Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Chiara Frosini

Dinamica olomorfa nel bidisco complesso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 541–544.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_541_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 541-544

Dinamica olomorfa nel bidisco complesso

CHIARA FROSINI

1. – Dinamica olomorfa in domini limitati.

Sia M una varietà complessa taut e sia f una funzione olomorfa di M in s\ea . Data $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ ($n-$volte), consideriamo la successione, $\{f^n\}_{n \in N}$, delle *iterate* di f. In questa tesi affrontiamo alcune problematiche aperte riguardanti il «comportamento» di $\{f^n\}_{n \in N}$, cioè questioni inerenti la teoria dell'iterazione, nella vasta e significativa classe delle varietà taut. Ricordiamo che una varietà complessa M \eg *taut* ([2]) se la famiglia delle mappe olomorfe del disco unità $\varDelta = \{z \in \boldsymbol{C} : \|z\| < 1\}$ in M è normale. Tra gli esempi di varietà taut ricordiamo lo stesso $\varDelta$ e più in generale ogni dominio convesso limitato di $\boldsymbol{C}^n$. Risultati noti mostrano come la geometria e la dinamica di f siano strettamente legate alla struttura dell'insieme dei punti fissi di f e al valore del differenziale di f nei punti fissi. Nel caso di una variabile complessa, il Lemma di Schwarz ([5]) e i risultati classici di Julia, Wolff e Denjoy ([2]) descrivono bene la geometria di una auto-mappa olomorfa f di $\varDelta$, e conseguentemente il comportamento della successione, $\{f^n\}_{n \in N}$, delle sue iterate. Si ottiene cosí che, se f ha un punto fisso $z_0 \in \varDelta$, poiché $|f'(z_0)| \leq 1$, si hanno le due seguenti possibilità: se $|f'(z_0)| < 1$ allora z_0 è «attrattivo», cioè $\{f^n\}_{n \in N}$ converge a z_0; d'altra parte se $|f'(z_0)| = 1$ allora f è un automorfismo ellittico ([2]) di $\varDelta$ che fissa z_0. Se, invece, f non ha punti fissi in $\varDelta$, la geometria di f e il comportamento di $\{f^n\}_{n \in N}$ vengono ampiamente descritti dai risultati di Wolff, Julia e Denjoy. Wolff e Julia hanno provato in particolare due differenti «versioni al bordo» del Lemma di Schwarz. Il Lemma di Wolff afferma che, se $f \in Hol(\varDelta, \varDelta)$ non ha punti fissi in $\varDelta$, allora esiste un «punto fisso», $\tau \in \partial\varDelta$, (fisso rispetto al $K-$limite o limite radiale, vedi [2]) per f che è «attrattivo». Il «punto fisso» τ, definito dal Lemma di Wolff, è detto punto di *Wolff* di f. Nel caso di più variabili complesse, Carathéodory e H. Cartan, hanno sviluppato la teoria geometrica classica delle mappe olomorfe in un dominio limitato di $\boldsymbol{C}^n$. La loro teoria è stata generalizzata in molte direzioni e per vari tipi di domini e varietà. Per quanto riguarda le questioni di dinamica, in particolare, Abate ([2]) ha ottenuto interessanti risultati nel caso di una generica auto-mappa olomorfa f di una varetà taut M, con punti fissi interni a M. A questo punto si pone il problema di studiare che cosa accade se f è un' auto-mappa olomorfa di $M \subseteq \boldsymbol{C}^n$, senza punti fissi interni. Nel caso della palla unità B^n di $\boldsymbol{C}^n$ (e più in generale nel caso di un dominio strettamente convesso, D, con bordo C^3 ([2])) si può generalizzare il Teorema di Wolff-Denjoy ottenendo che, se f è una auto-mappa olomorfa di B^n senza punti fissi in B^n, allora la successione delle iterate, $\{f^n\}_{n \in N}$, converge uniformemente sui compatti a un punto di ∂B^n. Nella parte principale di questa tesi di dottorato studiamo la «dinamica olomorfa» nel polidisco unità di $\boldsymbol{C}^n$, che è un dominio convesso, non biolomorfo a B^n.

2. – Punti di Wolff nel bidisco.

