Alessandro Verra

Problemi di razionalità ed unirazionalità in geometria algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.1, p. 77–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_1_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 77-102

Problemi di razionalità ed unirazionalità in geometria algebrica.

ALESSANDRO VERRA (*)

Summary. – *This exposition aims to introduce in an elementary way the unirationality/rationality problems in Algebraic Geometry. The text focuses on the case of the hypersurfaces of a complex projective space. Using this example many classical themes and questions are presented, as well as further problems concerning the class of rationally connected varieties and the families of rational curves contained in such varieties.*

Sunto. – *Il presente articolo è una versione allargata della omonima conferenza tenuta a Milano durante il XVII convegno nazionale UMI nel settembre 2003. L'articolo ha come abiettivo principale quello di presentare una introduzione, il più possibile elementare, ai problemi di razionalità/unirazionalità in geometria algebrica. Avendo come punto di riferimento l'esempio delle ipersuperfici dello spazio proiettivo complesso, in particolare le ipersuperfici cubiche, vengono presentati temi classici e problemi più recenti riguardanti le varietà razionalmente connesse e le famiglie di curve razionali in esse contenute.*

1. – Parametrizzazioni razionali di una varietà algebrica.

Questa esposizione ha come scopo principale quello di presentare una serie di esempi e di risultati che possano rendere accessibili, anche ai meno esperti della materia, le questioni di unirazionalità e di razionalità in geometria algebrica. Proprio la relativa semplicità degli esempi, e l'assenza di risposte esaurienti su numerosi e fondamentali problemi ad essi relativi, potranno poi dare un'idea del fascino e dell'interesse che tali questioni possiedono, oggi come ieri.

È facile iniziare considerando lo spazio affine k^n, definito su un campo k, e un suo sottoinsieme non vuoto

$$V \subset k^n$$

(*) Conferenza tenuta a Milano il 9 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

definito da un sistema di equazioni polinomiali

$$F_1(X_1, \dots, X_n) = \dots = F_s(X_1, \dots, X_n) = 0 .$$

Un problema del tutto naturale è il seguente: *determinare equazioni parametriche razionali per V*. Si tratta cioè di determinare funzioni razionali $\phi_1, \dots, \phi_n \in k(t_1, \dots, t_r)$ tali che l'immagine della mappa razionale

$$\phi : k^r \to k^n$$

da esse definita sia V o contenga un aperto denso. V è una varietà algebrica affine, più in generale possiamo dare la seguente

(1.1). DEFINIZIONE. – *Una varietà algebrica X, definita su k, è unirazionale su k se esiste una mappa razionale dominante*

$$\phi : k^r \to X .$$

In tal caso diremo che ϕ è una parametrizzazione razionale di X.

Si noti che ϕ determina una estensione di campi

$$\phi^* : k(X) \to k(t_1, \dots, t_r)$$

dove $k(X)$ indica il campo delle funzioni razionali di X. È facile verificare che:

(1.2). PROPRIETÀ. – *X è unirazionale su k $\Leftrightarrow$ $k(t_1, \dots, t_r)$ è una estensione di $k(X)$.*

L'esistenza di una parametrizzazione razionale $\phi : k^r \to X$ può far sperare nell'esistenza di una parametrizzazione *birazionale* e cioè di una mappa razionale

$$\psi : k^n \to X$$

che sia invertibile su un aperto denso.

(1.3). DEFINIZIONE. – *X è razionale su k se esiste una parametrizzazione birazionale*

$$\psi : k^n \to X .$$

In tal caso X ha dimensione n e $k(t_1, \dots, t_n)$ è il campo delle funzioni razionali di X. Quali sono le varietà algebriche unirazionali e quali quelle razionali? In realtà tali proprietà sono, per così dire, poco diffuse in natura e cioè sono soddisfatte da classi molto speciali di varietà.

Le proprietà in questione sono invarianti per trasformazioni birazionali. Non sarà quindi troppo restrittivo limitare la discussione al caso delle varietà proiettive, lisce e irriducibili, immerse in uno spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_k^r$. Nello spazio ambiente $\boldsymbol{P}_k^r$ tali varietà si distribuiscono in famiglie, definite da opportuni caratteri numerici che individuano varie proprietà fondamentali dei membri della famiglia stessa. Un esempio semplicissimo di famiglia di varietà algebriche è costituito dall'insieme

$$\sum_{i_0 + \cdots + i_r = d} a_{i_0 \ldots i_n} X_0^{i_0} \cdots X_r^{i_r} = 0 \,,$$

di tutte le ipersuperfici *lisce* di grado d dello spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_k^r$.

Possiamo cominciare la rassegna dei problemi di unirazionalità e razionalità utilizzando proprio questo esempio fondamentale. Sia dunque X una ipersuperficie *liscia* di grado d, nel caso $d = 2$ la questione che ci interessa è ben conosciuta e risolta:

(1.4). Razionalità di una quadrica X. – *X è razionale $\Leftrightarrow$ X è unirazionale $\Leftrightarrow$ X contiene un punto.*

L'esistenza di un punto $o \in X$ permette di costruire equazioni parametriche birazionali di X mediante la proiezione stereografica di centro o.

Continuando in tale generalità la situazione diventa estremamente ardua e difficile già per il caso $d = 3$. Il problema della razionalità di una ipersuperficie cubica liscia di uno spazio proiettivo continua ad essere ben presente ed ha accompagnato la storia della geometria algebrica degli ultimi due secoli, dando spesso origine a risultati spettacolari. Nel caso generale di un campo k qualsiasi anche il problema dell'unirazionalità di una cubica non è affatto semplice, ed ha una storia altrettanto interessante. Possiamo menzionare quanto segue:

(1.5). Unirazionalità di una cubica X (J. Kollar 2000). – *Sia $r \geqslant 3$: X è unirazionale $\Leftrightarrow$ X contiene un punto.*

La dimostrazione di Kollar, ([K1]), si basa, come lo stesso autore afferma, sull'analogo risultato provato nel 1943 da Beniamino Segre per $k = \boldsymbol{Q}$, nel caso di una superficie cubica ([S]). Quest'ultimo risultato fu in seguito variamente utilizzato ed esteso da Manin nel suo libro «Cubic Forms», ([CF] II.2 e IV.8), e da Colliot-Théléne, Sansuc e Swinnerton-Dyer in [CSS]. Vale la pena di riportare, a causa della sua semplicità e della sua eleganza, l'idea geometrica soggiacente alla dimostrazione di Beniamino Segre: nella sua possibilità di applicazione in dimensione qualsiasi.

Sia $k = \boldsymbol{Q}$ e sia $o \in X \subset \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Q}}^r$. Il punto o ha coordinate razionali, per dimostrare che X è unirazionale si considera una retta generica l passante per o. l interseca la chiusura complessa $X_{\boldsymbol{C}}$ di X in due punti $u = (u_0 \colon \cdots \colon u_r)$ e $\overline{u} = (\overline{u}_0 \colon \cdots \colon \overline{u}_r)$ tali che u_i e $\overline{u}_i$ sono numeri complessi coniugati appartenenti ad una stessa estensione quadratica L di $\boldsymbol{Q}$. Sia $X_L \subset \boldsymbol{P}_L^r$ la chiusura di X su L e siano H_u, $H_{\overline{u}} \subset \boldsymbol{P}_L^r$ gli iperpiani tangenti a X_L rispettivamente in u e $\overline{u}$. Le sezioni iperpiane

$$S_u = H_u \cap X_L \quad \text{e} \quad S_{\overline{u}} = H_{\overline{u}} \cap X_L$$

hanno allora un punto singolare rispettivamente in u e in $\overline{u}$. Poiché la scelta di l è generica è ammissibile che si tratti di un punto doppio. Essendo $r \geqslant 3$ è possibile dimostrare che S_u e $S_{\overline{u}}$ sono irriducibili. Si noti infine che l'involuzione di coniugio $j : X_L \to X_L$ scambia S_u con $S_{\overline{u}}$ e u con $\overline{u}$. Come è beno noto una cubica dotata di un punto doppio è razionale, esiste dunque una mappa birazionale

$$f: L^{r-2} \to S_u .$$

Sia $t \in L^{r-2}$, la retta congiungente $f(t)$ e $j \cdot f(t)$ interseca X_L in questi due punti ed in un terzo punto $\phi(t)$ a coordinate razionali. Quindi $\phi(t)$ appartiene a X. La costruzione definisce dunque una mappa

$$\phi : L^{r-2} \to X$$

che associa a t il punto $\phi(t)$. Si noti che $L^{r-2} = \boldsymbol{Q}^{2r-4}$ e che ϕ è una mappa razionale definita su $\boldsymbol{Q}$. ϕ risulta essere la parametrizzazione razionale richiesta.

