Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lorenzo Mencherini

Il Problema di Cauchy per sistemi lineari del primo ordine debolmente iperbolici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 589–592.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_589_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 589-592

Il Problema di Cauchy per sistemi lineari del primo ordine debolmente iperbolici.

LORENZO MENCHERINI

1. – Introduzione

La tesi verte sul Problema di Cauchy per sistemi lineari iperbolici di primo ordine del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) &= \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\partial_{x_j} u(t,x) + B(t,x)u(t,x) \\ u(0,x) &= u_\circ(x), \end{cases}$$

dove $t \in [0,T]$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, $u(t,x) \in \boldsymbol{C}^N$ e, $A_j(t,x)$ e $B(t,x)$ sono matrici $N \times N$. I risultati riportati in questa tesi riguardano il caso in cui (1) è risolubile quale che sia il coefficiente $B(t,x)$, oppure il caso in cui $B(t,x) \equiv 0$.

Limitatamente al caso di sistemi di tipo (1) a *coefficienti costanti*, Petrovskiĭ nel 1937-38, sviluppando idee di Hadamard, ha dimostrato che una condizione necessaria e sufficiente, affinché il Problema di Cauchy (1) sia ben posto è che gli autovalori della matrice completa $\sum_j A_j \xi_j + B$ verifichino la condizione

$$(2)\qquad |\mathcal{I}m\ \lambda_j\ (\xi)| \ \leq\ C\ \log\ (1 + |\xi|).$$

Nel caso in cui $B = 0$, questa condizione si traduce semplicemente nella richiesta che gli autovalori della matrice caratteristica $\sum_j A_j \xi_j$ siano reali.

Petrovskĭ ottiene un altro risultato fondamentale e cioè che ogni sistema strettamente iperbolico (ossia la cui matrice caratteristica abbia autovalori distinti per ogni t, x, ξ) è ben posto, quale che sia il termine di ordine inferiore. Nel 1951 Gårding, mette in luce che la condizione (2) è equivalente al fatto che la parte immaginaria di ciascuno degli autovalori sia limitata al variare di ξ in $\boldsymbol{R}^n$, cioè il fattore logaritmico è superfluo.

Nel 1954 viene ottenuto un importante risultato per la teoria dei sistemi: Friedrichs riesce infatti a dimostrare che tutti i sistemi simmetrici *a coefficienti variabili* sono ben posti.

Sempre nel caso di coefficienti variabili, Lax dimostra nel 1957 che, per avere Buona Positura, la matrice caratteristica del sistema deve avere solo autovalori reali. In realtà egli ottiene questo risultato sotto l'ipotesi aggiuntiva che gli autovalori siano distinti. Nel 1961 Mizohata dimostrerà lo stesso risultato nella sua generalità senza cioè la suddetta ipotesi aggiuntiva, ottenendo il cosiddetto Teorema di Lax-Mizohata.

Nel 1959 escono tre importanti lavori nei quali la buona positura di un sistema viene messa in relazione alla proprietà di uniforme simmetrizzabilità della corrispondente matrice caratteristica:

DEFINIZIONE 1. – *Diciamo che una famiglia di matrici* $\mathcal{A} \subset M_N(\boldsymbol{C})$ *è uniformemente simmetrizzabile, brevemente* $\mathcal{A} \in$ (US), *se esiste una famiglia* $\mathcal{P}$, *di matrici invertibili, verificante una stima uniforme* $\|P\| + \|P^{-1}\| \leq M$, *per ogni* $P \in \mathcal{P}$, *e tale che per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *esiste* $P \in \mathcal{P}$ *per cui* PAP^{-1} *è hermitiana.*

Il primo dei tre lavori sopra accennati, dovuto a Kreiss, contiene la seguente caratterizzazione dell'uniforme simmetrizzabilità di una famiglia di matrici $\mathcal{A}$.

$$\left\|(A - zI)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{|\mathcal{I}m\ z|}, \qquad \forall\, z \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Tuttavia tale condizione non è facile da verificare.

Il secondo lavoro è di Mizohata ove l'autore dimostra che qualunque sistema la cui matrice caratteristica $A(t,x,\xi)$ sia US, è ben posto per ogni termine di ordine inferiore, sotto l'ulteriore restrizione che gli autovalori abbiano molteplicità costante.

Il terzo lavoro del 1959, è quello dei due matematici giapponesi, Kasahara e Yamaguti, i quali, provano che, limitatamente ai sistemi a coefficienti costanti, l'uniforme simmetrizzabilità della matrice caratteristica *equivale* alla buona positura per ogni termine di ordine inferiore.

