi concreti, è tenuto dal fascio delle soluzioni di una equazione differenziale lineare.

(A2) Esiste una base della topologia di $\mathcal{T}$ costituita da aperti *$\mathcal{C}$ -regolari*. Un

aperto V relativamente compatto si dice $\mathcal{A}$ -regolare se per ogni funzione continua $f: \partial V \mapsto \mathbb{R}$ esiste una funzione A_f^V $\mathcal{A}$ -armonica in V , continua sulla chiusura di V e uguale a f su ∂V . Inoltre $A_f^V \geq 0$ se $f \geq 0$.

Questo assioma assicura l'esistenza di una formula integrale di Poisson astratta, del tipo di quella per le funzioni caloriche, richiamata nel precedente paragrafo. Nelle applicazioni della teoria allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali $\mathcal{L}u = 0$, esso equivale a richiedere la risolubilità del problema al contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } V \\ \lim_{x \rightarrow y} u(x) = f(y) & \forall y \in \partial V \end{cases}$$

per tutti gli aperti di una base $\{V\}$, e alla positività della soluzione se il dato al bordo è positivo. Quest'ultima proprietà richiede sostanzialmente il seguente *principio del massimo debole*:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{in } V \\ \limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq 0 & \forall y \in \partial V \end{cases} \Rightarrow u \leq 0 \text{ in } V.$$

(A3) Ogni successione (u_n) di funzioni $\mathcal{A}$ -armoniche in un aperto $\Omega \subset \mathcal{T}$, se converge puntualmente in un insieme T denso in Ω , allora converge in ogni punto di Ω a una funzione u $\mathcal{A}$ -armonica in Ω .

Quando gli Assiomi (A1)-(A3) sono soddisfatti, si dice che $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ è uno Spazio Armonico. In questi spazi, il classico metodo di Perron per lo studio del *primo problema di valori al contorno*, trova una naturale, illuminante collocazione.

Un'esauriente trattazione della teoria degli Spazi Armonici è contenuta nella monografia [5], che si raccomanda anche per interessanti note storiche.

3. – Principio del massimo debole. Operatori ellittico-parabolici.

La teoria degli Spazi Armonici astratti trova una naturale applicazione allo studio delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva. Per ampie classi di queste equazioni vale infatti un principio del massimo debole come quello implicitamente richiesto dall'Assioma (A2).

Sia O un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia

$$\mathcal{L} := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_{x_i}$$

un operatore differenziale lineare del secondo ordine. Le funzioni a_{ij} , b_i sono reali e definite in O e $a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j = 1, \dots, N$. Si chiama forma caratteristica

di $\mathcal{L}$ la forma quadratica

$$q_{\mathcal{L}}(x, \xi) := \langle A(x)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad x \in O, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

ove $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota l'usuale prodotto interno in $\mathbb{R}^N$. L'operatore $\mathcal{L}$ si dice *ellittico-parabolico* in un aperto $\Omega \subset O$ se risulta

$$q_{\mathcal{L}}(x, \xi) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

Si deve a Picone il seguente

PRINCIPIO DEL MASSIMO DEBOLE. — Sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico-parabolico in un aperto limitato Ω , con $\overline{\Omega} \subset O$. Supponiamo che esista una funzione $h \in C^2(\Omega)$ tale che

$$(3.1) \quad h(x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}h(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Allora:

$$u \in C^2(\Omega), \quad \begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ \limsup_{x \rightarrow y} u(x) \leq 0 & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow u \leq 0 \text{ in } \Omega$$

(Picone, [41]).

Osserviamo esplicitamente che la condizione (3.1) è molto blanda. Per esempio, essa è soddisfatta se esiste $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$(3.2) \quad \inf_{x \in \Omega} (q_{\mathcal{L}}(x, \lambda) + \langle b(x), \lambda \rangle) > 0,$$

con $b = (b_1, \dots, b_N)$. In questo caso basta prendere

$$h(x) = M - \exp(\langle \lambda, x \rangle)$$

e scegliere $M > 0$ sufficientemente grande.

Questo principio del massimo si applica a classi di operatori di particolare importanza, apparsi in letteratura anche successivamente al lavoro di Picone. Diamo alcuni esempi significativi.

ESEMPIO 1. — Il laplaciano (sub-ellittico) sul gruppo di Heisenberg-Weyl H_n . In $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ introduciamo la seguente legge di composizione interna

$$(z, t) \circ (z', t') = (z + z', t + t' + 2\Im z \cdot z')$$

ove $\cdot$ indica il prodotto interno Hermitiano in $\mathbb{C}^n$. $H_n = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ è un gruppo: il gruppo di Heisenberg-Weyl. Gli operatori differenziali

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_t, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j \partial_t,$$

ove $x_j + iy_j = z_j$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ è il punto di $\mathbb{C}^n$, sono invarianti per le traslazioni a sinistra su $\mathbb{H}_n$ e ne generano l'algebra di Lie. Risulta

$$[X_j, Y_j] = -4\partial_t$$

analogamente alla relazione di commutazione canonica fra momento e posizione della meccanica quantistica. L'operatore differenziale

$$(3.3) \quad \Delta_{\mathbb{H}_n} = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$$

ha la forma caratteristica semidefinita positiva e viene chiamato il sub-laplaciano canonico su $\mathbb{H}_n$. Il gruppo di Heisenberg e il suo sub-laplaciano appaiono in vari contesti, teorici ed applicativi, quali, per esempio: la teoria delle funzioni di più variabili complesse, l'Analisi di Fourier, la formalizzazione matematica della meccanica quantistica. Importanti riferimenti bibliografici sono: l'articolo di rassegna di R. Howe [22] e la monografia di E.M. Stein [53].

ESEMPIO 2. – *Sub-laplaciani sui gruppi di Lie omogenei.* Sia $G = (\mathbb{R}^N, \circ)$ un gruppo di Lie omogeneo con algebra $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ e

$$\begin{cases} [V_1, V_{i-1}] = V_i & \text{se } 2 \leq i \leq r. \\ [V_1, V_r] = \{0\} \end{cases}$$

Sia $X_1, \dots, X_m$ una base di V_1 . L'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2$$

è un *sub-laplaciano* su G . Risulta

$$q_{\mathcal{L}}(x, \xi) = \sum_{j=1}^m \langle X_j(x), \xi \rangle^2,$$

e quindi $\mathcal{L}$ è ellittico-parabolico in $\mathbb{R}^N$.