Nello stesso articolo [K1] Kollar fa la seguente osservazione in merito alla nozione generale di unirazionalità:

«Unirationality of varieties is very poorly understood in general and there are very basic open questions. We do not even have a list of unirational surfaces and very few examples are known in higher dimensions.»

Vedremo nel seguito come la situazione possa, almeno per certi aspetti e per certi risultati, essere considerata con minore pessimismo.

2. – I criteri classici di razionalità.

È abbastanza chiaro dalle precedenti considerazioni che le questioni di unirazionalità e di razionalità trovano la loro collocazione naturale proprio nel caso in cui k è un campo arbitrario. D'altra parte alcune restrizioni sono necessarie: sia per poter seguire questa materia nel suo sviluppo storico, sia per svolgere un discorso più coerente. Salvo avviso del contrario supporremo dunque che k sia il campo complesso.

È giunto anche il momento, prima di sfruttare ulteriormente l'esempio delle ipersuperfici, di richiamare sommariamente i principali capitoli di una storia ormai plurisecolare. Lo studio dei problemi di razionalità ed unirazionalità si è sviluppato a partire dai casi di dimensione più bassa, considerando inizialmente il caso delle curve, poi quello delle superfici e infine il caso delle varietà algebriche tridimensionali. Il punto di partenza è il classico teorema di Lueroth, valido su un campo arbitrario:

(2.1). TEOREMA (Lueroth 1876). – *Sia X una curva algebrica irriducibile definita su k*:

$$X \text{ unirazionale } \Rightarrow X \text{ razionale}.$$

L'implicazione inversa è ovvia. Inoltre, se k è algebricamente chiuso, abbiamo:

$$X \text{ unirazionale } \Leftrightarrow X \text{ razionale } \Leftrightarrow X \text{ ha genere geometrico } 0.$$

In dimensione 1 si verificano dunque due fenomeni particolarmente notevoli:

– l'unirazionalità equivale alla razionalità,
– l'unirazionalità equivale all'annullarsi di un invariante birazionale fondamentale della varietà: il genere geometrico.

Queste due osservazioni, a partire dall'epoca di Lueroth, influenzeranno tutte le ricerche sui problemi di unirazionalità e razionalità in geometria algebrica. Ci sarebbe naturalmente molto da dire in merito, anche perché, come si è già osservato, si tratta di una storia ormai plurisecolare. Ci limiteremo, per ovvi motivi, a riportare alcuni passaggi fondamentali che saranno poi utili per descrivere il quadro attuale della situazione.

Il teorema di Lueroth si trasformò per un periodo di tempo durato circa un secolo nel:

(2.2). PROBLEMA DI LUEROTH. – *Sia X di dimensione arbitraria*:

$$\text{unirazionale } \Rightarrow \text{ razionale}\,?$$

Un problema strettamente collegato a quest'ultimo era, in epoca classica, quello di ottenere:

(2.3). CRITERI DI RAZIONALITÀ. – *Ovvero condizioni necessarie e sufficienti sui caratteri numerici birazionalmente invarianti di X affinché X sia razionale.*

Quest'ultimo problema è in qualche misura indeterminato, almeno fino a quando non si sia stabilito quali siano i caratteri numerici a cui si fa riferimento. Sia X una varietà complessa, compatta e connessa, di dimensione n. I caratteri numerici di X presi in considerazione dai geometri algebrici classici erano sostanzialmente i seguenti:

– *genere geometrico*: $p_g(X) = \dim H^0(K_X)$, dimensione dello spazio vettoriale delle n-forme olomorfe definite su X.

– *plurigeneri*: $P_r(X) = \dim H^0(K_X^{\otimes r})$, (definiti per $r \geqslant 1$), dimensione dello spazio vettoriale degli r-tensori di n-forme olomorfe definiti su X.

– *irregolarità*: $q(X) = \dim H^0(\Omega^1_X)$, dimensione dello spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe definite su X.

Ω^1_X indica qui il fibrato cotangente a X, mentre $K_X = \det \Omega^1_X$ è il fascio canonico. I caratteri numerici considerati si annullano sia nel caso razionale che nel caso unirazionale:

(2.4). PROPRIETÀ. – *Sia X una varietà proiettiva, liscia e irriducibile*:

$$X \text{ unirazionale} \Rightarrow p_g(X) = q(X) = P_r(X) = 0 \, .$$

La stessa proprietà vale se due punti generali su X sono connessi da una curva razionale.

La dimostrazione si basa su due fatti elementari:

(1) una 1-forma olomorfa su una curva razionale, liscia e proiettiva, è nulla.

(2) Se due punti generali di X sono connessi da una curva razionale allora per un punto generale o di X passano infinite curve razionali e i loro vettori tangenti in o generano lo spazio tangente $T_{X,o}$.

Il massimo successo raggiunto nella ricerca di un criterio di razionalità risale all'epoca di Guido Castelnuovo e riguarda il caso delle superfici algebriche:

(2.5). CRITERIO DI RAZIONALITÀ DI CASTELNUOVO (1892). – *Sia X una superficie algebrica complessa. Allora*

$$X \text{ è razionale} \Rightarrow P_2(X) = q(X) = 0 \, .$$

In particolare anche per una superficie algebrica complessa vale l'equivalenza:

$$X \text{ unirazionale} \Leftrightarrow X \text{ razionale} \, .$$

Il criterio di Castelnuovo vale su un campo algebricamente chiuso. Le sue possibili estensioni al caso di un campo k arbitrario sono state studiate specialmente da Manin ed Iskovskih, in relazione con il problema della razionalità di varietà algebriche tridimensionali dotate di un fascio di superfici razionali, (cfr. [I3], [M]). Non mancano naturalmente i contribuiti di autori classici italiani al caso in cui k non è algebricamente chiuso. Tra i molti basti menzionare, oltre a Beniamino Segre, il nome di Annibale Comessatti per lo studio delle superfici algebriche reali. Nel contesto del criterio di Castelnuovo è il caso di ricordare come non valga l'implicazione

$$p_g(X) = q(X) = 0 \Rightarrow p_g(X) = P_2(X) = 0 \, ,$$

che in qualche misura ci si potrebbe aspettare. Fu Enriques nel 1896 a costruire un celebre esempio di superficie non razionale e tale che $p_g(X) = q(X) = 0$ e $P_2(X) = 1$. Si tratta delle superfici note oggi come superfici di Enriques, un cui modello birazionale è rappresentato da uno sestica dello spazio proiettivo complesso passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, (cfr. [CD]).

Il criterio di razionalità di Castelnuovo rappresenta forse l'ultimo caso in cui i problemi di cui ci stiamo occupando appartengono ad un universo ordinato e preciso: esiste un criterio numerico di razionalità e il problema di Lueroth ha risposta positiva. I problemi di razionalità e unirazionalità in dimensione tre e superiore rappresentano un sovvertimento del precedente ordine e in qualche modo apriranno la via ad un punto di vista un po' diverso basato sulla nozione di *varietà razionalmente connessa* che riconsidereremo tra poco. Preliminarmente è tuttavia opportuno proseguire con l'esempio delle ipersuperfici ed ancora con le cubiche.

3. – Problemi di razionalità per le ipersuperfici cubiche.

Il problema della razionalità di una ipersuperficie cubica definita sul campo complesso continua ad essere di importanza fondamentale: sia per la parte già risolta e ben conosciuta sia per la parte rimasta aperta.

(3.1). PROBLEMA. – *Sia* $X \subset \boldsymbol{P}^r$ *un ipersuperficie cubica complessa liscia: X è razionale*?

$r = 2$ NO

Una cubica piana X liscia ha genere geometrico uno e quindi non è razionale.

$r = 3$ SI

Una superficie cubica liscia contiene 27 rette che formano una ben nota configurazione. Scegliendone due sghembe L_1, L_2 si può costruire una mappa birazionale

$$f : L_1 \times L_2 \to X$$

così definita: $y = f(x_1, x_2)$, dove $x_i \in L_i$ e y è il terzo punto di intersezione di X con la retta congiungente x_1 e x_2. f definisce una parametrizzazione birazionale di X.

La discussione del problema della razionalità di una superficie cubica di $\boldsymbol{P}^3_k$, dove k è un campo qualsiasi, è uno dei temi principali del già citato libro «Cubic Forms» di Manin.