Un notevole impulso allo studio dei sistemi viene dato da Arnold nel 1972, con un lavoro in cui viene trovata una forma canonica matriciale che, a differenza della forma di Jordan, è raggiungibile, a partire da una data famiglia di matrici, mediante un cambiamento di base che possiede la stessa regolarità della famiglia. A partire da questo risultato, molti studiosi quali ad esempio Kajitani, Yamahara, Matsumoto e Vaillant, utilizzano il teorema di Arnold per la riduzione dei sistemi a forme più semplici.

Nel 1974 Kajitani, mediante un teorema similare a quello di Arnold, riesce ad invertire il teorema di Mizohata del 1959 provando che, nel caso di molteplicità costante, l'uniforme simmetrizzabilità della matrice caratteristica è non solo sufficiente, ma anche necessaria, per la buona positura per ogni termine di ordine inferiore.

A partire dalla seconda metà degli anni '70, viene intensificato lo studio dei sistemi con caratteristiche di molteplicità variabile, e in particolare vengono ottenuti diversi risultati di buona positura nelle classi di Gevrey.

Nel 1980 il matematico russo M. D. Bronstein migliorando un risultato parziale di Ivrii del 1975, dimostra la buona positura in γ^s per ogni $s < 1 + \frac{1}{r-1}$. Questo risultato è ottimale, come prova l'esempio dell'equazione scalare $\partial_t^r u - \partial_x^{r-1} u = 0$ che è ben posta solo in γ^s per $s < 1 + \frac{1}{r-1}$. (1)

Nel filone di ricerca relativo alla simmetrizzazione dei sistemi, ricordiamo i lavori di D'Ancona e Spagnolo del 1997-98 dove gli autori, portando avanti le idee dell'articolo di Jannelli del 1989, introducono il concetto di quasi-simmetrizzatore e

(1) Qui denotiamo con γ^s la classe delle funzioni di Gevrey di esponente $s \geq 1$. Si ricorda che queste classi sono intermedie tra C^∞ e lo spazio delle funzioni analitiche.

individuano una nuova classe di sistemi che sono ben posti, cioè i sistemi quasi-simmetrizzabili mediante un quasi-simmetrizzatore diagonale, i *sistemi pseudo-simmetrici*. Tale classe, oltre alle matrici hermitiane, comprende anche le matrici triangolari. ([2])

In modo più esplicito, un sistema è pseudosimmetrico se la matrice caratteristica $A = [a_{ij}(t, x, \xi)]$ verifica le condizioni

$$\begin{cases} a_{ij}a_{ji} \geq 0, \\ a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_\nu i} = \overline{a}_{i_1i}\overline{a}_{i_2i_1}\cdots\overline{a}_{ii_\nu} \end{cases}$$

Un altro importante risultato di questi ultimi anni è una condizione necessaria e sufficiente di buona positura per sistemi 2×2, a coefficienti reali dipendenti da una variabile spaziale ed una temporale, condizione trovata da Nishitani nel 1998. Nel caso particolare del sistema $\partial_t u = A(t)\partial_x u$ con $trA(t) = 0$, tale condizione è

$$-\det A \cdot \|A\|^2 \geq Ct^2\{[\dot{a}_{11}\ (a_{12} - a_{21}) - a_{11}\ (\dot{a}_{12} - \dot{a}_{21})]^2 + (a_{12}\dot{a}_{21} - \dot{a}_{12}a_{21})^2\}, \qquad ([3])$$

D'altra parte, nel 1999 Colombini e Nishitani (senza nessuna ipotesi sul numero di variabili) dimostrano che sono ben posti tutti i sistemi 2×2 uniformemente simmetrizzabili, con coefficienti analitici dipendenti solo dal tempo.

Nel 2001 D'Ancona e Spagnolo estendono questo risultato alle matrici di qualunque ordine, a condizione però di avere una sola variabile spaziale. In quest'ultimo articolo, oltre al risultato di buona positura, interessante è anche il seguente lemma: se una matrice a coefficienti analitici dipendenti solo dal tempo è (US), allora possiede un simmetrizzatore regolare (precisamente analitico).

2. – I risultati della tesi.