ESEMPIO 3. – *Operatori di Kolmogorov.* Nel 1934 Kolmogorov dimostrò che la densità di probabilità di un sistema fisico con $2n$ gradi di libertà verifica, sotto opportune ipotesi, un'equazione differenziale del tipo seguente:

$$(3.4) \quad \mathcal{L}u := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y, t) \partial_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^n x_i \partial_{y_i} - \partial_t \right) u = 0,$$

ove $(a_{ij}(x, y, t))_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice $n \times n$, simmetrica e definita positiva. Lo spazio delle fasi del sistema è $\mathbb{R}^{2n}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ è il vettore delle velocità, e $y = (y_1, \dots, y_n)$ quello delle posizioni [26]. Ovviamente $\mathcal{L}$ è ellittico-parabolico: la sua forma caratteristica è semidefinita positiva, con nucleo di dimen-

sione $n + 1$. Prototipo di $\mathcal{L}$ è l'operatore

$$\mathcal{K} = \Delta_x + x \cdot \nabla_y - \partial_t,$$

che risulta invariante per le traslazioni a sinistra sul gruppo di Lie omogeneo

$$\mathcal{G} = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ, \delta_\lambda)$$

con legge di composizione interna e dilatazioni definite, rispettivamente, così:

$$(x, y, t) \circ (x', y', t') = (x + x', y + y' - t'x, t + t'),$$

$$\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda^3 y, \lambda^2 t)$$

(si veda [30])

ESEMPIO 4. – Equazione della curvatura di Levi. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, i cui punti verranno qui denotati $z = (x, y, t)$. Sia poi $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Poniamo $u_x = \partial_x u$. Analoghe notazioni verranno usate per le altre derivate, prime e seconde. Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{L} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + (a^2 + b^2) \partial_t^2 + 2a \partial_{xt} + 2b \partial_{yt}$$

ove

$$a = a(Du) = \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2}, \quad b = b(Du) = -\frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2}.$$

L'operatore $\mathcal{L}$ è ellittico-parabolico poichè la sua forma caratteristica $q_{\mathcal{L}}$, che può esprimersi come somma di quadrati, è ovunque definita non negativa:

$$q_{\mathcal{L}} = (\xi + a\tau)^2 + (\eta + b\tau)^2 \geq 0, \quad (\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{R}^3.$$

Notiamo che la dimensione del nucleo di $q_{\mathcal{L}}$ è costante e uguale a 1.

L'operatore $\mathcal{L}$ ha un importante significato geometrico: se u è due volte differenziabile in Ω , il numero reale

$$K(z) = (1 + u_t^2) \frac{\mathcal{L}u}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}$$

è la *curvatura di Levi* del grafico di u nel punto $p = (z, u(z))$, $z \in \Omega$. Si vedano [2], [55, 56, 57].

Nota. Se si calcolano i coefficienti a e b sulla funzione

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2$$

allora

$$\mathcal{L} = \Delta_{H_n}$$

e il grafico di u è il bordo del dominio di Siegel di $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{U}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: \Im(z_2) > |z_1|^2\}.$$

La curvatura di Levi di $b\mathcal{U}^2$ nel punto $(z_1, z_2) = (x + iy, t + iu)$ è quindi

$$\frac{\Delta_{H_u} u}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} = \frac{4}{(1 + 4(x^2 + y^2))^{3/2}}.$$

4. – Principio del massimo forte. La condizione del rango.

La classe degli operatori ellittico-parabolici contiene operatori molto «degeneri» quali, per esempio, il seguente

$$(4.1) \quad \mathcal{L} := \partial_{x_1}^2, \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad N > 1.$$

In generale, quindi, un operatore ellittico-parabolico, solo in quanto tale, non avrà «buone» proprietà. E anche la sottoclasse degli operatori per i quali vale il principio del massimo di Picone è ancora troppo ampia: vi appartiene infatti lo stesso operatore $\mathcal{L}$ in (4.1) (cfr.(3.2)).

Un buon criterio per ridurre in modo efficace la generalità, e guadagnare regolarità, è quello suggerito dal principio del massimo forte, o più propriamente, dal principio della *Propagazione dei Massimi*.

Sia dato un operatore ellittico-parabolico in $\mathbb{R}^N$ nella seguente forma di divergenza

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j}) + \sum_{i=1}^N \beta_i \partial_{x_i} \equiv \operatorname{div}(A\nabla) + \langle \beta, \nabla \rangle$$

Per semplicità, supponiamo i coefficienti a_{ij} e β_i rispettivamente di classe C^2 e C^1 . Una curva regolare a tratti

$$\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

è chiamata $\mathcal{L}$ -subunitaria se q.d. in $[0, 1]$ risulta

$$(4.2) \quad \langle \dot{\gamma}(s), \xi \rangle^2 \leq \langle A(\gamma(s))\xi, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Se risulta

$$\dot{\gamma}(s) = \beta(\gamma(s)) \quad \text{q.d. in } [0, T]$$

si dice che γ è $\mathcal{L}$ -diffusiva. Si chiama *traiettoria di propagazione* per $\mathcal{L}$ ogni curva regolare a tratti somma finita di curve $\mathcal{L}$ -sub-unitarie e $\mathcal{L}$ -diffusive.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto e $x_0 \in \Omega$, indichiamo con $P_{\mathcal{L}}(x_0, \Omega)$ l'insieme dei punti $x \in \Omega$ verificanti la seguente condizione: esiste una $\mathcal{L}$ -traiettoria di propagazione $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ tale che $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(T) = x$. $P_{\mathcal{L}}(x_0, \Omega)$ viene chiamato *l'insieme di $\mathcal{L}$ -propagazione di x_0 in Ω* .

THEOREM 4.1. – *Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $\mathcal{L}u \geq 0$ in Ω . Se u assume il massimo in un punto $x_0 \in \Omega$, allora*

$$u(x) = u(x_0) \quad \forall x \in P_{\mathcal{L}}(x_0, \Omega).$$

Questo Teorema è frutto di vari indipendenti contributi di Alexandrov, Bony, Hill, Redheffer e Amano (si veda [1] e la bibliografia ivi citata). Il principio del massimo forte di Nirenberg, relativo all'operatore del calore, è un caso particolare del Teorema 4.1.

