BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SARA MATTIA

Il problema dell'allocazione di capacità su rete

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 585–588.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_585_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 585-588

Il problema dell'allocazione di capacità su rete

SARA MATTIA

1. – Introduzione.

Il problema di progettare la topologia ottimale di una rete (*network design*) minimizzando il costo e rispettando allo stesso tempo un determinato insieme di specifiche, è presente in vari contesti: reti di trasporti, reti di comunicazione, reti di computer, sistemi energetici.

I nodi della rete possono rappresentare città in una rete di trasporti, centri di commutazione in reti di computer, centri di traffico in una rete di telecomunicazioni, centrali in un sistema energetico. Questi nodi devono comunicare tra loro scambiandosi traffico urbano, telefonico, pacchetti di dati, energia elettrica o altro. Le richieste devono essere tutte soddisfatte simultaneamente condividendo le risorse che consentono la comunicazione (*multicommodity flow problem*).

Per rendere possibile la comunicazione è necessaria la costruzione di collegamenti tra i nodi, collegamenti che possono essere strade o autostrade nel caso della rete di trasporti, linee elettriche per i sistemi energetici, linee trasmissive per sistemi di telecomunicazioni. Tali collegamenti possono essere pensati come gli archi del grafo associato alla rete. Il problema di allocare risorse (capacità) sugli archi di una rete in multipli interi di una quantità base in modo da consentire di soddisfare un insieme di richieste di connessione tra coppie di nodi, è noto come problema di *network loading*.

L'obiettivo di questo lavoro è studiare il problema del network loading e le sue proprietà poliedrali, allo scopo di realizzare nuovi ed efficienti algoritmi di separazione e tecniche euristiche da inserire in uno schema di tipo Branch&Cut.

2. – Il problema.

In maniera formale, il problema può essere enunciato come segue. Sia $G(V, E)$ un grafo non orientato con insieme dei nodi V e insieme degli archi E. Per ogni arco sia dato il costo c_{ij} corrispondente all'installazione di capacità unitaria su quell'arco. Sia D un insieme di domande tra coppie di nodi, ciascuna delle quali caratterizzata da un nodo sorgente s, un nodo destinazione t e da una quantità d che deve essere inviata dalla sorgente alla destinazione. Il problema consiste nell'installare capacità intera sugli archi per rendere possibile l'instradamento contemporaneo di tutte le domande, cercando allo stesso tempo di minimizzare i costi. Il problema è *NP-hard* perchè contiene il problema dell'albero di Steiner come caso particolare.

Viste le numerose applicazioni, il problema del network loading e altri problemi ad esso correlati hanno ricevuto molta attenzione [1], [4]. La maggior parte dei metodi di soluzione proposti consiste nel rafforzare il rilassamento lineare del problema aggiungendo disequazioni valide e possibilmente facet-defining, e risolvere poi utilizzando un algoritmo di tipo Branch&Bound o Branch&Cut [10], [12], [5], [6],[2], [3]. Sono anche stati proposti approcci di tipo lagrangiano ed euristiche di tipo tabu-search [7], [8].

Tenendo conto dal *teorema giapponese* [11], [9], che specifica quali condizioni devono essere soddisfatte da un vettore x perchè esso rappresenti un'allocazione di capacità ammissibile per il problema, è possibile utilizzare una formulazione matematica per il problema nota come *formulazione capacità*:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \mu^T x \geq \ell^T d \qquad \mu \geq 0 \\ & x_{ij} \in Z_+ \qquad \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

x_{ij} rappresenta la capacità allocata sull'arco (i,j), c_{ij} è il costo di allocazione di capacità sull'arco, μ è un qualunque vettore di $R^{|E|}$, ℓ_t^s è la lunghezza del cammino minimo tra s e t utilizzando μ come pesi per gli archi, d è il vettore delle domande.

3. – Risultati Poliedrali e Algoritmi di Separazione.