Nella tesi sono presenti vari risultati relativi al Problema di Cauchy per sistemi debolmente iperbolici, ottenuti in collaborazione con Sergio Spagnolo:

- buona positura nello spazio $\gamma^\infty = \cup_s \gamma^s$ di sistemi 2×2, con coefficienti reali e $\mathcal{C}^\infty$, dipendenti solo dal tempo, che soddisfino una condizione integrale [1] di «tipo Nishitani». Se i coefficienti del sistema sono analitici [2], tale condizione risulta necessaria e sufficiente per la buona positura in $\mathcal{C}^\infty$.
- Una caratterizzazione esplicita [3] dei sistemi 3×3 uniformemente simmetrizzabili dove compaiono solamente funzioni elementari dei coefficienti. In particolare viene introdotto, per le matrici 3×3, un nuovo invariante (matriciale) per similitudini, lo *pseudoautovalore*, che è un raffinamento dell'invariante quadratico, essendone, nel caso di matrici con traccia nulla, la radice quadrata con segno opportuno ([4]). Il segno garantisce che lo pseudoautovalore sia una specie di media dei tre autovalori e, in presenza di un autovalore doppio, coincida con esso.

([2]) I cui elementi diagonali siano però reali, dato che debbono essere iperboliche.
([3]) Per una semplice interpretazione geometrica di tale formula vedasi [2].
([4]) A meno del fattore $\sqrt{3}$.

• buona positura, quale che sia il termine di ordine inferiore [4], di sistemi pseudosimmetrici $N \times N$ in $\mathcal{C}^\infty$ o in opportune classi di Gevrey.

In tale classe di sistemi, si determina una sottoclasse della famiglia delle matrici analitiche pseudosimmetriche, $A(t) := [a_{ij}(t)]$, che sono matrici caratteristiche di problemi fortemente iperbolici (5).

Ebbene, per avere la forte iperbolicità, è sufficiente che nessuno degli elementi della matrice sia identicamente nullo e che sommando lungo ogni ciclo $i \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_{k-1} \longrightarrow i_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow i$ ciascuna differenza tra l'ordine di annullamento della funzione $a_{i_{k-1} i_k}(t)$ e quello della funzione $a_{i_k i_{k-1}}(t)$ si ottenga al massimo (al variare dei cicli) un numero Δ non superiore a 2.

Ove non sia verificata questa condizione, il medesimo teorema ci fornisce una stima dal basso dell'ordine della classe di Gevrey in cui il Problema è Ben posto. L'algoritmo per determinare tale stima è il seguente.

Innanzitutto si traccia il grafo associato alla matrice caratteristica. Si passa poi al quoziente rispetto alla classica relazione di (forte) connessione (6) tra i vertici, ottenendo un nuovo grafo. A questo punto si dà un peso, $\widetilde{\Delta}(a)$, che è la parte positiva di $\Delta - 2$ (vds sopra per la def. di Δ), ad ogni classe di equivalenza a.

Infine si esegue un conteggio su ogni cammino del grafo quoziente, contando 1 per ogni lato e $\widetilde{\Delta}(a)/2$ per ogni classe che si incontra lungo il cammino. Ogni numero che si ottiene per un dato cammino è detto *lunghezza pesata*.

Indicata con $\overline{k}$ la massima lunghezza pesata al variare dei cammini, abbiamo buona positura almeno in $\gamma^{1+\frac{1}{k}}$, con $k < \overline{k}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] MENCHERINI L. and SPAGNOLO S., *Well Posedness of* 2×2 *Systems with C Infinity-Coefficients*, Hyperbolic Problems and Related Topics (Graduate Series in Analysis), International Press, Somerville, USA, 2003, 235-242.

[2] MENCHERINI L., *A simple Necessary and Sufficient Condition for Well-Posedness of* 2×2 *differential systems with time-dependent coefficients*, in corso di stampa nel Bollettino U.M.I Sez. B.

[3] MENCHERINI L. and SPAGNOLO S., *Uniformly symmetrizable* 3×3 *matrices*, Linear Algebra and Appl., **382** (2004), 25-38.

[4] MENCHERINI L. and SPAGNOLO S., *Gevrey well-posedness for pseudosymmetric systems with lower order terms*, Hyperbolic differential operators and related problems, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **233**, Dekker, New York, 2003, 67-81.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: mencheri@mail.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XV.
Direttore di ricerca: Prof. Sergio Spagnolo, Università di Pisa
Correlatore: Prof. Paolo Marcellini, Università di Firenze

(5) Cioè ben posti in $\mathcal{C}^\infty$, quale che sia il termine di ordine inferiore.

(6) Due vertici sono *connessi* se esiste un cammino orientato che congiunge il primo vertice al secondo e un cammino che congiunge il secondo al primo.