Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Erika Giorgi

La teoria dell'intersezione negli anelli locali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 549–552.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_549_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 549-552

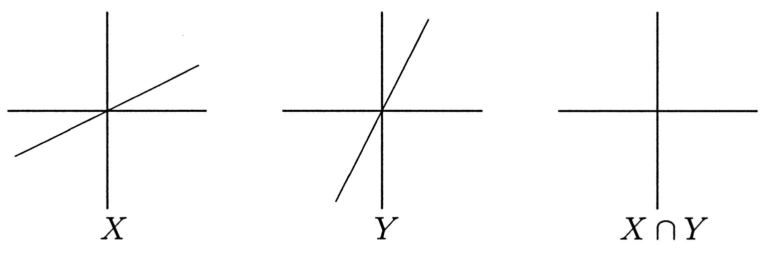
La teoria dell'intersezione negli anelli locali

ERIKA GIORGI

1. – Introduzione.

L'approccio standard alla teoria dell'intersezione è quello di Fulton e MacPherson [3] che, negli anni 70, hanno sviluppato i fondamenti di una teoria geometrica dell'intersezione su varietà non-singolari arbitrarie, comprendente una descrizione delle intersezioni improprie. Indipendentemente Stückrad e Vogel (si veda la monografia [2]) hanno sviluppato un approccio algebrico basato su un algoritmo che produce, per intersezioni di varietà proiettive, un ciclo di intersezione in modo tale che valga un teorema di Bezout e che si rivela utile anche per affrontare problemi di teoria dell'intersezione mediante un approccio computazionale. La relazione tra la teoria di Fulton-MacPherson e quella di Stückrad-Vogel è stata scoperta nel 1991 da van Gastel ed ha portato a numerose applicazioni.

Nella tesi di dottorato, a cui questa nota fa riferimento, viene sviluppata una versione locale della teoria di Stückrad-Vogel mediante la definizione e lo studio di un ciclo associato ad un ideale di un anello locale, secondo un'idea già presente in [1]. Questo permette di applicare la teoria di Stückrad-Vogel all'algebra locale. Il risultato principale della tesi è un esempio di tale applicazione e riguarda la generalizzazione di un teorema di Huneke in [4] sull'anello graduato associato rispetto ad un ideale primo. In particolare è legato ad un asserto di Severi in [5, n. 11, Bemerkung I] in cui si afferma la possibilità, non sempre vera, di costruire un ciclo di intersezione basandosi solamente sulle componenti irriducibili dell'intersezione. Più precisamente, dati due sottoschemi chiusi equidimensionali X, Y di $\boldsymbol{P}^n_K$, Severi descrive una procedura dinamica per assegnare ad ogni componente irriducibile di $X \cap Y$ un numero di intersezione per cui valga il teorema di Bezout. Oggi sappiamo che talvolta devono intervenire a tal scopo anche le componenti immerse, come mostra il seguente esempio in $\boldsymbol{P}^2$:



Per simmetria ogni retta di $X \cap Y$ deve avere contributo pari e questo contraddice il fatto che il numero di Bezout $\deg X \cdot \deg Y = 9$ è dispari. L'idea originale di Severi è stata modificata e corretta, per esempio da Fulton e MacPherson e da Lazarsfeld. Nello specifico il risultato principale della tesi fornisce una condizione algebrica sotto la quale contribuiscono al ciclo di intersezione soltanto le componenti irriducibili, come voleva Severi, ed uno strumento geometrico per controllare la chiusura integrale delle potenze di un ideale e le sue potenze simboliche.

2. – Algoritmo di intersezione in un anello locale.

Dato un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ ed un insieme $x_1, \ldots, x_N$ di indeterminate su A, l'estensione dell'anello locale $(A, \mathfrak{m})$ mediante le nuove variabili $x_1, , x_N$ è la localizzazione $A^{(N)}$ dell'anello polinomiale $A[x_1, \ldots, x_N]$ all'ideale primo $\mathfrak{m}A[x_1, \ldots, x_N]$. Allora l'omomorfismo di anelli $A \to A^{(N)}$ Ò una estensione fedelmente piatta. Questo corrisponde all'estensione del campo nella teoria di Stückrad-Vogel e permette di lavorare mediante «intersezioni generiche». Nella tesi viene definito un ciclo associato a un ideale di un anello locale. L'idea proviene da un lavoro di Achilles e Manaresi [1] in cui è stato introdotto un algoritmo di intersezione per certe successioni di elementi, dette successioni filter-regolari, di un anello locale. Utilizzando il classico passaggio a una estensione fedelmente piatta dell'anello locale tramite l'aggiunta di nuove variabili, è possibile scegliere generatori generici dell'ideale che permettono di costruire un ciclo che dipende solo dall'ideale e non da una particolare successione. Si dimostra che il ciclo così definito gode delle proprietà principali di cui gode il classico ciclo di Stückrad e Vogel.