$r = 4$ NO (Clemens-Griffiths 1972)

Come è noto lo studio del problema della razionalità di una cubica tridimensionale X, a lungo portato avanti da un grande precursore come Guido Fano, trova una risposta definitiva nel 1972 con la dimostrazione di Clemens e Griffiths. Sarà utile descrivere un po' più in dettaglio alcuni aspetti di questo caso, iniziando con alcune osservazioni:

(1) Come sappiamo X è unirazionale ed ha quindi caratteri numerici nulli come nel caso di una varietà razionale. I caratteri numerici classici non sono quindi utilizzabili per dimostrare la non razionalità di X.

(2) Lo studio del gruppo $\mathrm{Bir}(V)$ degli automorfismi birazionali di una varietà algebrica V di dimensione n è, in linea di principio, utile per discutere la non razionalità di V. $\mathrm{Bir}(V)$ è infatti invariante per traformazioni birazionali e pertanto vale l'implicazione

$$V \text{ razionale } \Rightarrow \mathrm{Bir}(V) \cong \mathrm{Bir}(\boldsymbol{P}^n).$$

La non razionalità della cubica tridimensionale X potrebbe dunque essere dimostrata provando che $\mathrm{Bir}(X)$ non è isomorfo al gruppo cremoniano $\mathrm{Bir}(\boldsymbol{P}^3)$. Questa fu una delle vie tentate da Fano. È tuttavia vero che ancora oggi $\mathrm{Bir}(\boldsymbol{P}^3)$ è ben poco conosciuto, e tantomeno $\mathrm{Bir}(X)$.

(3) Lo studio della varietà $F(X)$ delle rette di X, ancora una volta iniziato e sviluppato da Fano, apre in un certo senso la via alla dimostrazione di Clemens e Griffiths. Questi ultimi utilizzano peraltro in modo essenziale i metodi della teoria di Hodge. La teoria di Hodge di X e quella di $F(X)$ sono strettamente collegate. In particolare la mappa cilindro

$$c : H^1(F(X), \boldsymbol{Z})) \to H^3(X, \boldsymbol{Z}),$$

che associa alla classe di coomologia di un 1-ciclo $\gamma \subset F(X)$ la classe di coomologia del 3-ciclo Γ unione delle rette parametrizzate da γ, è un isomorfismo. Tale isomorfismo preserva il cup product e rispetta la decomposizione di Hodge quando lo si estenda alla coomologia a coefficienti complessi. L'oggetto chiave considerato da Clemens e Griffiths in questo contesto è la *Jacobiana intermedia* di X, cioè il toro complesso

$$JX =: H^{2,1}(X, \boldsymbol{C})^* / H_3(X, \boldsymbol{Z}). \tag{3.2}$$

Qui $H^{2,1}(X, \boldsymbol{C})^* \cong \boldsymbol{C}^5$ è il duale dello spazio vettoriale delle 3-forme di tipo (2,1) nella decomposizione di Hodge della coomologia di De Rham complessa di X. In tale spazio è opportunamente immerso come reticolo il grupo di omologia $H_3(X, \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}^{10}$. JX ha dimensione 5 ed è una varietà abeliana, cioè ammette una immersione olomorfa in uno spazio proiettivo. Utilizzando l'isomorfismo dato dalla mappa cilindro si può provare che JX è biolomorfo ad un altro toro complesso interessante e cioè la varietà di Albanese

$$\mathrm{Alb}(F(X)) =: H^0(\Omega^1_{F(X)})^* / H_1(F(X), \boldsymbol{Z}) \tag{3.3}$$

di $F(X)$. Su entrambi i tori è univocamente determinata, a meno di un fattore costante, una funzione theta simmetrica. Il luogo degli zeri di questa è una ipersuperficie nel toro che prende il nome di divisore theta. La mappa biolomorfa manda il divisore theta del primo toro nel divisore theta del secondo. I due tori, ed i rispettivi divisori theta, possono in sostanza essere identificati. Sarà utile sapere nel seguito che JX è la varietà di Albanese di $F(X)$.

(3.4). TEOREMA (Clemens-Griffiths). – *X non è razionale.*

Schema della dimostrazione:

(1) X razionale $\Rightarrow \mathrm{Alb}(F(X))$ è la Jacobiana J di una superficie di Riemann R o un prodotto di tali Jacobiane.

(2) In particolare il divisore theta di $\mathrm{Alb}(F(X))$ deve coincidere, a meno di traslazioni sul toro, con il divisore theta naturalmente definito su J in quanto Jacobiana di R o prodotto di tali Jacobiane.

(3) I due divisori theta non possono coincidere:
siano infatti Θ_X il divisore theta di $\mathrm{Alb}(F(X))$ e Θ_J il divisore theta di J. Θ_J è dunque il divisore theta della Jacobiana di una superficie di Riemann R di genere $g = 5$, oppure è il divisore theta di un prodotto 5-dimensionale di Jacobiane. In entrambi i casi l'insieme dei punti singolari di Θ_J è infinito. Segue infatti dal teorema di singolarità di Riemann che la dimensione del luogo singolare del divisore theta della Jacobiana di una superficie di Riemann di genere g è almeno $g - 4$. La stessa proprietà vale per un prodotto g-dimensionale di Jacobiane. Clemens e Griffiths dimostrano che, al contrario, Θ_X ha un unico punto singolare.

Vediamo ora di discutere qualche ulteriore aspetto della dimostrazione e qualche altra proprietà della Jacobiana intermedia, forse utili per la discussione del caso successivo. Sia

$$a_1 \colon F(X) \to \mathrm{Alb}(F(X)) = JX$$

la mappa di Albanese e sia

$$S = a_1(F(X)).$$

La mappa a_1 risulta essere una mappa birazionale tra $F(X)$ e S, la classe di coomologia $[S]$ di S in JX si calcola:

$$[S] = \frac{\theta^3}{3!} \in H^6(JX, \boldsymbol{Z}),$$

dove $\theta \in H^2(J(X), \boldsymbol{Z})$ è la classe del divisore $\Theta_X \subset JX$ già considerato. Supponiamo per assurdo che

$$JX = JR,$$

dove JR è la Jacobiana della superficie di Riemann R, e che i divisori theta di JX e di JR coincidano a meno di traslazioni. Allora θ è, ovviamente, la classe di coomologia del divisore theta di una Jacobiana. Grazie a un teorema di Olivier Debarre del 1995, ([D]), le sottovarietà di una Jacobiana aventi certe classi di coomologia sono completamente caratterizzate. Applicando alla classe $[S] = \frac{\theta^3}{3!}$ questo teorema si ottiene che, a meno di traslazioni, S è l'immagine della mappa di Abel

$$a_2 \colon R^{(2)} \to JR\,,$$

dove $R^{(2)}$ indica il 2-prodotto simmetrico della curva R e cioè la varietà delle coppie non ordinate di punti di R. Poiché anche a_2 è una mappa birazionale sulla propria immagine se ne deduce che $F(X)$ e $R^{(2)}$ sono birazionali. Con pochissimo lavoro in più si può in conclusione dimostrare che vale l'implicazione seguente:

$$JX = JR \Rightarrow F(X) = R^{(2)}. \tag{3.5}$$

Allora una variante della dimostrazione di Clemens e Griffiths può basarsi sulla dimostrazione della seguente proprietà: la varietà delle rette di una ipersuperficie cubicia liscia di $\boldsymbol{P}^4$ non è il 2-prodotto simmetrico di una curva (di genere 5). La dimostrazione di tale proprietà può seguire da un risultato di Alberto Collino, ([CO]), sul gruppo fondamentale di $F(X)$, oppure, più semplicemente, dal calcolo della caratteristica di Eulero-Poincaré di $F(X)$ e di $R^{(2)}$. Si veda anche l'articolo [T] di Alexander Tjurin per ulteriori commenti. L'argomento avvicina i problemi di razionalità per le cubiche di $\boldsymbol{P}^4$ ai problemi di razionalità per le cubiche di $\boldsymbol{P}^5$, dove i 2-prodotti simmetrici riemergono in un'altra forma.

$r = 5$ SI e NO?