Se l'operatore $\mathcal{L}$ è *ellittico*, i.e. se $q_{\mathcal{L}}$ è strettamente definita positiva in ogni punto di Ω , allora, a meno di riparametrizzazioni, ogni curva regolare a tratti è $\mathcal{L}$ -sub-unitaria. Di conseguenza, se Ω è connesso, $P_{\mathcal{L}}(x_0, \Omega) = \Omega$ per ogni $x_0 \in \Omega$ e il Teorema 4.1 ridà il classico Principio del Massimo forte di Hopf.

THEOREM 4.2. – *Sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico in un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^N$. Se una soluzione classica di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω assume il massimo in un punto $x_0 \in \Omega$ allora*

$$u(x) = u(x_0) \quad \forall x \in \Omega.$$

Un' importante classe di operatori ellittico-parabolici per i quali vale un principio del massimo forte analogo a quello degli operatori ellittici, è quella degli operatori *somme di quadrati* di Hörmander.

Sia

$$(4.3) \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2$$

ove $X_j = \sum_{k=1}^N a_j^{(k)} \partial_{x_k}$ è un operatore differenziale del primo ordine con coefficienti $a_j^{(k)}$ di classe C^∞ . Supponiamo

$$(R) \quad \text{rango Lie } \{X_1, \dots, X_m\}(x) = N \quad \forall x \in \Omega,$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ connesso. Allora, per il Teorema di connettività di Carathéodory-Chow-Razewskii, risulta

$$P_{\mathcal{L}}(x_0, \Omega) = \Omega \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

Da questo risultato, e dal Teorema 4.1, si ottiene immediatamente il corollario seguente.

COROLLARIO 3.2. – Sia $\mathcal{L}$ un operatore somma di quadrati verificante la condizione del rango (R). Se una soluzione classica di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω ⁽¹⁾ assume il massimo in un punto $x_0 \in \Omega$ allora

$$u(x) = u(x_0) \quad \forall x \in \Omega.$$

5. – La condizione del rango e l'ipoellitticità.

Dopo i classici lavori di Picone [41, 42, 43], contenenti principalmente varie formule di maggiorazione e di confronto delle soluzioni, il primo studio sistematico di problemi al contorno per operatori ellittico-parabolici, fu condotto da Fichera. In un importante lavoro del 1956, mediante metodi di analisi funzionale, Fichera dimostrò un teorema di esistenza di soluzioni deboli del «problema di Dirichlet», dopo aver individuato la parte di frontiera sulla quale risulta corretto porre i «dati al bordo» [11].

Successivamente, mediante il metodo della regolarizzazione ellittica, o della viscosità artificiale, vari risultati di esistenza furono ottenuti da Oleinik e Radkevich, alla cui monografia [40] rinviamo direttamente, per un'ampia rassegna di alcuni degli argomenti che qui stiamo illustrando. In quella monografia sono pure presentati vari teoremi di regolarità delle soluzioni di problemi al contorno, principalmente ottenuti mediante il metodo di Bernstein. Questo metodo consiste nel derivare l'equazione data, ottenere una nuova equazione per le derivate della soluzione, e stimare queste ultime utilizzando principi del massimo debole del tipo di quello di Picone. Esso richiede particolari proprietà della frontiera, in relazione all'operatore studiato, e fornisce risultati di regolarità *globale*, fortemente dipendente da quella dei dati al bordo. È quindi l'azione combinata dell'operatore e della frontiera a determinare, in quei teoremi, la regolarità delle soluzioni.

Lo studio delle proprietà di regolarità *locali*, dipendenti quindi dal solo operatore, ha dato i frutti più interessanti ed ha condotto alla nascita di teorie tutt'ora in grande sviluppo. I migliori risultati sono stati ottenuti per le equazioni aventi soggiacenti strutture algebrico-geometriche di tipo sub-riemanniano, generalizzanti in modo naturale quelle, riemanniane, che «governano» le classiche equazioni ellittiche e paraboliche.

Il risultato fondamentale, che ha avviato le ricerche in questa direzione, è il seguente, ben noto, teorema di Hörmander [21].

TEOREMA 5.1. – Siano $X_j = \sum_{k=1}^N a_j^{(k)} \partial_{x_k}$, $k = 0, 1, \dots, m$ operatori differenziali del primo ordine con coefficienti C^∞ in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo

⁽¹⁾ Come richiameremo fra poco, «ogni» soluzione di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω è di classe C^∞ se la condizione (R) è verificata.

sia soddisfatta la condizione

$$(R) \quad \text{rango Lie } \{X_0, X_1, \dots, X_m\}(x) = N \quad \forall x \in \Omega.$$

Allora l'operatore

$$(5.1) \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$$

è ipoellittico in Ω .

Ricordiamo che, per definizione, $\mathcal{L}$ è ipoellittico in Ω se ogni distribuzione, soluzione debole dell'equazione

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega$$

è di classe C^∞ in Ω se $f \in C^\infty(\Omega)$.

La condizione del rango (R) è «quasi necessaria» per la ipoellitticità di $\mathcal{L}$. Precisamente, se $\mathcal{L}$ è ipoellittico in un aperto Ω allora

$$\text{rango Lie } \{X_0, X_1, \dots, X_m\}(x) = N$$

per tutti i punti x di un aperto denso in Ω . Questo si dimostra facilmente utilizzando il classico teorema di Frobenius. L'equivalenza fra (R) e l'ipoellitticità di $\mathcal{L}$ è completa quando i coefficienti dei campi X_j sono analitici reali ([10]).

Se la condizione del rango è verificata in ogni punto di un aperto $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^N$, e se si pone, per ogni sottoinsieme aperto Ω di $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \mathcal{L}u = 0\}$$

allora l'applicazione $\mathcal{C} : \Omega \mapsto \mathcal{C}(\Omega)$ è un fascio armonico e $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ verifica gli assiomi (A1)-(A3) del paragrafo 2. Agli operatori di Hörmander si applica quindi la teoria astratta del potenziale di Brelot-Bauer-Doob, si veda [3].

Uno studio sistematico degli operatori di Hörmander negli spazi L^p e in spazi di funzioni hölderiane, è stato condotto da Folland, Rothschild e Stein con metodi di Analisi Funzionale e Analisi Armonica sui gruppi di Lie omogenei [12], [48].

6. – Metriche sub-riemanniane: distanze di controllo.

