Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Federica Malagoli

Problemi di minimo per corpi convessi con vincoli sugli spessori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 573–576.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_573_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 573-576

Problemi di minimo per corpi convessi con vincoli sugli spessori

FEDERICA MALAGOLI

1. – Introduzione.

L'argomento centrale della tesi riguarda lo studio di problemi di area minima per corpi convessi piani con opportuni vincoli sugli spessori. Le questioni considerate-rientrano nel più generale ambito di ricerca denominato *tomografia geometrica*, di cui si trova ampia trattazione nel libro di R. J. Gardner [1]. Immaginiamo di proiettare un corpo convesso K, cioè un convesso compatto di $\mathbb{R}^n$, su un sottospazio lineare di dimensione r compresa fra 0 ed n; se $r = n - 1$, si ottiene la proiezione di K su un iperpiano, la cui misura è detta *luminosità;* se, invece, $r = 1$, K si proietta su una retta e la misura di tale proiezione si chiama *spessore.*

Evidentemente, spessore e luminosità sono funzioni dei parametri che caratterizzano, rispettivamente, iperpiani e rette di $\mathbb{R}^n$.

Il lavoro svolto ha riguardato principalmente insiemi del piano, dove i concetti di spessore e luminosità coincidono.

Il punto di partenza della ricerca è stato *il Teorema di Blaschke-Lebesgue,* un risultato classico della geometria convessa piana. Tale teorema promuove il triangolo di Reuleaux a corpo di area minima fra i convessi piani a spessore costante in ogni direzione, dove il valore costante è assegnato. Di questo risultato esistono in lettera-tura numerose dimostrazioni oltre a quelle originali di Blaschke e Lebesgue. Non si conosce ancora, tuttavia, un risultato analogo in dimensione maggiore di due; nessuna delle tecniche utilizzate nelle dimostrazioni relative al caso piano sembra riproducibile con successo in dimensioni più alte.

Fra le dimostrazioni prese in esame, quella di Ghandehari [3] è la meno convenzionale: essa fa uso di uno strumento della Teoria del Controllo Ottimo quale è il Principio di Massimo di Pontryagin. Un esame attento dell'articolo ha messo in luce alcuni errori presenti nella dimostrazione. Se ne è data dunque una versione corretta e, forse, più chiara. Si è poi applicato lo stesso Principio di Pontryagin [5] al problema della ricerca del corpo di area minima fra quelli con spessori assegnati in ogni direzione. Utilizzando la caratterizzazione di estremalità per corpi convessi piani con funzione spessore assegnata trovate da Kallay ([4]), si è ritrovato, anche se solo parzialmente, il seguente risultato di Sholander e Chakerian:

se K è un corpo convesso piano e $K + (-K) = 2C$, allora K ha area maggiore o uguale a quella di qualche triangolo di Reuleaux relativo a C, ove per triangolo di Reuleaux relativo a C si intende il triarco costruito su uno dei triangoli in cui è possibile dividere l'esagono affine che si può inscrivere in C. Un triarco T è una figura convessa sulla frontiera della quale esistono tre punti base tali che, per ogni coppia di rette di supporto a T, almeno una di esse passa per uno dei tre punti.

Sulla base degli esperimenti fatti, non sembra che queste tecniche basate sulla teoria del controllo si possano utilizzare con successo per formulazioni pluridimensionali del problema.

Un altro risultato di geometria convessa piana preso in esame è il *Teorema di Pal,* che risolve il problema di area minima per corpi convessi piani con spessore minimo assegnato e che individua nel triangolo equilatero di altezza pari a tale spessore minimo l'unica soluzione. Questo è un caso particolare del cosiddetto «problema di Kakeya», che consiste nella ricerca del più piccolo insieme in cui è possibile far ruotare un segmento unitario. Per il Teorema di Pal esistono solo la dimostrazione originale del 1921, in seguito semplificata da Yaglom e Boltjianski, ed una più recente in [2]. Per formulazioni del problema in dimensioni maggiori di due, esistono solo risultati in classi particolari. Si è cercata, dunque, una dimostrazione alternativa del Teorema di Pal, in vista anche di eventuali estensioni pluridimensionali. Si è ottenuto un risultato che caratterizza i corpi convessi piani di area minima fra quelli a spessore minimo assegnato ed una opportuna limitazione sul raggio di curvatura. Questo risultato permette poi di ridimostrare in modo originale il Teorema di Pal, attraverso un procedimento di passaggio al limite.

2. – Il Teorema di Blaschke-Lebesgue.

Indicata con h la funzione supporto di un corpo convesso piano e con ρ il raggio di curvatura della frontiera, il problema di Blaschke- Lebesgue si può formulare come problema di controllo ottimo nel modo seguente:

$$\min \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(\theta)\,\rho(\theta)\,d\theta \text{ con}$$

$$h(\theta) + h''(\theta) = \rho(\theta) \tag{1}$$

$$h(\theta) + h(\theta + \pi) = 1 \tag{2}$$

$$\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = 1 \tag{3}$$

$$0 \le \rho \le 1. \tag{4}$$

Usando il Principio di Massimo di Pontryagin, si prova che la soluzione, la cui esistenza è assicurata dal Teorema di Selezione di Blaschke, va ricercata fra i poligoni di Reuleaux regolari, cioè fra le figure che si ottengono costruendo degli archi di circonferenza congiungenti due vertici consecutivi di un poligono regolare e centrati nel vertice opposto al corrispondente lato. Implicitamente, il numero dei lati del poligono deve essere dispari.