Il problema della razionalità dell'ipersuperficie cubica di $\boldsymbol{P}^5$ si è finora dimostrato inattaccabile ed è certamente una delle più interessanti questioni ancora aperte. Esistono esempi elementari di cubiche lisce 4-dimensionali razionali. Una famiglia meno elementare di tali cubiche fu scoperta da Morin nel 1940 e riconsiderata successivamente da Beauville e Donagi, (cfr. [Mo] e [BD]). Una serie più recente di esempi è dovuta a Hassett, ([H2]). Tutte le famiglie note di cubiche razionali sono speciali, mentre il problema della razionalità di una cubica generale X di $\boldsymbol{P}^5$ rimane irrisolto. L'uso di strumenti analoghi a quelli precedenti, e cioè lo studio di X con i metodi della teoria di Hodge, porta a quanto segue:

(3.6). TEOREMA (Beauville-Donagi, 1985). – *Sia $X \subset \boldsymbol{P}^5$ una cubica liscia:*

(1) *La varietà delle rette $F(X)$ di X è deformazione della desingolarizzazione naturale del 2-prodotto simmetrico $R^{(2)}$ di una superficie algebrica R del tipo $K3$.*

(2) *Analogamente al caso di una cubica di* $\boldsymbol{P}^4$ *si ha una mappa cilindro*

$$c : H^2(F(X), \boldsymbol{Z}) \to H^4(X, \boldsymbol{Z})$$

che induce un isomorfismo tra le corrispondenti strutture di Hodge.

(3) $F(X)$ *è una varietà olomorfa simplettica.*

(3.7). OSSERVAZIONI.

(i) La desingolarizzazione naturale di $R^{(2)}$ è lo schema di Hilbert $R[2]$ dei sottoschemi 0-dimensionali di lunghezza due di R.

(ii) Una superficie complessa M, compatta e connessa, si dice del tipo K3 se è semplicemente connessa e se ha una 2-forma olomorfa globale ω mai nulla.

(iii) $F(X)$ è semplicemente connessa e possiede una 2-forma olomorfa Ω che non è mai nulla e genera lo spazio vettoriale delle 2-forme olomorfe.

Le classi di isomorfismo biregolare delle cubiche di $\boldsymbol{P}^4$ formano una varietà

$$\mathcal{C} \tag{3.8}$$

di dimensione 20, mentre le classi di isomorfismo delle superficie K3 immerse in $\boldsymbol{P}^g$ come superfici di grado $2g-2$ si distribuiscono in una successione numerabile di famiglie

$$\mathcal{K}_g, \qquad g \geqslant 2 \tag{3.9}$$

di dimensione 19. Sia

$$\mathcal{C}_{\mathrm{rat}} \subset \mathcal{C}$$

il luogo delle classi di isomorfismo delle cubiche razionali: la congettura più diffusa sulla razionalità/non razionalità di una cubica di $\boldsymbol{P}^5$ può essere presentata, tralasciando qualche tecnicalità, nel modo seguente.

(3.10). CONGETTURA.

(1) *Se* X *è razionale allora* $F(X) = R[2]$ *dove* R *è una superficie K3 proiettiva.*

(2) $\mathcal{C}_{\mathrm{rat}}$ *è una unione numerabile di ipersuperfici* D_n, $n \geqslant 1$.

(3) *Per ogni* D_n *esiste una famiglia* $\mathcal{K}_g$ *tale che: se* X *ha classe di isomorfismo in* D_n *allora* $F(X) = R[2]$, *dove* R *è una K3 con classe di isomorfismo in* $\mathcal{K}_g$.

La situazione descritta dalla parte (2) di questa congettura è tipica anche di altri casi in cui ci si confronta con problemi di razionalità o di unirazionalità. Ad esempio ci si attende che le ipersuperfici quartiche unirazionali di $\boldsymbol{P}^4$ formino una unione numerabile di chiusi, mentre la generica dovrebbe non essere unirazionale. Altrettanto ci si attende per le ipersuperfici di $\boldsymbol{P}^r$ di grado opportunamente piccolo.

Che cosa è noto sulla razionalità di una cubica $X \subset \boldsymbol{P}^5$ e sulla precedente congettura? Per darne conto conviene ritornare ad alcune costruzioni della geometria proiettiva classica.

(3.11). Esempi di cubiche razionali.

(1) *Un esempio elementare.* Si consideri una cubica

$$X \subset \boldsymbol{P}^{2m+1}$$

liscia e contenente due spazi lineari disgiunti di dimensione m. Il lettore potrà agevolmente dimostrare la razionalità di X generalizzando il caso $m = 1$ delle superfici cubiche, già svolto precedentemente. La famiglia di queste X ha codimensione 2 nella famiglia di tutte le cubiche di $\boldsymbol{P}^{2m+1}$.

(2) *L'esempio di Morin* ([Mo], 1940). – L'esempio più importante di cubica razionale liscia di $\boldsymbol{P}^5$ è stato costruito da Ugo Morin, a cui sono dovuti, come vedremo, altri notevoli risultati sull'unirazionalità di ipersuperfici. Sia

$$X \subset \boldsymbol{P}^5$$

una cubica contenente una superficie rigata razionale Y liscia e di grado 4. Y ha una particolare proprietà: per un punto generale di $\boldsymbol{P}^5$ passa una e una sola retta secante Y in due punti. Non è restrittivo assumere che un punto generale di X abbia tale proprietà. Allora Y determina automaticamente una mappa birazionale

$$\phi : X \to Y^{(2)}$$

che associa a $x \in X$ la coppia non ordinata $(y_1, y_2) \in Y^{(2)}$, costituita dai due punti di intersezione di Y con l'unica retta secante a Y passante per x. Poiché Y è razionale anche $Y^{(2)}$ lo è e quindi anche X è razionale.

Morin aveva erroneamente ritenuto che una cubica generale X contenesse sempre una Y e ne aveva dedotto la razionalità della X generica. Il problema è che la famiglia delle Y contenute in una X ha dimensione superiore a quella attesa, e cioè due anziché uno, come fu successivamente osservato da Fano in [F]. Questo fa si che una X generica non contenga Y. L'esempio di Morin è stato riconsiderato da Beauville e Donagi, che lo hanno in parte utilizzato per dimostrare il teorema (3.6). In particolare si ha in questo caso

$$F(X) = R[2]$$

dove R è una superficie K3 con classe di isomorfismo nella famiglia $\mathcal{K}_8$. La cubica di Morin è anche caratterizzata dalla proprietà che la sua equazione sia lo pfaffiano di una matrice antisimmetrica di forme lineari: sia

$$G \subset \boldsymbol{P}^{14}$$

la immersione di Pluecker della Grassmanniana G delle rette di $\boldsymbol{P}^5$. È ben noto che la varietà unione delle rette bisecanti a G è una cubica

$$\operatorname{Sec} G \subset \boldsymbol{P}^{14}$$

ed è lo pfaffiano della matrice antisimmetrica (p_{ij}), dove le p_{ij} sono le coordinate di Pluecker, $(P_{ij} = -P_{ji})$. Da ciò segue che, in termini più geometrici, una cubica di Morin X è caratterizzata dalla condizione

$$X = Sec\, G \cap L\,, \tag{3.12}$$

dove L è un sottospazio 5-dimensionale in $\boldsymbol{P}^{14}$. Anche la superficie R è legata alla Grassmanniana G, precisamente

$$R = G^* \cap L^{\perp} \subset \boldsymbol{P}^{14\,*}\,,$$

dove G^* è la immersione di Pluecker della Grassmanniana duale di G nello spazio duale $\boldsymbol{P}^{14\,*}$ e $L^{\perp}$ è lo spazio ortogonale a L in $\boldsymbol{P}^{14\,*}$.

La famiglia $D \subset \mathcal{C}$ delle classi di isomorfismo delle cubiche di Morin è, come previsto dalla congettura (3.10), un'ipersuperficie. Non si conoscono altre ipersuperfici che siano componenti di $\mathcal{C}_{\mathrm{rat}}$. Tutte le altre famiglie conosciute di cubiche razionali di $\boldsymbol{P}^5$ parametrizzano invece sottovarietà di $\mathcal{C}$ di codimensione $\geqslant 2$. Secondo la congettura ognuna di queste dovrebbe essere contenute in una ipersuperficie componente di $\mathcal{C}_{\mathrm{rat}}$. Gli esempi successivi, descritti da Hassett, danno qualche ulteriore conferma in merito.

(3) *Gli esempi di Hassett,* ([H2], 2000). Sia $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ la famiglia delle classi di isomorfismo delle cubiche di $\boldsymbol{P}^5$ contenenti un piano, si può facilmente verificare che $\mathcal{P}$ è una ipersuperficie irriducibile in $\mathcal{C}$.

(3.13). PROBLEMA. – *La generica cubica X contenente un piano è razionale?*

Lo studio della struttura di Hodge di una generica X di questo tipo, (cfr. [V]), porta a pensare che non sia questo il caso. Tuttavia è naturale chiedersi se, nello spazio dei moduli $\mathcal{C}$, la ipersuperficie $\mathcal{P}$ incontri infinite ipersuperfici che sono componenti di $\mathcal{C}_{\mathrm{rat}}$. Brendan Hassett ha studiato in [H2] le famiglie di cubiche razionali contenenti un piano, i suoi risultati possono essere così riassunti:

(1) Esiste una famiglia numerabile di ipersuperfici di $\mathcal{P}$ i cui elementi sono classi di isomorfismo di cubiche razionali. L'unione di tali ipersuperfici è densa nella topologia di Zariski di $\mathcal{P}$. Ognuna di esse è candidata ad essere l'intersezione di $\mathcal{P}$ con una delle ipersuperfici che, congetturalmente, sono le componenti di $\mathcal{C}_{\mathrm{rat}}$.