Agli operatori ellittico-parabolici con coefficienti non regolari i risultati di Hörmander, Stein, Folland e Rothschild non sono, ovviamente, applicabili. Tuttavia, in molti casi, è possibile associare ad un operatore con coefficienti (anche soltanto) limitati e misurabili, una metrica che svolge, per l'operatore stesso, un ruolo analogo a quello tenuto da una metrica riemanniana nei riguardi del corrispondente operatore di Laplace-Beltrami.

Il Teorema 4.1, mostrando la rilevanza delle curve $\mathcal{L}$ -sub-unitarie per il principio del massimo forte, suggerisce come associare ad un operatore $\mathcal{L}$ una metrica *intrinseca* d che ne rifletta le «buone» proprietà. Importanti stime puntuali delle soluzioni di $\mathcal{L}u = 0$, quali disuguaglianze di tipo Harnack e regolarità hölderiana, discendono, come vedremo, da poche, cruciali proprietà di d .

Sia assegnata una famiglia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ di campi vettoriali localmente lipschitziani

$$X_j: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Diremo che l'operatore

$$(6.1) \quad \mathcal{L} = \operatorname{div}(A\nabla)$$

è *X-ellittico* ⁽²⁾ in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, se esistono due costanti positive λ e A tali che

$$(6.2) \quad \lambda \sum_{j=1}^m \langle X_j(x), \xi \rangle^2 \leq \langle A(x) \xi, \xi \rangle \leq A \sum_{j=1}^m \langle X_j(x), \xi \rangle^2.$$

Ogni operatore ellittico-parabolico con coefficienti sufficientemente regolari è *X-ellittico* rispetto ad una opportuna famiglia di campi vettoriali. Precisamente, sia $\mathcal{L}$ come in (6.1) con la matrice $A = A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ simmetrica e semidefinita positiva. Supponiamo i coefficienti a_{ij} di classe C^2 . Allora esiste una matrice $B = B(x) = (b_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$, simmetrica, semidefinita positiva, con coefficienti b_{ij} localmente lipschitziani, e tale che

$$A = B^2.$$

Se indichiamo con $X_1, \dots, X_N$ i vettori colonna di B , risulta quindi

$$\langle A(x) \xi, \xi \rangle = \sum_{j=1}^m \langle X_j(x), \xi \rangle^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ e per ogni x (Phillips-Sarason, [45]).

Una curva regolare a tratti $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una *X-traiettoria* se risulta

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{j=1}^m a_j(s) X_j(\gamma(s)) \quad \text{q.d. in } [0, T]$$

⁽²⁾ La nozione di *X-ellitticità* fu implicitamente introdotta in [13] nel caso di una particolare famiglia X di campi vettoriali. Presente più o meno chiaramente in molti altri lavori successivi, essa è stata esplicitamente data in modo formale in [28].

con $\sum_{j=1}^m a_j^2(s) \leq 1$ q.d. in $[0, T]$. Si pone

$$\ell(\gamma) = T.$$

Osserviamo che le X -traiettorie sono $\frac{1}{\lambda} \mathcal{C}$ sub-unitarie (cfr. (4.2)).

Dati $x, y \in \mathbb{R}^N$ si indichi con $\mathcal{C}(x, y)$ la famiglia delle X -traiettorie $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $T > 0$ opportuna, tali che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(T) = y$. Si dirà che $\mathbb{R}^N$ è X -connesso se

$$\mathcal{C}(x, y) \neq \emptyset \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Assumendo la X -connessione di $\mathbb{R}^N$, la funzione $d_X: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_X(x, y) := \inf \{ \ell(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}(x, y) \}$$

è ovunque ben definita, ed è facile dimostrare che è una *metrica* in $\mathbb{R}^N$. Essa viene chiamata *metrica di controllo* (o *metrica di Carnot-Carathéodory*) relativa alla famiglia X . Non è difficile riconoscere che d_X è localmente equivalente alla metrica euclidea se

$$\dim(\text{span} \{X_j(x) : j = 1, \dots, m\}) = N \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

In questo caso quindi d_X è una metrica di tipo riemanniano.

Se i campi X_j sono di classe C^∞ e se

$$\text{rango Lie} \{X_1, \dots, X_m\}(x) = N \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

allora d_X risulta localmente hölderiana. Precisamente, se

$$\dim(\text{span} \{X_I(x) : |I| \leq r\}) = N \quad \forall x \in \Omega,$$

ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$, allora, per ogni compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante positiva C tale che

$$d_X(x, y) \leq C |x - y|^{\frac{1}{r}} \quad \forall x, y \in K.$$

Qui abbiamo usato le seguenti notazioni: se $I = (i_1, \dots, i_k)$ allora $|I| = k$,

$$X_{(i_1)} = X_{i_1}, \quad X_{(i_1, i_2)} = [X_{(i_1)}, X_{i_2}],$$

e

$$X_I = [X_{(i_1, \dots, i_{k-1})}, X_{i_k}].$$

Distanze di controllo sub-riemanniane, relative a particolari famiglie di campi vettoriali non regolari, sono state costruite, sembra per la prima volta, nel 1982

in [14]. I campi studiati in quel lavoro sono di tipo *diagonale*, i.e. del tipo

$$X_j = \lambda_j \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

con le λ_j funzioni reali, positive fuori dagli iperpiani coordinati, e che possono annullarsi con andamenti al più di tipo polinomiale.

Fra le N -ple $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ che rientrano fra quelle studiate in [14], vi è la seguente

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = 1 & \text{per } 1 \leq j \leq N_1 \\ \lambda_j(x) = |x'|^{\alpha/2} & \text{per } N_1 < j \leq N, \end{cases}$$

ove $\alpha > 0$. L'operatore

$$\mathcal{L} = \Delta_{x'} + |x'|^\alpha \Delta_{x''}, \quad (x', x'') \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N.$$

che, ovviamente, non è ellittico nel senso classico del termine, è $(\lambda_1 \partial_{x_1}, \dots, \lambda_N \partial_{x_N})$ -ellittico rispetto alla N -pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ precedente.

7. – Disuguaglianza di Harnack parabolica e distanza di controllo.

Sia $\mathcal{L}$ un operatore X -ellittico in $\mathbb{R}^N$ e sia

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} - \partial_t$$

il corrispondente «operatore del calore». In questo paragrafo illustreremo il profondo legame esistente fra la metrica di controllo d_X e la *disuguaglianza di Harnack* d_X -invariante per le soluzioni non negative di $\mathcal{L}u = 0$.