Sia Δ^n il polidisco unità di $\boldsymbol{C}^n$ e sia $f \in Hol(\Delta^n, \Delta^n)$. La prima questione che affrontiamo è la definizione e la caratterizzazione dei punti di Wolff di f. Per evitare complicazioni tecniche ci restringiamo al caso di dimensione due e iniziamo a studiare il caso del bidisco Δ^2. Sia $f = (f_1, f_2) : \Delta^2 \to \Delta^2$ olomorfa. Dobbiamo distinguere il caso in cui f non ha punti fissi in Δ^2 dal caso in cui f ha punti fissi in Δ^2. Consideriamo inizialmente f senza punti fissi in Δ^2. È stato provato da Hervé ([3]) che ci sono solo due possibilità: (a) $f_1(\cdot\,, y)$ ha punto di Wolff $e^{\imath\theta_1}$, indipendente da y oppure (b) esiste una funzione olomorfa $F_1 : \Delta \to \Delta$, tale che $f_1(F_1(y), y) = F_1(y),\ \forall\, y \in \Delta$. In questo caso $f_1(x, y) = x \Rightarrow x = F_1(y)$.

Notiamo che, se $f \neq id_\Delta$, allora i casi (a) e (b) non si possono verificare contemporaneamente. Motivati da quest'ultimo risultato possiamo dare la seguente definizione: la mappa olomorfa $f = (f_1, f_2) : \Delta^2 \to \Delta^2$, si dice di:

– *primo tipo* se:
esiste una funzione olomorfa $F_1 : \Delta \to \Delta$, tale che $f_1(F_1(y), y) = F_1(y)$, $\forall\, y \in \Delta$ e
esiste una funzione olomorfa $F_2 : \Delta \to \Delta$, tale che $f_2(x, F_2(x)) = F_2(x),\ \forall\, x \in \Delta$.

– *secondo tipo* se (a meno di scambiare f_1 con f_2):
$f_1(\cdot\,, y)$ ha punto di Wolff $e^{\imath\theta_1}$, indipendente da y e
esiste una funzione olomorfa $F_2 : \Delta \to \Delta$, tale che $f_2(x, F_2(x)) = F_2(x),\ \forall\, x \in \Delta$.

– *terzo tipo* se:
$f_1(\cdot\,, y)$ ha punto di Wolff $e^{\imath\theta_1}$, indipendente da y e
$f_2(x, \cdot)$ ha punto di Wolff $e^{\imath\theta_2}$, indipendente da x.

Nel caso f sia di *primo tipo* e senza punti fissi interni, abbiamo provato che $F_1 \circ F_2$ e $F_2 \circ F_1$ hanno un punto di Wolff. Se $e^{\imath\theta_1}$ (rispettivamente $e^{\imath\theta_2}$) è il punto di Wolff di $F_1 \circ F_2$ (rispettivamente di $F_2 \circ F_1$), chiamiamo $\lambda_1 := \lim\limits_{y \to e^{\imath\theta_2}} |F'_1(y)|$ e $\lambda_2 := \lim\limits_{x \to e^{\imath\theta_1}} |F'_2(x)|$, rispettivamente, il *coefficiente di dilatazione al bordo* di F_1 in $e^{\imath\theta_2}$ e di F_2 in $e^{\imath\theta_1}$. Se f è di *secondo tipo* indichiamo con $e^{\imath\alpha_1}$ il punto di Wolff di $f_1(\cdot, y)$, con $e^{\imath\alpha_2}$ il $K-$limite ([2]) di F_2 in $e^{\imath\alpha_1}$ (se esiste) e chiamiamo $k_2 := \lim\limits_{x \to e^{\alpha_1}} |F'_2(x)|$ il *coefficiente di dilatazione al bordo* di F_2 in $e^{\imath\alpha_1}$. Se f è di *terzo tipo*, denotiamo $e^{\imath\gamma_1}$ e $e^{\imath\gamma_2}$, rispettivamente, il punto di Wolff di $f_1(\cdot, y)$ e di $f_2(x, \cdot)$. Infine indichiamo con $\pi_j : \Delta^2 \to \Delta\,(j = 1, 2)$ la proiezione sulla j-esima componente e con $W(f)$ l'insieme dei punti di Wolff di f. Con le notazioni appena stabilite possiamo enunciare il primo risultato originale della tesi:

TEOREMA 1. – *Sia $f = (f_1, f_2)$ una mappa olomorfa, senza punti fissi nel bidisco complesso. Se $f_1 \neq \pi_1$ e $f_2 \neq \pi_2$, allora sono possibili solo i cinque seguenti casi:*

i) $W(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ *è di* primo tipo *e* $\lambda_i > 1$ *per* $i = 1$ *o* $i = 2$;
ii) $W(f) = (e^{\imath\theta_1}, e^{\imath\theta_2}) \Leftrightarrow f$ *è di* primo tipo *e* $\lambda_i \leq 1$ *per ogni* $i = 1, 2$;
iii) $W(f) = \{\{e^{\imath\alpha_1}\} \times \Delta\} \cup \{(e^{\imath\alpha_1}, e^{\imath\alpha_2})\} \Leftrightarrow f$ *è di* secondo tipo $k_2 \leq 1$;
iv) $W(f) = \{\{e^{\imath\alpha_1}\} \times \Delta\} \Leftrightarrow f$ *è di* secondo tipo *e* $k_2 > 1$;
v) $W(f) = \{\{e^{\imath\gamma_1}\} \times \Delta\} \cup \{(e^{\imath\gamma_1}, e^{\imath\gamma_2})\} \cup \{\Delta \times \{e^{\imath\gamma_2}\}\} \Leftrightarrow f$ *è di* terzo tipo.

D'altra parte, se $f_1(x, y) = x, \forall\, y \in \Delta$, i.e se $f_1 = \pi_1$ (o rispettivamente $f_2(x, y) = y$,

$\forall\, x \in \Delta$, *i.e* $f_2 = \pi_2$ *) allora:*

vi) $W(f) = (e^{-\imath\delta_2} \times \Delta) \cup (e^{-\imath\delta_2}, e^{\imath\delta_2}) \cup (\Delta \times e^{\imath\delta_2}) \cup (e^{\imath\delta_2}, e^{\imath\delta_2}) \cup (e^{\imath\delta_2} \times \Delta)$ *(dove* $e^{\imath\delta_2} \in W(f_2(x,\cdot))$ *(o risp.* $W(f) = (\Delta \times e^{\imath\delta_1}) \cup (e^{\imath\delta_1}, e^{\imath\delta_1}) \cup (e^{\imath\delta_1} \times \Delta) \cup (e^{\imath\delta_1}, e^{-\imath\delta_1}) \cup (\Delta \times e^{-\imath\delta_1})$ *(dove* $e^{\imath\delta_1} \in W(f_1(\cdot, y))$*)).*

Notiamo che se f è di *primo tipo* allora $\lambda_1\lambda_2 \leq 1$, e quindi i casi *i)* e *ii)* sono gli unici possibili. Consideriamo adesso il caso di $f = (f_1, f_2) : \Delta^2 \to \Delta^2$ olomorfa e con punti fissi in Δ^2. Da un risultato di Viguè ([4]) segue che anche $f_1(\cdot, y)$ che $f_2(x, \cdot)$ hanno punti fissi . Indichiamo con $Fix(f)$ l'insieme dei punti fissi di f in Δ^2. È noto che ([2]) $Fix(f)$ è una sottovarietà chiusa di Δ^2 tale che quando è $1-$dimensionale, risulta essere una geodetica complessa di Δ^2 (vedere [5]). Con questa notazione abbiamo il secondo risultato originale della tesi:

TEOREMA 2. – *Sia* $f = (f_1, f_2) : \Delta^2 \to \Delta^2$ *una funzione olomorfa, non un automorfismo, con punti fissi in* Δ^2*. Supponiamo che, a meno di automorfismi,* $f(0,0) = (0,0)$.

1) *Se* $\dim Fix(f) = 0$ *allora* $W(f) = \emptyset$.

2) *Se* $\dim Fix(f) = 1$ *e se* $G := Fix(f)$ *è parametrizzato come* $\{(g(z), z) : z \in \Delta$ *e* $g \in Hol(\Delta, \Delta)\}$ *allora:*

i) $g \in Aut(\Delta) \Leftrightarrow W(f) = \partial G$ *(*$\Leftrightarrow$ *esiste un punto* $(e^{i\theta}, 1) \in (\partial\Delta)^2$ *che appartiene a* $W(f)$);

ii) $g \notin Aut(\Delta)$ *è una mappa propria* $\Leftrightarrow W(f) = \emptyset$;

iii) *g non è una mappa propria* $\Leftrightarrow W(f)$ *è sconnesso (*$\Leftrightarrow f_2$ *è la proiezione sul secondo fattore).*

Se $f \in Aut(\Delta^2)$ ha punti fissi in Δ^2, le sue componenti sono automorfismi ellittici di Δ e $W(f) = \emptyset$.

3. – Teoremi di Julia-Wolff-Carathéodory e orbite delle iterate.