(2) In tutti i casi considerati $F(X) = R[2]$, dove R è una superficie K3 con numero di Picard almeno due.

Una R come sopra è sempre un rivestimento doppio di $\boldsymbol{P}^2$ ramificato lungo una sestica piana, tale proprietà è in relazione con il fatto che X è una cubica contenente un piano. Un aspetto più tecnico dei risultati di Hassett riguarda le condizioni numeriche che vanno imposte alla parte algebrica della struttura di Hodge di una X contenente un piano affinché si possa avere $F(X) = R[2]$.

Non è difficile descrivere la costruzione geometrica che è alla base degli esempi di Hassett: sia $P \subset X$ un piano, ogni spazio lineare tridimensionale L contenente P taglia su X

$$P \cup Q_L$$

dove Q_L è una superficie quadrica. La proiezione lineare

$$\pi : X \rightarrow \boldsymbol{P}^2 \tag{3.14}$$

è dunque una mappa razionale le cui fibre sono le quadriche Q_L. In altre parole X è una quadrica definita sul campo

$$k = \boldsymbol{C}(t_1, t_2)$$

delle funzioni razionali di $\boldsymbol{P}^2$. Abbiamo già osservato in (1.4) che X è razionale su k se e solo se X contiene un punto o definito su k. Nel caso che stiamo considerando la razionalità di X su k implica immediatamente la razionalità di X su $\boldsymbol{C}$. Per ottenere gli esempi basterà dunque costruire delle X che abbiano un punto o razionale su k. La condizione che esista o è sufficiente per la razionalità di X ma non necessaria.

(3.15). Problema. – *Costruire infinite ipersuperfici in $\mathcal{C}$ che parametrizzino classi di isomorfismo di cubiche razionali.*

A questo proposito si può anche osservare che la condizione $F(X) = R[2]$, congetturalmente vera nel caso in cui X sia razionale, implica, come nel caso considerato da Morin, che X contenga una famiglia di dimensione due di rigate razionali

$$Y_d \subset X$$

di grado d e non omologhe ad una intersezione completa. Sono poche le costruzioni esplicite di questo tipo. In ogni caso razionale sembra anche implicare che il gruppo di Neron-Severi:

$$NS^2(X) = \{\text{cicli algebrici di codimensione due}\}/\text{equivalenza omologica}$$

abbia rango $r \geq 2$. Si può allora concludere questa sezione proponendo, con qualche cautela, il seguente

(3.16). PROBLEMA. – *Rango di* $NS^2(X)$ *«alto»* $\Rightarrow X$ *razionale?*

4. – Il punto di vista moderno: le varietà razionalmente connesse.

Al di là della loro bellezza geometrica le cubiche rappresentano anche un buon esempio delle difficoltà che le nozioni di razionalità e di unirazionalità possono creare, e di fatto hanno creato, nel lavoro di classificazione birazionale delle varietà algebriche. Da dimensione 3 in poi tali nozioni non sembrano avere un «buon comportamento» rispetto alle più ragionevoli esigenze delle teorie di classificazione. Vediamo perché:

(1) Poiché il problema di Lueroth ha risposta negativa una classificazione delle varietà algebriche fondata sui caratteri numerici classici non potrà avere al suo interno un classe corrispondente alle varietà razionali.

(2) Almeno congetturalmente non ci si deve aspettare che la (uni)-razionalità sia invariante per deformazioni. Non ci si deve cioè aspettare che la proprietà si propaghi da una fibra a tutte le fibre di un epimorfismo liscio e proiettivo

$$f : \mathcal{X} \to B$$

di varietà non singolari irriducibili. Ad esempio questo non sempre dovrebbe avvenire nel caso in cui le fibre sono: (i) cubiche di $\boldsymbol{P}^5$ (razionalità), (ii) quartiche di $\boldsymbol{P}^4$ (unirazionalità), (iii) fibrati in coniche su $\boldsymbol{P}^2$ (unirazionalità).

(3) Non vale un teorema analogo al teorema di Max Noether per le superfici:

(4.1). TEOREMA (Noether). – *Sia* $f : X \to \boldsymbol{P}^1$ *una mappa razionale le cui fibre sono curve razionali. Allora* X *è una superficie razionale.*

Già il caso della cubica di $\boldsymbol{P}^4$, per la quale ogni fascio di sezioni iperpiane è un fascio di superfici cubiche e dunque di superfici razionali, mostra come un analogo del teorema di Noether non valga in dimensione superiore a due. Rispetto a questo tipo di problemi il punto di vista odierno è spesso reso manifesto ed esplicito proprio dagli studiosi più importanti di questi argomenti:'

«... *the notion of rationally connected was introduced in* [KMM] *to remedy the situation. The idea is that, instead of emphasizing global properties of* $\boldsymbol{P}^n$*, we try to concentrate on one special property: there are lots of rational curves in* $\boldsymbol{P}^n$*.*»

(cfr. [K]: «Rational Curves on Algebraic Varieties» di J. Kollar, p. 199, cfr. anche [KMM]).

(4.2). DEFINIZIONE. – *Sia X una varietà algebrica definita su un campo* k*. X è razionalmente connessa su* k *se per una coppia generica di suoi punti passa una curva razionale definita su* k*.*

È immediato osservare che, a causa del teorema di Lueroth, unirazionale implica razionalmente connesso. La nozione di *varietà razionalmente connessa* rappresenta dunque un punto di passaggio dalla trattazione classica a quella moderna. Si tratta di una nozione più debole nella forma, ma più forte nella sostanza perché compatibile con le prospettive e le tecniche della moderna teoria di classificazione delle varietà algebriche. Naturalmente questo non vuol dire che i problemi di unirazionalità e razionalità siano stati abbandonati, anzi anche questi ultimi, come vedremo, hanno tratto impulso e vantaggio da questi più recenti sviluppi della teoria di classificazione. In quest'ambito è necessario anche ricordare la nozione più generale di varietà unirigata:

(4.3). DEFINIZIONE. – *Sia X una varietà algebrica X definita su un campo* k*. X è unirigata se esiste una mappa razionale genericamente finita*

$$\phi : Y \times \boldsymbol{P}^1_k \to X .$$

È chiaro che X razionalmente connessa $\Rightarrow X$ unirigata, mentre il viceversa non vale. È inoltre il caso di segnalare che una generalizzazione naturale della definizione di varietà razionalmente connessa è in realtà superflua, ([K] p. 203):

(4.4). PROPRIETÀ. – *Se X è razionalmente connessa allora per* $p_1, \dots p_m$ *punti generali di X passa una curva razionale, qualunque sia* $m \geq 1$*.*

Continuando a lavorare nel caso in cui $k = \boldsymbol{C}$, possiamo ora esporre il quadro delle principali proprietà e congetture riguardo alle nozioni introdotte e alle questioni poste.

Caratteri numerici classici

(4.4). CONGETTURA 1 (Miyaoka). – *X unirigata* $\Leftrightarrow P_r(X) = 0, \ \forall r \geqslant 1$.

L'implicazione $\Rightarrow$ della congettura si dimostra facilmente. L'implicazione opposta è provata fino a dimensione tre:

– $\dim X = 1$: $P_r(X) = 0, \ r \geqslant 1 \Rightarrow p_g(X) = 0 \Rightarrow X$ è razionale.

– $\dim X = 2$: $P_r(X) = 0, \ r \geqslant 1 \Rightarrow P_{12}(X) = 0 \Rightarrow X$ è rigata, (Castelnuovo-Enriques).

– $\dim X = 3$: la congettura è stata provata da Myiaoka, ([M1]).

(4.5). CONGETTURA 2 (Mumford). – *X è razionalmente connessa* $\Leftrightarrow$ $h^0(\Omega^1_{X^{\otimes r}}) = 0$ *per* $r \geqslant 1$.