A questo scopo fissiamo alcune notazioni e definizioni.

Assumeremo d'ora in avanti che lo spazio metrico $(\mathbb{R}^N, d_X)$ sia completo, con topologia equivalente a quella euclidea.

Diremo che d_X ha la *proprietà di duplicazione* se esiste $R > 0$ tale che

$$(D) \quad |B(x, 2r)| \leq A |B(x, r)| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } 0 < r \leq R,$$

essendo A una costante positiva indipendente da x e da r . Con $|B(x, r)|$ indichiamo la misura di Lebesgue del disco

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : d_X(x, y) < r\}.$$

Diremo che i dischi della metrica d_X supportano la *disuguaglianza di Poinca-*

ré se

$$(P) \quad \int_{B_r} |u - u_r|^2 dx \leq Cr^2 \int_{B_r} |Xu|^2 dx, \quad \forall u \in C^1(\overline{B_r}),$$

e per ogni disco B_r di raggio r nella metrica d_X . u_r indica la media integrale di u su B_r e Xu denota il *gradiente intrinseco* in $(\mathbb{R}^N, d_X)$, i.e.

$$Xu = (X_1 u, \dots, X_m u).$$

Dati un disco B_r e un numero reale t_0 indichiamo con Q_r , Q_r^- , e Q_r^+ rispettivamente i cilindri

$$Q_r := B_r \times [t_0 - r^2, t_0],$$

$$Q_r^- = B_r \times \left[t_0 - \frac{3}{4}, t_0 - \frac{1}{2}r^2 \right], \quad \text{e} \quad Q_r^+ = B_{r/2} \times \left[t_0 - \frac{1}{4}r^2, t_0 \right].$$

Diremo che le funzioni $\mathcal{H}$ -caloriche verificano la *disuguaglianza di Harnack invariante* se, per ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ esistono $R_0 \leq R$ e $c > 0$ tali che

$$(H) \quad \sup_{Q_r^-} u \leq c \inf_{Q_r^+} u$$

per ogni soluzione debole non negativa di $\mathcal{H}u = 0$ in Ω e per ogni $Q_r \subseteq \Omega$ con $r \leq R_0$.

TEOREMA 7.1. – *Se la metrica d_X ha la proprietà di duplicazione (D) e se i suoi dischi supportano la disuguaglianza di Poincaré (P), allora le funzioni $\mathcal{H}$ -caloriche verificano la disuguaglianza di Harnack d_X invariante.*

Questo teorema si dimostra con un procedimento iterativo modellato su quello introdotto da Moser per le equazioni paraboliche classiche [37]. È sufficiente sostituire in quest'ultimo la metrica euclidea con quella di controllo ed utilizzare, in luogo della classica disuguaglianza di Sobolev, la seguente:

$$(SP) \quad \left(\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |u - u_r|^p \right)^{1/p} \leq cr \left(\frac{1}{|Br|} \int_{Br} |Xu|^2 dx \right)^{1/2},$$

ove $p = \frac{2Q}{Q-2}$ e $Q = \text{dimensione omogenea di } (\mathbb{R}^N, d_X) := \log_2 A$, essendo A la costante al secondo membro della disuguaglianza di duplicazione (D).

La disuguaglianza di Sobolev-Poincaré (SP) è conseguenza delle proprietà (D) e (P). Questo notevole profondo risultato è qui presentato nella versione di Garofalo e Nhieu in [18]. In precedenza, il legame fra le proprietà (D) + (P) e la disuguaglianza di Sobolev, era stato messo in luce da Saloff-Coste in [49] e, successivamente, nell'ambito della teoria delle forme di Dirichlet, da Biroli e

Mosco in [4]. Un illuminante contributo alla comprensione delle profonde implicazioni di $(D) + (P)$ è stato dato da Franchi, Lu e Wheeden in [16]. Questi autori hanno dimostrato che (D) e (P) implicano, sostanzialmente, una formula di rappresentazione di tipo *integrale frazionario*. La memoria [20] di Hajsasz e Koskela contiene un'ampia rassegna dei risultati ottenuti da questi stessi, ed altri autori, su questi argomenti.

Va inoltre ricordato il fondamentale contributo dato da Grigor'jan [17] e da Saloff-Coste [49] alla comprensione del significato *geometrico della disuguaglianza di Harnack*. Si deve ad entrambi questi autori la scoperta della necessità di (D) affinché valga (H) , e al secondo la scoperta della necessità anche di (P) . La recente monografia di Saloff-Coste [50] contiene una limpida presentazione delle connessioni fra $(D) + (P)$ e (H) , in vari contesti.

Dal Teorema 7.1 si ricavano immediatamente la disuguaglianza di Harnack e la regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di $\mathcal{L}u = 0$. Si ritrovano così, in questo contesto più generale, i celebri Teoremi di De Giorgi [9] e di Moser [36] relativi alle equazioni ellittiche classiche in forma di divergenza.

L'estensione dei Teoremi di De Giorgi e Moser ad una classe di operatori X -*ellittici*, apparve per la prima volta in [15]⁽³⁾.

La teoria del potenziale sviluppata da Stampacchia per gli operatori ellittici classici [54], si può estendere agli operatori X -*ellittici*, a partire dalle diguaglianze di Harnack e di Sobolev-Poincaré.

8. – Condizioni per $(D) + (P)$.

Il Teorema 7.1 riconduce la disuguaglianza di Harnack (H) alla proprietà di duplicazione (D) e alla disuguaglianza di Poincaré (P) . Esplicite condizioni sui campi X_j sufficienti a garantire queste due proprietà, risultano quindi di cruciale importanza.

Le prime condizioni apparse in letteratura sono relative a campi *diagonali*

$$X_j = \lambda_j \partial_j$$

e sono state date da Franchi e Lanconelli in [13, 14, 15].

Per campi vettoriali di classe C^∞ una condizione sufficiente per $(D) + (P)$ è quella del *rango massimo*. Precisamente, se $X_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, m$, e se

$$(R) \quad \text{rango Lie } \{X_1, \dots, X_m\}(x) = N \quad \forall x \in \Omega,$$

allora, per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $R > 0$ tale che

$$|B(x, 2r)| \leq A |B(x, r)| \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } 0 < r \leq R,$$

⁽³⁾ Il risultato fu dapprima presentato in [27], quindi annunciato in [13].

ove $|B(x, r)|$ indica la misura di Lebesgue del disco di centro x e raggio r nella metrica di controllo relativa alla famiglia $X = (X_1, \dots, X_m)$. A è una costante positiva indipendente da x e da r (Nagel-Stein-Wainger, [38]). Vale inoltre la disuguaglianza di Poincaré (P) sui dischi della metrica d_X , con centro $x \in K$ e raggio $r > 0$ (Jerison, [23]).