3. – Risultati.

Dato un ideale I in un anello A, con G si intende l'anello graduato associato di A rispetto ad I, con $\overline{I}$ la chiusura integrale di I e con $I^{(n)}$ la potenza simbolica n-esima. Allora il risultato principale della tesi si può riassumere nel seguente Teorema, ed estende risultati di Huneke (si veda [4]), Vasconcelos e Martí-Farré.

TEOREMA 1. – *Sia I un ideale in un anello A noetheriano localmente quasi-unmixed. Sono equivalenti:*

(i) *Ogni primo minimale di G si contrae ad un primo minimale di A/I.*

(ii) *Per ogni primo $\mathfrak{q}$ che contiene strettamente un ideale primo minimale di I, l'analytic spread di $I_\mathfrak{q}$ è strettamente minore dell'altezza di $\mathfrak{q}$.*

(iii) $I^{(n)} \subseteq \overline{I^n}$ *per ogni* $n \geq 1$.

(iv) $I^{(n)} \subseteq \overline{I^n}$ *per* $n >> 1$.

L'ipotesi che l'anello sia localmente quasi-unmixed è stata utilizzata, ai fini della dimostrazione, solamente nell'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) e nell'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Tale

Teorema generalizza il risultato di Huneke [4, Theorem 2.1] ad un ideale qualunque, anziché primo, con ipotesi più deboli sull'anello. Si noti che a differenza di [4, Theorem 2.1] in (iii) non vi è uguaglianza, ed in generale non si ottiene neppure con l'ipotesi aggiuntiva che per ogni ideale primo minimale $\mathfrak{p}$ di I l'anello ridotto $(G_{\mathfrak{p}})^{\mathrm{red}}$ sia un dominio. Ciò è mostrato dall'esempio seguente.

ESEMPIO. – Sia $A = k[x,y]$ (k un campo), $I = (x^2, y^2)$ un ideale $\mathfrak{p}$-primario di A, dove $\mathfrak{p} = (x,y)$. L'anello graduato associato di A rispetto ad I è l'anello graduato

$$G = (A/I)[t_0, t_1]\,.$$

Si osservi che $G_{\mathfrak{p}} = (A/I)[t_0,t_1] \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ non è un dominio, mentre è un dominio $(G_{\mathfrak{p}})^{\mathrm{red}} \cong (A/\mathfrak{p})[t_0,t_1] \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$. Ora si ha che

$$(G)^{\mathrm{red}} = (A/\mathfrak{p})[t_0, t_1]$$

è un dominio, cosicché è soddisfatta la condizione (3) di [4, Theorem 2.1]. Ma se confrontiamo la chiusura integrale delle potenze di I con le potenze simboliche di I ci accorgiamo che

$$I^{(1)} = I = (x^2, y^2)\overline{I} = (x^2, xy, y^2)\,.$$

Sotto l'ipotesi aggiuntiva che per ogni primo minimale $\mathfrak{p}$ di I la localizzazione $G_{\mathfrak{p}}$ sia un dominio, ossia sotto una delle ipotesi di Huneke estesa ad un ideale non necessariamente primo, vale anche l'inclusione $\overline{I^n} \subseteq I^{(n)}$ per ogni $n \geq 1$. Uno strumento importante per le dimostrazioni è il Lemma seguente che si ispira ad un risultato algebrico della teoria dell'intersezione di Achilles e Manaresi.

LEMMA 1. – *Sia A un anello noetheriano e sia I un ideale di A. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A tale che $I \subseteq \mathfrak{p}$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) *Esiste un ideale primo P in G tale che la contrazione in grado zero di P, $P \cap G_0$, sia $\mathfrak{p}/I$ e tale che* $\dim G \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = \dim (G/P) \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$*;*

(ii) *l'analytic spread di $I_{\mathfrak{p}}$ è massimale, ossia uguale all'altezza di $\mathfrak{p}$.*

Se applicato alla teoria dell'intersezione, ossia se A è l'anello delle coordinate del join ed I l'ideale della diagonale, allora il Teorema caratterizza algebricamente il caso in cui il ciclo di intersezione non ha varietà distinte immerse (nel senso di Fulton [3]), e permette inoltre di controllare geometricamente la chiusura integrale delle potenze di un ideale.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACHILLES R. e MANARESI M., *Multiplicities of a bigraded ring and intersection theory*, Math. Ann., **309** (1997), 573-591.

[2] FLENNER H., O'CARROLL L. e VOGEL W., *Joins and intersections*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag (1999).

[3] FULTON W., *Intersection theory, second ed.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, Springer-Verlag (1998).

[4] HUNEKE C., *On the associated graded ring of an ideal*, Illinois J. Math., **26** (1982), 121-137.

[5] SEVERI F., *Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **9** (1933), 335-364.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: giorgi@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bologna) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. R. Achilles, Università di Bologna