L'implicazione $\Rightarrow$ della congettura si dimostra facilmente. L'implicazione opposta è provata fino a dimensione tre, cfr. [KMM]. È il caso anche di citare un risultato in linea con il criterio di razionalità di Castelnuovo:

(4.6). CRITERIO DI RAZIONALE CONNESSIONE (Kollar-Mori-Myiaoka 1992). – *Una varietà liscia e tridimensionale X è razionalmente connessa se*

$$P_r(X) = q(X) = h^0(Sym^2 \wedge^2 \Omega^1_X) = 0 \, .$$

Invarianza per deformazioni

(4.7). TEOREMA (Kollar-Myiaoka-Mori, [KMM] 1992). – *La proprietà di essere razionalmente connesso è invariante per deformazioni.*

Teorema di Noether

(4.8). TEOREMA (Harris-Graber-Starr, [HGS] 2001). – *Sia X una varietà complessa e sia*

$$f : X \to B$$

un morfismo proprio su una curva liscia B. Se la fibra generica di f è razionalmente connessa allora f ha una sezione $s : B \to X$.

Applicando quest'ultimo teorema e il successivo teorema 5.3 al caso in cui le fibre di f sono ipersuperfici di grado $d \leqslant r$ in $\boldsymbol{P}^r$ si riottiene il noto teorema di Tsen:

(4.9). TEOREMA DI TSEN. – *Sia* $X \subset \boldsymbol{P}_k^r$ *una ipersuperficie proiettiva di grado* $d \leq r$ *definita su un campo di funzioni* k. *Allora* X *contiene un punto* s.

Se in (4.8) $B = \boldsymbol{P}^1$ l'esistenza della sezione $s : \boldsymbol{P}^1 \to X$ implica che due punti generali di X siano connessi da una catena di (tre) curve razionali. Su una varietà liscia questa proprietà implica la razionale connessione. Quindi X è razionalmente connessa. Il teorema (4.8) implica dunque un analogo del teorema di Noether per le superfici algebriche:

(4.10). TEOREMA DI NOETHER. – *Sia* X *liscia e sia* $f : X \to \boldsymbol{P}^1$ *una mappa razionale con fibre razionalmente connesse. Allora* X *è razionalmente connessa.*

Un altro corollario importante di (4.8), provato come i risultati precedenti in [HGS], è il seguente

(4.11). TEOREMA. – *La congettura* 1 $\Rightarrow$ *la congettura* 2.

Infine un'altra applicazione delle stesse tecniche viene data in [HGMS] da Harris, Graber, Mazur e Starr. Si tratta di una risposta alla seguente questione posta da Serre sulle varietà acicliche, e cioè sulle varietà Y tali che $h^i(\mathcal{O}_Y) = 0$, $i > 0$:

una famiglia di varietà acicliche può non avere una sezione?

In [HGMS] gli autori costruiscono una famiglia di superfici di Enriques

$$f : \mathcal{X} \to \boldsymbol{P}^1 \tag{4.12}$$

priva di sezione.

5. – Famiglie di curve razionali su ipersuperfici di grado piccolo.

Dopo avere esposto questi risultati generali possiamo riprendere il nostro esempio guida, è cioè il caso delle ipersuperfici di uno spazio proiettivo complesso, e fare il punto sullo stato delle conoscenze attuali in merito alle famiglie di curve razionali giacenti su di esse.

(5.1). PROBLEMA 1. – *Descrivere le famiglie di curve razionali su una ipersuperficie di grado* d *in* $\boldsymbol{P}^r$.

(5.2). PROBLEMA 2. – *Dedurne informazioni in merito all'unirazionalità, o alla razionalità, di* X.

Lo studio delle famiglie di curve razionali su X è certamente utile, almeno in linea di principio, per discutere l'unirazionalità di X. Ad esempio risale ad Enriques l'osservazione che X è unirazionale se esiste su X una famiglia $\{R_t, t \in T\}$ di curve razionali tali che: (1) T è razionale, (2) su ogni R_t è razionalmente determinato un punto $s(t)$ in funzione di $t \in T$, (3) l'unione degli R_t è denso in X. La questione della razionale connessione di una ipersuperficie X in $\boldsymbol{P}^r$ non è invece menzionata nel problema 2 perché già risolta:

(5.3). TEOREMA. – *Ogni ipersuperficie di grado $d \leqslant r$ è razionalmente connessa.*

Questo teorema è soltanto un caso particolare di un teorema riguardante le varietà di Fano, cioè le varietà lisce per le quali il determinante del fibrato tangente è un fibrato lineare ampio, (cfr. [C] e [KMM1]):

(5.4). TEOREMA. – *Sia X una varietà di Fano allora X è razionalmente connessa.*

Ogni ipersuperficie liscia di grado $d \leqslant n$ è infatti una varietà di Fano. Va anche ricordato che per $d \geqslant r+1$ X non è più razionalmente connessa perché i suoi plurigeneri $P_r(X)$ non sono nulli. Quindi X è razionalmente connessa se e solo se ha grado $d \leqslant r$. Nel seguito assumeremo sempre $d \leqslant r$.

Il problema 1 è stato ampiamente studiato in anni recenti, e per ogni grado d, con tecniche particolarmente sofisticate e motivazioni spesso diverse da quelle di questa esposizione. Lo strumento più tecnico ed efficace per studiare questo tipo di situazione è rappresentato oggigiorno dagli spazi dei moduli di Kontsevich

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, e)$$

delle mappe stabili $f: R \to V$, dove R è una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g con n punti fissati, V è una varietà liscia e irriducibile, $e \in H_2(V, \boldsymbol{Z})$ è la classe di omologia di $f_* R$. Il caso a cui siamo interessati è, evidentemente,

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, e)$$

dove X è un ipersuperficie ed e non è altro che il grado della curva $f_* R$. Sarà qui sufficiente considerare l'aperto

$$\mathcal{R}at^e(X)$$

che parametrizza le *immersioni* di $\boldsymbol{P}^1$ in X tali che l'immagine abbia grado e. O ancora potremo considerare semplicemente, nello schema di Hilbert delle curve di grado e e genere aritmetico 0, l'aperto

$$\mathcal{H}_{e,0}(X)$$

che parametrizza le curve *lisce e irriducibili.* I due oggetti sono strettamente correlati e possiamo discutere insieme alcune loro proprietà. La descrizione di $\mathcal{R}at^e(X)$ rientra nella serie di questioni poste da Fulton e Pandharipande in [FP]. Si tratta di un problema notevole anche nel caso in cui l'ipersuperficie X è un iperpiano o una quadrica:

(5.5). QUADRICHE E IPERPIANI (Kim-Pandharipande, [KP] 2001). – $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, e)$ *è irriducibile e razionale per ogni* e.

La situazione è piuttosto definita per quanto riguarda il caso $e = 1$, cioè per la varietà delle rette contenute in X:

(5.6). RETTE SU UNA IPERSUPERFICIE (Barth-Van de Ven [BVdV] 1978 e [K], V.4). – *Lo schema di Hilbert* $F(X)$ *delle rette contenute in* X *è connesso per* $d \leqslant 2n - 4$, *salvo il caso delle superfici quadriche. Sia* X *generale: allora* $F(X)$ *è liscio di dimensione* $2n-3-d$ *se* $d \leqslant 2n-3$ *ed è vuoto se* $d > 2n-3$.

(5.7). CUBIC THREEFOLDS (Harris-Roth-Starr, [HRS] 2002). – Il caso delle ipersuperfici cubiche di $\boldsymbol{P}^4$ è di nuovo particolarmente interessante. Harris, Roth e Starr hanno recentemente dimostrato che $\mathcal{H}_{e,0}(X)$ è irriducibile di dimensione $2e$ e inoltre hanno studiato la mappa di Abel-Jacobi

$$u_e \colon \mathcal{H}^{e,0} \to JX$$

nella Jacobiana intermedia JX di X:

(5.8). TEOREMA. – (1) $u_e \colon \mathcal{H}_{e,0} \to JX$ *domina la Jacobiana intermedia* JX *per* $e \geqslant 4$.

(2) *La fibra generica di* u_e *è unirazionale per* $e \leqslant 5$.

(Se $e = 1, 2, 3$ l'immagine di u_e è ben nota: per $e = 1, 2$ l'immagine di u_e è l'immagine della superficie delle rette $F(X)$ mediante la mappa di Albanese, (cfr. 3.5). Per $e = 3$ l'immagine di u_3 è il divisore theta di JX).