Essendo l'area una funzione crescente del numero di lati del poligono di Reuleaux, il minimo si ha proprio per il triangolo di Reuleaux.

Nel caso di funzione spessore assegnata, si lavori con una funzione $\omega : [0, \pi] \to R$, che deve essere la funzione spessore di un corpo convesso, e dunque soddisfa opportune condizioni di regolarità. Il funzionale area che si vuole minimizzare è ancora $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h\,\rho\,d\theta$, con $0 \leq \rho(\theta) \leq \omega(\theta) + \omega''(\theta) = \omega_0$ e $\omega(\theta)$ assegnata.

La media di ρ su $[0, \pi]$ risulta fissata e vale $\int_0^{\pi} \rho(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \omega_0(\theta)\,d\theta$; Analogamente, la media di h su $[0, \pi]$ risulta fissata e vale $\int_0^{\pi} h(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \omega(\theta)\,d\theta$; il Principio di Massimo di Pontryagin in questo caso fornisce il risultato per cui il corpo di area minima con funzione spessore $\omega(\theta)$, ha raggio di curvatura che assume alternativamente i valori 0 e $\omega(\theta) + \omega''(\theta)$ su un numero finito di sottointervalli in cui è suddiviso $[0, \pi]$.

3. – Un problema di area minima con vincoli su spessore e raggio di curvatura.

Sia F la classe dei corpi convessi K con spessore minimo 1 e misura d'area σ_K tale che $\sigma_K(\omega) + \sigma_K(-\omega) \leq k\,\lambda(\omega)$, per ogni boreliano ω di S^1, ove λ denota la misura di Lebesgue. Per il teorema di Radon- Nikodym, σ_K, che è positiva, è assolutamente continua rispetto a λ; perciò, esiste una funzione ρ tale che si ha $\sigma_K(\omega) = \int_{\omega} \rho\,d\lambda$. La funzione ρ è il raggio di curvatura del corpo K e verifica la condizione $\rho(z) + \rho(-z) \leq k$ q.o.

Si prova innanzitutto che la classe F è chiusa.

Poichè il corpo di area minima in F avrà area minima fra tutti i convessi con la stessa funzione spessore, per il Teorema di Sholander-Chakerian, esso sarà un triarco.

Se, poi, K è tale che $\sigma_K(\omega) \leq k\,\lambda(\omega)$, per ogni boreliano, allora K è k-convesso, cioè si ottiene come intersezione di cerchi di raggio k.

Il passo successivo sarà dimostrare che i punti base del triarco estremale formano un triangolo equilatero e, infine, che la frontiera del triarco di area minima R_k in F è costituita da tre archi di raggio k, ciascuno congiungente due punti base.

Si dimostra così che:

TEOREMA 1. – *Il corpo convesso piano di area minima fra quelli con spessore mini-mo 1 e misura d'area σ_K tale che $\sigma_K(\omega) + \sigma_K(-\omega) \leq k\,\lambda(\omega)$, per ogni boreliano ω di S^1, è il triarco R_k i cui punti base formano un triangolo equilatero di lato $l = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - k) + \frac{\sqrt{3k^2 + 2k - 1}}{2}$ e la cui frontiera è costituita da archi di raggio k, ciascuno congiungente due punti base.*

4. – Il Teorema di Pal.

Il risultato appena enunciato si può utilizzare per dimostrare, unicità a parte, il Teorema di Pal. Infatti, si prova che la successione $\{R_k\}_{k>1}$, quando k tende a $+\infty$, converge nella metrica di Hausdorff al triangolo equilatero T di altezza 1. Questo è effettivamente un corpo di area minima fra quelli a spessore minimo 1, poichè, se Q è la soluzione del problema di Pal e $\{Q_k\}_k$ è una successione di corpi convessi appartenenti alla classe di R_k convergenti a Q nella metrica di Hausdorff, si ha

$$A(T) = \lim_k A(R_k) \leq \lim_k A(Q_k) = A(Q),$$

da cui $A(Q) = A(T)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] GARDNER R. J., *Geometric Tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **58**, Cambridge University Press, (1995).
[2] CAMPI S., COLESANTI A., GRONCHI P., *Minimum problems for volumes of convex bodies* (P. Marcellini, G. Talenti and E. Vesentini eds.) «Partial differential equations and applications», Marcel Dekker, New York (1996), 43-55.
[3] GHANDEHARI M., *An optimal control formulation of the Blaschke-Lebesgue theorem*, J. Math. Anal., **200**, (1996), 322-331.
[4] KALLAY M., *Reconstruction of a plane convex body from the curvature of its boundary*, Israel J. Math., **17** (1974), 149-61.
[5] PINCH E. R., *Optimal control and the calculus of variations*, Oxford Science Publications, Oxford University Press (1993).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata,
Università di Modena e Reggio Emilia
e-mail: fmalagoli@unimo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Modena) - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: Prof. Stefano Campi, Università di Modena e Reggio Emilia