Per generali famiglie di campi vettoriali localmente lipschitziani il problema di individuare condizioni sufficienti per $(D) + (P)$ è ancora largamente aperto. Nella nota [29] è dimostrato che i dischi di una metrica di controllo d_X supportano una disuguaglianza di Poincaré se essi risultano *rappresentabili* mediante mappe di tipo *quasi-esponenziale* e *X-controllabili*. Rinviamo direttamente a [29, Th. 2.1, p. 330], per il preciso significato di questa affermazione. Montanari e Morbidelli hanno recentemente utilizzato questo Teorema per mostrare $(D) + (P)$ per famiglie di campi vettoriali non regolari di *passo due* [35]. Un approccio promettente allo studio di $(D) + (P)$, sembra essere la versione «non regolare» del Teorema di connettività di Chow, recentemente dimostrata da Rampazzo e Sussmann [47].

9. – Alcune equazioni ellittico-paraboliche non lineari.

In questo paragrafo mostreremo alcuni esempi di equazioni alle derivate parziali non lineari, del secondo ordine, con forma caratteristica semidefinita positiva, e con soggiacenti strutture sub-riemanniane. Come vedremo, esse si presentano in diversi contesti, teorici ed applicativi.

9.1. Equazioni semilineari.

Nello studio del problema di Yamabe per varietà di Cauchy-Riemann e del problema della curvatura scalare di Webster per la sfera unitaria di $\mathbb{C}^{n+1}$, si presentano equazioni semilineari del tipo seguente

$$(9.1) \quad \Delta_{\mathbb{H}} u + bu = Ru^{1+2/n} \quad \text{in } \mathbb{H}_n.$$

$\Delta_{\mathbb{H}_n}$ indica il sub-laplaciano canonico sul gruppo di Heisenberg-Weyl $\mathbb{H}_n$ (cfr. Esempio 1, paragrafo 3). L'esponente $1 + \frac{2}{n}$ è *critico* per $\Delta_{\mathbb{H}_n}$ così come $\frac{N+2}{N-2}$ è *critico* per il laplaciano classico in $\mathbb{R}^N$, $N > 2$. Precisamente, indicando con $\nabla_{\mathbb{H}_n}$ il *gradiente intrinseco* su $\mathbb{H}_n$:

$$\nabla_{\mathbb{H}} := (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

la disuguaglianza di immersione

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{H}_n)} \leq C \|\nabla_{\mathbb{H}_n} u\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$$

vale se e solo se

$$p = \frac{2Q}{Q-2}$$

ove $Q = 2n + 2$ è la *dimensione omogenea* di $\mathbb{H}_n$ rispetto al gruppo di dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda > 0}$,

$$\delta_\lambda(z, t) = (\lambda z, \lambda^2 t).$$

Queste dilatazioni sono automorfismi di $\mathbb{H}_n$ e verificano

$$|\delta_\lambda(E)| = \lambda^Q |E|$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile secondo Lebesgue (la misura di Lebesgue è invariante per le traslazioni a sinistra e a destra su $\mathbb{H}_n$. $|E|$ indica la misura di Lebesgue di E).

Osserviamo che l'esponente al secondo membro di (9.1) si può scrivere

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{Q+2}{Q-2} = \frac{2Q}{Q-2} - 1.$$

Il problema di Yamabe CR e il problema della curvatura di Webster conducono alla ricerca di soluzioni globali positive di (9.1). Un fondamentale contributo al primo di questi problemi è stato dato da Jerison e Lee in [24, 25]. Malchiodi e Uguzzoni hanno studiato il secondo problema fornendo in [33] un primo teorema di esistenza di tipo perturbativo.

9.1. Equazioni di tipo Kolmogorov non lineari. Nella teoria cinetica dei gas si presentano equazioni della forma seguente:

$$Yu = \mathfrak{J}(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

ove $u = u(x, y, t)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, rappresenta la densità di probabilità di particelle con velocità $(x_1, \dots, x_n)$ e posizioni $(y_1, \dots, y_n)$, al tempo t . Yu è la *derivata totale* di u

$$Y = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{y_i} - \partial_t,$$

e $\mathfrak{J}(u)$ è l'*operatore di collisione*, che può essere di tipo lineare o non lineare. Nel modello di Fokker-Planck-Landau è

$$(9.2) \quad \mathfrak{J}(u) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(z, u) \partial_{x_j} u + b_i(z, u))$$

ove i coefficienti a_{ij} e b_i dipendono da $z = (x, y, t)$ e dalla funzione incognita u attraverso alcune sue espressioni integrali. Questo operatore viene studiato come una versione semplificata dell'operatore di collisione di Boltzmann. Si

noti che nel caso di a_{ij} costanti e $b_i = 0$, l'equazione $Yu = \mathfrak{J}(u)$ coincide con quella lineare di Kolmogorov considerata nell'Esempio 3 del paragrafo 3.

Adattando il procedimento iterativo di Moser alla struttura di gruppo di Lie omogeneo soggiacente a questo operatore, Pascucci e Polidoro hanno recentemente dimostrato che le soluzioni deboli di

$$Yu = \sum_{ij=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(z)) \partial_{x_j} u$$

sono localmente limitate, nell'ipotesi che la matrice $(a_{ij}(z))_{ij=1, \dots, n}$ sia uniformemente definita positiva in $\mathbb{R}^n$ e con coefficienti solo limitati e misurabili [46]. Osserviamo esplicitamente che un risultato di regolarità hölderiana delle soluzioni aprirebbe la strada allo studio dell'equazione non lineare $Yu = \mathfrak{J}(u)$ con $\mathfrak{J}$ dato da (9.2).