Poiché u_e non è costante $\mathcal{H}^{e,0}$ non è razionalmente connesso: due punti su due fibre diverse di u_e non possono infatti essere congiunti da una curva razionale R. Altrimenti $u_e/R \colon R \to JX$ sarebbe una mappa olomorfa non costante sul toro JX, il che è impossibile. Segue dal teorema che, per $4 \leqslant e \leqslant 5$, la mappa $u_e \colon \mathcal{H}_{e,0}(X) \to JX$ soddisfa certamente alle condizioni (*) e (**), che definiamo qui di seguito per una qualsiasi mappa razionale dominante

$$f: X \to Y.$$

(*) *La fibra generale di f è razionalmente connessa.*

(**) *Sia F una fibra generica di f e sia R una curva razionale tale $F \cap R \neq \aleph$, allora $R \subset F$.*

(5.9). DEFINIZIONE. – *Sia $f: X \to Y$ una mappa razionale dominante. f è una fibrazione massimale razionalmente connessa di X, o fibrazione MRC di X, se f soddisfa le condizioni* (*) *e* (**).

Le fibrazioni MRC di una varietà X sono studiate in particolare in [K] IV.5: essenzialmente si ha un'unica fibrazione MRC, a meno di trasformazioni birazionali di X e di Y. Sia X una cubica liscia di $\boldsymbol{P}^4$, Possiamo dunque dire che, almeno per $e = 4, 5$, la mappa di Abel-Jacobi u_e è la fibrazione MRC di $\mathcal{H}_{e,0}(X)$. Visti i legami tra JX e la non razionalità di X è del tutto naturale, come fanno Harris, Roth e Starr in [HRS], dimostrare interesse per il seguente:

(5.10). PROBLEMA. – *Sia $X \subset \boldsymbol{P}^5$ una ipersuperficie cubica liscia: che cosa è la fibrazione MRC di $\mathcal{H}_{e,0}(X)$?*

Lo studio della struttura di $\mathcal{R}at^e(X)$ è stato sviluppato recentemente da vari autori, in particolare da Kim e Pandharipande e inoltre da Harris, Roth e Starr. Per una ipersuperficie generale di grado d è oggi noto che $\mathcal{R}at^e(X)$ è integro, localmente completa intersezione e di dimensione pari a quella attesa almeno se $d < \frac{r+1}{2}$. Inoltre abbiamo:

$$d^2 + d + 2 \leqslant r \Rightarrow Rat^e(X) \text{ è razionalmente connesso}$$

La razionale connessione di $Rat^e(X)$ potrebbe far sperare che X sia non solo razionalmente connessa ma anche unirazionale per i valori di d soddisfacenti alla disuguaglianza. Per valori più grandi di d la struttura di $\mathcal{R}at^e(X)$ tende invece a divergere da quella di una varietà razionalmente connessa:
$r^{\frac{1}{2}} \leqslant d \leqslant r \Rightarrow Rat^e(X)$ ha divisore canonico big, salvo una lista di eccezioni, (cfr. [HRS2], [HRS3]).

Tali osservazioni potrebbero essere utilmente comparate con il classico teorema di Morin:

$$X \text{ è unirazionale se } r \geqslant r_d = \binom{d + r_{d-1}}{d}, \quad (\text{Morin}, \ 1940)$$

(5.11). PROBLEMA. – *In generale non è conosciuto un limite superiore effettivo del grado, al di sotto del quale vale l'unirazionalità di X.*

Il teorema di Morin è stato comunque migliorato, ed esteso ad altre situazioni, da vari autori (cfr. [PS], [Ci], [CMM], [R]). Nel caso di grado quattro l'unirazionalità è nota da dimensione 5 in poi e si ritiene che non valga in generale in dimensione 3 e 4. È possibile che in futuro lo studio molto dettagliato e profondo che si sta sviluppando intorno a $Rat^e(X)$ possa essere utile anche in merito al problema della razionalità di X.

(5.12). Razionalità di ipersuperfici. – Tratteremo meno a lungo il problema della razionalità di una ipersuperficie

$$X \subset \boldsymbol{P}^r$$

di grado $d \leqslant r$ soltanto per questioni di tempo e non di importanza. Specialmente in questo caso i problemi, ed anche le tecniche per affrontarli, fanno riferimento al grande lavoro della scuola italiana classica di geometria birazionale. Soprattutto su questo problema Fano è stato un precursore e le sue idee sono state sviluppate dai moderni: in particolare dalla scuola, italiana e britannica insieme, che vede tra i suoi rappresentanti Miles Reid ed Alessio Corti. Il punto di vista della geometria birazionale è naturalmente quello di costruire oggetti che siano invarianti birazionali delle varietà considerate. Per discutere la razionalità di una ipersuperficie di grado $d \leqslant r$ i caratteri numerici classici non servono, come già si è osservato, nè si conoscono altri invarianti numerici birazionali che siano effettivamente calcolabili o che diano informazioni utili. Si tratta quindi di ricorrere ad altre strutture, seguendo un programma che è descritto, molto grossolanamente e sommariamente, nei successivi punti (1) e (2):

(1) Come si è già osservato il gruppo $\mathrm{Bir}(X)$ di una varietà è invariante birazionalmente per definizione. Se dunque una varietà ha un gruppo «piccolo», o nullo, di automorfismi birazionali allora non potrà essere birazionale a $\boldsymbol{P}^r$ il cui gruppo di automorfismi birazionali è «molto grande».

(2) Birazionalmente parlando, $\boldsymbol{P}^r$ ha infinite strutture $f: \boldsymbol{P}^r \to Z$ di varietà fibrata in coniche, in quadriche o in altre varietà razionalmente connesse. In termini più tecnici questo vuol dire che $\boldsymbol{P}^n$ ha infinite strutture di spazio fibrato di Mori. Se X non ha questa possibilità allora X non è razionale.

Una varietà X si dirà *birazionalmente rigida* se questa possibilità non c'è. Questo tipo di programma, che fa esplicitamente riferimento alla teoria classica di Noether e di Fano sulle cosiddette singolarità massimali di una mappa razionale, necessita di strumenti tecnici particolarmente sofisticati che sono lentamente divenuti più accessibili nel corso degli ultimi anni. Tali strumenti permettono oggi una geometria birazionale in un certo senso molto più più concreta:

«... By explicit we understand a study that does not rest after obtaining abstract existence results, but that goes on to look for a more concrete study of varieties, say in terms of equations, that can be used to bring out their geometric properties as clearly as possible.» (*A. Corti, M. Reid: Foreword to «Explicit birational geometry»* , [CM]).

Questo punto di vista, che mi sembra anche molto caratteristico della nostra geometria algebrica italiana, può essere ben illustrato da una serie di risultati di non razionalità su esempi concreti e importanti. Torniamo ancora una volta alle ipersuperfici:

– Iskovskih-Manin ([IM], 1971) ogni quartica liscia di $\boldsymbol{P}^4$ è birazionalmente rigida.

– V. Pukhlikov ([P1], 1987): la quintica liscia di $\boldsymbol{P}^5$ è birazionalmente rigida.

– V. Pukhlikov (1998): ogni ipersuperficie liscia di grado n in $\boldsymbol{P}^n$, $n \geqslant 4$, è birazionalmente rigida.

– Corti-Reid: sia X una ipersuperficie di Fano generale in uno spazio proiettivo pesato 4-dimensionale: X è birazionalmente rigida. (Esistono 95 famiglie di tali ipersuperfici).

Il gruppo deglia automorfismi birazionali tende a ingrandirsi se si permette a X di avere anche semplici singolarità, ad esempio un numero finito di punti doppi ordinari. L'equazione locale di X in uno di tali punti sarà allora $t_1^2 + \ldots + t_r^2 + F_3(t_1, \ldots, t_r) + \ldots$. Le difficoltà tecniche naturalmente aumentano in questo caso:

– Pukhlikov (2002): una ipersuperficie generale di grado r in $\boldsymbol{P}^r$ con punti doppi isolati ordinari è birazionalmente rigida.

– Corti-Mella (2001): una quartica generale X con un punto doppio non ordinario, del tipo $xy + F_3(x, y, z, t) + F_4(x, y, z, t) = 0$ non è birazionalmente rigida.

Tuttavia una tale X non è razionale perché le strutture di spazio fibrato di Mori sono due anziché infinite come nel caso dello spazio proiettivo.

Un altro criterio di non razionalità per una ipersuperficie complessa, sempre di grado $\leqslant r$, consiste nel verificare che tale ipersuperficie, non è birazionalmente rigata:

(5.13). DEFINIZIONE. – *Sia X una varietà algebrica definita su k. X è birazionalmente rigata su k se è birazionale a $Y \times \boldsymbol{P}^1_k$.*

Naturalmente $\boldsymbol{P}^r$ è birazionalmente rigato. Non tutte le ipersuperfici di grado $d \leqslant r$ lo sono:

(5.14). TEOREMA (J. KOLLAR 1995). – Sia X una ipersuperficie liscia e generale di grado d in $\boldsymbol{P}^r$:

(1) $d > \frac{2(r+2)}{3} \Rightarrow X$ non è birazionalmente rigata.