In questo lavoro vengono caratterizzate tutte le disuguaglianze valide per l'involucro convesso delle soluzione intere del problema, che indichiamo con $NL(G,D)$. In particolare si dimostra che:

TEOREMA 1. – *Sia $a^T x \geq b$ una qualunque disuguaglianza valida per $NL(G,D)$, allora esiste una metrica μ tale che:*

a) $\mu^T x \geq b$ *è valida*

b) $\mu_{ij} \leq a_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$

Vengono inoltre date condizioni per cui disequazioni del tipo $\mu^T x \geq b$ siano facet-defining.

DEFINIZIONE 1. – *Si definisce rango di una metrica μ, definita su un grafo G, con insieme delle domande D, il valore:*

$$R_\mu = \min \{\mu^T x : x \in NL(G,D)\}$$

Si può dimostrare che:

TEOREMA 2. – *Condizione necessaria affinchè una disequazione* $\mu^T x \geq b$ *sia facet-defining per* $NL(G, D)$ *è che* $b = R_\mu$.

La separazione di disequazioni di questo tipo è un problema *NP-hard* visto che il calcolo del rango data la metrica è già da solo un problema *NP-hard*. Tenendo conto dei risultati teorici, sono state sviluppate tecniche di separazione per questo tipo di disequazioni. Tali algoritmi sono stati inseriti in uno schema di tipo Branch&Cut. Sono state inoltre proposte tecniche euristiche per la determinazione di buone soluzioni ammissibili per il problema.

4. – Risultati computazionali.

L'efficacia dell'algoritmo complessivo è stata provata utilizzando problemi test noti in letteratura come *problemi norvegesi* [6], e altre istanze derivate da quelle proposte in [5]. Per la prima volta si è stati in grado di trovare la soluzione ottima per molti dei problemi test utilizzati, e valori di lower bound e upper bound migliori di quelli noti finora per diversi altri.

BIBLIOGRAFIA

[1] AHUJA R.K., MAGNANTI T.L., ORLIN J.B., *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1993).

[2] ATAMTÜRK A., *On Capacitated Network Desing Cut-Set Polyhedra*, Mathematical Programming Ser. B, **92** (2002), 425-437.

[3] ATAMTÜRK A., RAJAN D., *On Splittable and Unsplittable Flow Capacitated Network Desing Arc-Set Polyhedra*, Mathematical Programming, **92** (2002), 315-333.

[4] BALAKRISHNAN A., MAGNANTI T.L., MIRCHANDANI P., *Network Design*, capitolo 18 in Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization Dell'Amico M., Maffioli F., Martello S. (Eds.). John Wiley & Sons (1997), 311-334.

[5] BARAHONA F., *Network Design Using Cut Inequalities*, SIAM J. Optim, **6** (1996), 823-837.

[6] BIENSTOCK D., CHOPRA S., GÜNLÜK O., TSAI C., *Minimum Cost Capacity Installation for Multicommodity Network Flows*, Mathematical Programming, **81** (1998), 177-199.

[7] CRAINIC T.G., GENDREAU M., FARVOLDEN J.M., *A Simplex-based Tabu Search for Capacitated Network Design*, INFORMS Journal on Computing, **12(3)** (2000), 223-236.

[8] HOLMBERG K., YUAN D., *A Lagrangean Heuristic Based Branch-and-Bound Approach for the Capacitated Network Design Problem*, Operations Research, **48(3)** (2000), 461-481.

[9] IRI M., *On an Extension of the Max-Flow Min-Cut Theorem to Multicommodity Flows*, Journal of the Operations Research Society of Japan, **13** (1971), 129-135.

[10] MAGNANTI T.L., MIRCHANDANI P., VACHANI R., *The Convex Hull of two Core Capacitated Network Design Problems*, Mathematical Programming, **60** (1993), 233-250.

[11] Onaga K., Kakusho O., *On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Network*, IEEE Trans. Circuit Theory, **18(4)** (1971), 425-429.
[12] Stoer M., Dahl G., *A Polyhedral Approach to Multicommodity Network Design*, Numerische Mathematik, **68** (1994), 149-167.

Dipartimento di Informatica e Sistemistica «Antonio Ruberti»
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
e-mail: mattia@dis.uniroma1.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate Università degli Studi di Roma «La Sapienza») - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: prof. Antonio Sassano, Università degli Studi di Roma «La Sapienza»