Equazioni ultraparaboliche contenenti operatori di derivazione totale non lineari, si presentano nello studio di modelli matematici dei fenomeni di *convezione-diffusione* e di *finanza*. Prototipi di queste equazioni sono

$$\partial_y g(u) - \partial_t u = -\Delta_x u, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y, t \in \mathbb{R}.$$

L'equazione linearizzata

$$g'(u) \partial_y v - \partial_t v = -\Delta_x v,$$

se $g'(u) \neq 0$ è sufficientemente regolare, può essere ridotta alla forma seguente

$$(9.3) \quad \operatorname{div}(ADu) + \langle x, BDu \rangle = \partial_t u$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (9.3) è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra e alle dilatazioni del gruppo omogeneo

$$\mathcal{G} = (\mathbb{R}^{n+2}, \circ, \delta_\lambda)$$

con legge di composizione interna così definita

$$(z, t) \circ (z', t') = (z' + E(t') z, t + t').$$

Qui $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ e $E(t') = \exp(-t' B^T)$. Le dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda > 0}$ so-

no date da

$$\delta_\lambda(z, t) = \delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda^3 y, \lambda^2 t).$$

Rinviamo direttamente alla nota di rassegna [31] per maggiori dettagli, e per un'ampia bibliografia sugli argomenti presentati in questa sottosezione.

9.3. Equazioni di curvatura di Levi.

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 . Il grafico di u è una varietà reale $(2n+1)$ -dimensionale di $\mathbb{C}^{n+1}$. Indichiamo con $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ gli autovalori della forma di Levi (opportunamente normalizzata) del grafico di u nel punto $p = (x, u(x))$, $x \in \Omega$. Chiamiamo

$$K(x, u(x)) := \lambda_1(x) \cdot \dots \cdot \lambda_n(x)$$

e

$$M(x, u(x)) = \frac{\lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x)}{n}$$

rispettivamente la *curvatura totale di Levi* e la *curvatura media di Levi* del grafico di u nel punto $(x, u(x))$, si veda [34] e la bibliografia ivi citata. Assegnata una funzione $H : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il grafico di u ha curvatura totale, o media, uguale a $H(x, u(x))$ in un punto $(x, u(x))$, $x \in \Omega$, se e solo se u è soluzione di una equazione non lineare del tipo seguente:

$$(9.4) \quad \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij} X_i X_j(u) = H \quad \text{in} \quad \Omega$$

ove

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}(Du) & \text{nel caso curvatura media} \\ a_{ij}(Du, D^2u) & \text{nel caso curvatura totale} \end{cases}$$

e $X_j = \partial_{x_j} + a_j \partial_{x_{2n+1}}$ con $a_j = a_j(Du)$.

L'equazione (9.4) è ovunque «degenere» in Ω poichè essa coinvolge soltanto $2n$ derivate direzionali, variabili da punto a punto. Per ogni fissato punto di Ω esiste quindi un vettore $\xi \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ tale che

$$\langle X_j, \xi \rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, 2n.$$

Tuttavia, se u è *K-pseudoconvessa*, oppure *M-pseudoconvessa*, il che significa, rispettivamente, che in ogni punto $x \in \Omega$ risulta $\lambda_j(x) > 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, oppure $\lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) > 0$, allora l'operatore al primo membro di (9.4) acquista una struttura *sub-riemanniana*. Precisamente, nelle sud-

dette condizioni di «pseudoconvessità», in ogni punto di Ω , valgono le seguenti proprietà:

1. la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ è definita positiva (in $\mathbb{R}^{2n}$);
2. $\dim (\text{span } \{X_j(x), [X_j, X_k](x) : j, k = 1, \dots, n\}) = 2n + 1$.

Teoremi di esistenza di soluzioni viscosse per equazioni di tipo *curvatura di Levi*, sono stati dimostrati da Slodkowi e Tomassini in [51, 52].

Utilizzando tecniche analitico-geometriche adattate alle metriche di controllo relative alla struttura sub-riemanniana dell'equazione (9.4), sono stati successivamente ottenuti vari risultati di regolarità ottimale delle soluzioni K-pseudoconvesse (M-pseudoconvesse). Precisamente: (i) nel caso $n = 1$, Citti ha dimostrato che le soluzioni classiche di classe $C^{2,\alpha}$ sono C^∞ se il loro grafico ha curvatura C^∞ , e sempre diversa da zero [6]; (ii) lo stesso risultato è stato ottenuto in dimensione arbitraria da Citti-Montanari per un'equazione di tipo curvatura media [8], e da Lascialfari-Montanari per l'equazione della curvatura totale [32]; (iii) nel caso $n = 1$, nell'ipotesi $H \in C^\infty$ e sempre diversa da zero, Citti-Lanconelli-Montanari hanno dimostrato che le soluzioni viscosse trovate da Slodkowi e Tomassini sono in realtà di classe $C^{2,\alpha}$ e quindi, per il precedente risultato di Citti, di classe C^∞ [7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] K. AMANO, *Maximum Principle for degenerate elliptic-parabolic operators*, Ind. Univ. Math. J., **28**, no. 4 (1979), 545-557.
- [2] E. BEDFORD - B. GAVEAU, *Hypersurfaces with bounded Levi form*, Ind. Univ. Mat. J., **27**, no. 5 (1978), 867-873.
- [3] J. M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **19** (1969), 277-304.
- [4] M. BIROLI - U. MOSCO, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Dirichlet forms on homogeneous spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **6** (1995), 37-44.
- [5] C. COSTANTINESCU - A. CORNEA, *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.
- [6] G. CITTI, *C^∞ -regularity of solutions of the Levi equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **15**, no. 4 (1998), 517-534.
- [7] G. CITTI - E. LANCONELLI - A. MONTANARI, *Smoothness of Lipschitz continuous graphs with non vanishing Levi curvature*, Acta Mathematica, **188** (2002), 87-128.
- [8] G. CITTI - A. MONTANARI, *C^∞ -regularity of solutions of an equation of Levi's type in $\mathbb{R}^{2N+1}$* , Ann. Mat. Pura Appl., **180** (2001), 27-58.
- [9] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **3**, 6 (1957), 25-43.