(2) $d > \frac{2(r+2)}{4} \Rightarrow X$ non ha una struttura di fibrato in coniche.

BIBLIOGRAFIA

[BD] A. BEAUVILLE - R. DONAGI, *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4, C. R. Acad. Sci. paris Ser. I Math., **301** (1985), 703-706.

[BVdV] W. BARTH - A. VAN DE VEN, *Fano-varieties of lines on hypersurfaces*, Arch. Math., **311** (1978), 96-104.

[C] F. CAMPANA, *Connexité rationelle ded varietés de Fano*, Ann. Sci. E.N.S., **25** (1992), 539-545.

[CD] F. COSSEC - I. DOLGACHEV, *Enriques Surfaces I*, Birkhauser Basel (1987).

[CF] J. MANIN, *Cubic Forms*, North-Holland Ed. (1986).

[CG] H. CLEMENS - H. GRIFFITHS, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math., **95** (1972), 281-356.

[CM] A. CORTI - M. MELLA, *Birational geometry of terminal quartic* 3*-folds* 1, preprint arXiv.math. AG0102096 (2001).

[CR] A. CORTI - M. REID, *Explicit Birational Geometry of* 3*-folds*, A. Corti, M. Reid editors, L.M.S. lecture note series 281 (2000).

[CKM] H. CLEMENS - J. KOLLAR - S. MORI, *Higher Dimensional Complex Geometry*, Astérisque, **166** (1988).

[CMM] A. CONTE - M. MARCHISIO - J. MURRE, *On unirationality of double covers of fixed degree and large dimension; a method of Ciliberto*, in Algebraic Geometry: a volume in memory of Paolo Francia, W. de Gruyter Berlin (2002), 127-140.

[CO] A. COLLINO, *The fundamental group of the Fano surface. I, II in Algebraic Threefolds* (Varenna 1981), LNM 947, 209-220.

[CSS] J. L. COLLIOT-THÉLÉNE - J. J. SANSUC - P. SWINNERTON-DYER, *Intersection of two quadrics and Chatelet surfaces I*, J. reine Angew, Math., **373** (1987), 37-107.

[CT] J. L. COLLIOT-THÉLÉNE, *Arithmétique des varietés rationelles et problemes birationelles*, Proc. Int. Congr. Math., 1986, 641-653.

[D] O. DEBARRE, *Minimal Cohomology classes and Jacobians*, J. Alg. Geom., **4** (1995), 321-335.

[F] G. FANO, *Sulle forme cubiche dello spazio a* 5 *dimensioni contenenti rigate del quart'ordine*, Comment. Math. Helv., **15** (1943), 71-80.

[Fu] T. FUJITA, *Classification theories of polarized varieties*, Cambridge University Press (1990).

[FP] W. FULTON - R. PANDHARIPANDE, *Notes on stable maps and quantum cohomology*, in Proc. Symposia Pure Math., **62** AMS (1997).

[H1] B. HASSETT, *Special cubic fourfolds*, Compositio Math., **120** (2000), 1-23.

[H2] B. HASSETT, *Some rational cubic fourfolds*, J. Alg. Geom., 8 (1999), 103-114.

[HGS] J. HARRIS - T. GRABER - J. STARR, *Families of rationally connected varieties*, preprint arXiv math. AG0109220 (2001).

[HGMS] J. HARRIS - T. GRABER - B. MAZUR - J. STARR, *Rational connectivity and sections of families over curves*, preprint arXiv math. AG/0210225 (2002).

[HRS] J. HARRIS - M. ROTH - J. STARR, *Abel-Jacobi maps associated to smooth cubic threefolds*, preprint arXiv math. (2002).

[HRS1] J. HARRIS - M. ROTH - J. STARR, *Curves of small degree on cubic threefolds*, preprint arXiv math. AG0202067 (2002).

[HRS2] J. HARRIS - M. ROTH - J. STARR, *Rational curves on hypersurfaces of low degree I*, preprint arXiv.math. AG0203088 (2002).

[HRS3] J. HARRIS - M. ROTH - J. STARR, *Rational curves on hypersurfaces of low degree II*, preprint arXiv.math. AG0207257 (2002).

[I1] V. A. ISKOVSKIKH, *Fano 3-folds I*, Math. USSR Izv., **11** (1987), 485-527.

[I2] V. A. ISKOVSKIKH, *Fano 3-folds II*, Math. USSR Izv., **11** (1987), 469-506.

[I3] V. A. ISKOVSKIKH, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Math. USSR Izv., **14** (1980), 17-39.

[I4] V. A. ISKOVSKIKH, *Algebraic Threefolds with special regard to the problem of Rationality*, Proc. Int. Cong. Math. Warsaw (1983), 733-746.

[IM] V. A. ISKOVSKIKH - J. MANIN, *Three dimensional quartics and counterexamples to the Lueroth problem*, Math. USSR Sbornik, **15** (1971), 141-166.

[K] J. KOLLAR, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer Verlag, Berlin (1996), 1-320.

[K1] J. KOLLAR, *Unirationality of cubic hypersurfaces*, preprint arXiv.math. AG0005146 (2000).

[K2] J. KOLLAR, *Non rational hypersurfaces*, J. AMS, 8 (1995), 241-249.

[KMM] J. KOLLAR - Y. MIYAOKA - S. MORI, *Rationally connected varieties*, J. Alg. Geom., **1** (1992), 429-448.

[KMM1] J. KOLLAR - Y. MIYAOKA - S. MORI, *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, J. Diff. Geom., **36** (1992), 765-769.

[KP] B. KIM - R. PANDHARIPANDE, *The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces*, in, *Symplectic geometry and mirror symmetry*, chapter 5, World Scientific Ed. (2001) (2000).

[M1] Y. MYIAOKA, *On the Kodaira dimension of minimal threefolds*, Math. Ann., **281** (1988), 325-332.

[M] J. MANIN, *Rational surfaces over perfect fields*, Publ. Math. IHES, **30** (1966), 55-114.

[MT] J. MANIN - M. TSFASMAN, *Rational varieties: algebra, geometry and arithmetic*, Russian Math. Surveys, **41** (1986), 51-116.

[MM] Y. MYIAOKA - S. MORI, *A numerical criterion for Uniruledness*, Ann. of Math., **124** (1986), 65-69.

[Mo] U. MORIN ATTI, *Sulla razionalità dell'ipersuperficie cubica generale dello spazio lineare a cinque dimensioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **11** (1940).

[Mo1] U. MORIN, *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta*, Atti del II Congresso U.M.I. di Bologna Cremonese Ed. Roma (1942).

[Ni] V. NIKULIN, *Integral symmetric bilinear forms and some of their applications*, Math. USSR Izv., **14** (1980), 103-167.

[PS] K. PARANJAPE - V. SRINIVAS, *Unirationality of complete intersections*, in, *Flips and Abundance for Algebraic Threefolds*, Astérisque, **211** (1992), 241-247.

[P1] A. V. PUKHLIKHOV, *Birational isomorphisms of four dimensional quintics*, Inv. Math., **87** (1987), 303-329.

[P2] A. V. PUKHLIKHOV, *Birational automorphisms of a three-dimensional quartic with a quadratic singularity*, Math. USSR Sbornik (1990), 265-285.

[P3] A. V. PUKHLIKHOV, *Essentials of the method of maximal singularities*, in *Explicit Birational Geometry of* 3*-folds*, A. Corti, M. Reid editors, L.M.S. lecture note series, **281** (2000), 259-312.

[Ra] L. RAMERO, *Effective bounds for Unirationality of Complete Intersections*, Manuscripta Math., **68** (1990), 435-445.

[S] B. SEGRE, *A note on arithmetical properties of cubic surfaces*, J. London Math. Soc., **18** (1943), 24-31.

[T] A. TJURIN, *Five lectures on three-dimensional Varieties*, Uspehi Mat. Nauk, **27** (1972), 3-50.

[Tr] S. L. TREGUB, *Three constructions of rationality of a cubic fourfold*, Moscow Univ. math. bull., **39** (1984), 8-16.

[Ts] C. TSEN, *Quasi algebraisch abgeschlossene Funktionkoerper*, J. Chinese math., **1** (1936), 81-92.

[V] C. VOISIN, *Théoréme de Torelli pour les cubiques de* $\boldsymbol{P}^5$, Inv. Math., **86** (1986), 577-601.

Dipartimento di Matematica, Università Roma Tre
Largo San Leonardo Murialdo 1, 00146 Roma (Italy)
e-mail: verra@mat.uniroma3.it

Pervenuta in Redazione
il 18 aprile 2004