- [10] M. DERRIDJ, *Une problème aux limite pour une classe d'opérateur du second ordre hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **21** (1971), 99-148.
- [11] G. FICHERA, *Sulle equazioni differenziali lineari ellitico-paraboliche del secondo ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **5** (1956), 1-30.
- [12] G. B. FOLLAND, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., **13** (1975), 161-207.
- [13] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *De Giorgi's Theorem for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Equations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **72**, no. 5 (1983), 273-277.
- [14] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Proceedings of the meeting «Linear Partial and Pseudo Differential Operators», Torino (1982), Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Special Issue (1984), 105-114.
- [15] B. FRANCHI - E. LANCONELLI, *Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operators with Measurable Coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **10**, no. 6 (1983), 523-541.
- [16] B. FRANCHI - G. LU - R. WHEEDEN, *A relationship between Poincaré-type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 1-14.
- [17] A. GRIGOR'YAN, *The heat equation on non- compact Riemannian manifolds* Matem. Sbornik, **182** (1991), 55-87. Engl. Transl. Math USSR Sb., **72** (1992), 47-77.
- [18] N. GAROFALO - D. H. NHIEU, *Isoperimetric and Sobolev inequality for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1996), 1153-1196.
- [19] J. HADAMARD, *Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **3**, no. 2 (1954), 337-346.
- [20] P. HAJLASZ - P. KOSKELA, *Sobolev met Poincaré*, Memoirs Amer. Math. Soc., **688** (2000).
- [21] L. HORMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119** (1967), 147-171.
- [22] R. HOWE, *On the rôle of the Heisenberg group in harmonic analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., **3**, no. 2 (1980), 821-843.
- [23] D. JERISON, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hormander condition*, Duke Math. J., **53** (1986), 503-523.
- [24] D. JERISON - J. M. LEE, *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), 1-13.
- [25] D. JERISON - J. M. LEE, *Extremals of the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Diff. Geom., **29** (1989), 303-343.
- [26] A. KOLMOGOROV, *Zur Theorie der Brownschen Bewegung*, Ann. Math., II Ser., **35** (1934), 116-117.
- [27] E. LANCONELLI, *Regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di certe equazioni ellittiche fortemente degeneri*, Seminario di Analisi Matematica Ist. Mat. Univ. Bologna (1981-1982), IX.1.-IX.27.
- [28] E. LANCONELLI - A. E. KOGOJ, *X-Elliptic Operators and X-Control Distances*, Ricerche di Matematica, Napoli, II Special Issue in Memory of Ennio De Giorgi, **38** (2000), 223-243.
- [29] E. LANCONELLI - D. MORBIDELLI, *On the Poincaré inequality for vector fields*, Arkiv för Matematik, **38** (2000), 327-342.

- [30] E. LANCONELLI - S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **52**, no. 1 (1994), 29-63.
- [31] E. LANCONELLI - A. PASCUCCI - S. POLIDORO, *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance*, in «Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics Vol. II In Honor of Professor O. A. Ladyzhenskaya» International Mathematical Series Kluwer Ed. (2002), 243-265.
- [32] F. LASCIALFARI - A. MONTANARI, *Smooth regularity for solutions of the Levi Monge-Ampère equation*, Rend. Mat. Acc. Naz. Lincei, **12** (2001), 115-123.
- [33] A. MALCHIODI - F. UGUZZONI, *A perturbation result for the Webster scalar curvature problem on the CR sphere*, J. Math. Pures Appl., **81** (2002), 983-997.
- [34] A. MONTANARI - E. LANCONELLI, *Pseudoconvex Fully Nonlinear Partial Differential Operators. Strong Comparison Theorems*, J. Differential Equations, **202** (2004), 306-331.
- [35] A. MONTANARI - D. MORBIDELLI, *Balls defined by nonsmooth vector fields and the Poincaré inequality*, Annales Inst. Fourier (Grenoble), **54**, 2 (2004), 327-339.
- [36] J. MOSER, *On Harnack's Theoreme for Elliptic Differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **24**, 6 (1961), 577-591.
- [37] J. MOSER, *On a pointwise Estimate for Parabolic Differential Equations*, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), 727-740.
- [38] A. NAGEL - E. M. STEIN - S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vectors fields I: Basic properties*, Acta Math., **155** (1985), 103-147.
- [39] L. NIRENBERG, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **6**, no. 6 (1953), 167-177.
- [40] O. A. OLEINIK - E. V. RADKEVIC, *Second Order Equations With Nonnegative Characteristic Form*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1973). Translated from Itogi Nauki-Serija Matematika (1971).
- [41] M. PICONE, *Maggiorazioni degli integrali di equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, Rend. Accad. Naz. Lincei., **5**, no. 6 (1927), 138-143.
- [42] M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche del secondo ordine*, Annali Mat. Pura Appl., **74** (1929), 145-192.
- [43] M. PICONE, *Nuove formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche*, Atti. Accad. Naz. Lincei, **28**, no. 6 (1938), 331-338.
- [44] B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **23** (1954), 422-434.
- [45] R. PHILLIPS - L. SARASON, *Elliptic-parabolic equations of the second order*, J. Math. Mech., **17** (1967/1968), 891-917.
- [46] S. POLIDORO - A. PASCUCCI, *The Moser iterative method for a class of ultraparabolic equations*, Commun. Contemp. Math., **6**, 2 (2004), 1-23.
- [47] F. RAMPAZZO - H. J. SUSSMANN, *Set-valued differentials and a nonsmooth version of Chow's theorem*, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, 2001, IEEE Publications, New York, **3** (2001), 2613-2618.
- [48] L. P. ROTHSCILD - E. M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., **137** (1976), 247-320.
- [49] L. SALOFF-COSTE, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequality*, Internat. Math. Res. Notices (1992), 27-38.

- [50] L. SALOFF-COSTE, *Aspects of Sobolev-type inequalities*, London Math. Society, Lectures Note Series **289**, Cambridge University Press (2002).
- [51] Z. SŁODKOWKI - G. TOMASSINI, *Weak solutions for the Levi equation and envelope of holomorphy*, Ind. Univ. Mat. J., **101**, no. 2 (1991), 392-407.
- [52] Z. SŁODKOWSKI - G. TOMASSINI, *The Levi equation in higher dimension and relationships to the envelope of holomorphy*, Amer. J. of Math., **116** (1994), 479-499.
- [53] E. M. STEIN, *Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integral*, Princeton University Press, Princeton, N.J (1978).
- [54] G. STAMPACCHIA, *Le Problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189-258.
- [55] G. TOMASSINI, *Geometric properties of the solutions of the Levi equation*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **57** (1987), 103-108.
- [56] G. TOMASSINI, *Geometric properties of solutions of the Levi Equation*, Ann. Mat. Pura Appl., **27**, no. 5 (1988), 331-334.
- [57] G. TOMASSINI, *Nonlinear equations related to the Levi form*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **40** (1991), 281-297.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, P.zza di Porta S. Donato, 5
I-40127 Italy. E-mail: lanconel@dm.unibo.it