Un'altra questione classica di ben noto interesse in dimensione uno, riguarda lo studio del comportamento delle orbite dei punti sotto l'azione delle iterate di un'automappa olomorfa f di Δ. L'analoga questione è, in generale, aperta in più variabili complesse. In dimensione uno il classico Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory ([2], [1]) garantisce che se $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ non ha punti fissi in Δ e τ è il suo punto di Wolff con $f'(\tau) < 1$, allora le orbite dei punti sotto l'azione delle iterate di f convergono non-tangenzialmente a τ. In questa tesi generalizziamo il concetto di limite non-tangenziale nel caso di Δ^2, e quindi proviamo una nuova generalizzazione del Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory (cfr anche Abate ([1])). Sia $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : (0,1) \to \Delta^2$ una curva che tende (per semplicità di notazioni) al punto $(1,1)$ per $t \to 1^-$, sia $\varphi : \Delta \to \Delta^2$ una geodetica complessa tale che $\varphi(\zeta) = (\zeta, g(\zeta))$ (rispettivamente $\varphi(\zeta) = (g(\zeta), \zeta)$), con $g(1) = 1$ (nel senso del $K-$limite) e sia $a_\varphi := g'(1)$ finito. Consideriamo $\pi_\varphi : \Delta^2 \to \varphi(\Delta)$ tale che $\pi_\varphi(z) = (z_1, g(z_1))$ (rispettivamente $\pi_\varphi(z) = (g(z_2), z_2)$). La coppia (φ, π_φ) si dice *projection device* ([1]). La curva γ si dice φ-*speciale,* se la distanza di Kobayashi ([5]) $K_{\Delta^2}(\gamma(t), \pi_\varphi(\gamma(t))) \to 0$ per $t \to$ [4]1^-.

Inoltre γ si dice *ristretta lungo le componenti,* se $\gamma_j(t) \to 1$, non-tangenzialmente, sia per $j = 1$ che per $j = 2$, quando $t \to 1^-$. Da adesso in poi diremo che $f \in Hol(\Delta^2, \Delta^2)$ ha φ-limite L nel punto $(1,1)$, se f ha limite L lungo ogni curva che sia φ-speciale e ristretta lungo le componenti. A questo punto possiamo enunciare la nuova generalizzazione del Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory trovato nella tesi:

TEOREMA 3. – *Sia* $h \in Hol(\Delta^2, \Delta)$ *tale che* $h(w) \to 1$ *non-tangenzialmente per* $w \to (1,1)$. *Sia* (φ, π_φ) *una projection device in* $(1,1)$ *tale che* $\varphi(z) = (z, g(z))$ *con* $g \in Hol(\Delta, \Delta)$, $g(1) = 1$ *e* $g'(1) < 1$. *Sia* $\frac{1}{2}\log a := \liminf_{w \to (1,1)} [K_{\Delta^2}((0,0), w) - K_\Delta(0, h(w))] < \infty$. *Sia* $\Theta(z,w) = (\theta^{-1}(z), w)$, *con* $\theta \in Aut(\Delta)$ *tale che* $\theta'(1) = \frac{1}{g'(1)}$. *Data* $f := h \circ \Theta^{-1}$ *e* $\frac{1}{2}\log\beta := \liminf_{w \to (1,1)} [K_{\Delta^2}((0,0), w) - K_\Delta(0, f(w))]$. *Allora* $\beta < +\infty$, *dipende solo da* $g'(1)$. *In più:* $ag'(1) \le \varphi - \lim_{z \to (1,1)} \frac{1-h(z)}{1-\varphi^{-1}\circ\pi_\varphi(z)} = \beta g'(1) \le a$ *e* $a \le \varphi - \lim_{z \to (1,1)} \frac{1-h(z)}{1-\varphi^{-1}\circ\pi_\varphi(R(z))} = \beta \le \frac{a}{g'(1)}$.

Vi è infine un altro risultato originale connesso con il Teorema 3, che descrive il comportamento delle orbite dei punti del bidisco sotto l'azione delle iterate di f. Consideriamo $\boldsymbol{H} = \{z \in \boldsymbol{C} : Im\, z > 0\}$, e definiamo F_j^n la j-esima componente della funzione ottenuta coniugando f con la mappa di «Cayley» $\Psi(x,y) := \left(\imath\frac{1+x}{1-x}, \imath\frac{1+y}{1-y}\right)$ con $x, y \in \Delta$.

TEOREMA 4. – *Sia* $f = (f_1, f_2) \in Hol(\Delta^2, \Delta^2)$ *e sia* $z_0 \in \Delta^2$ *tale che* $\{f^n(z_0)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ *sia* φ. *speciale e ristretta lungo le componenti per una geodetica* φ *passante per* $(1,1)$. *Sia* $F := (F_1, F_2) = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$. *Allora le successioni* $ArgF_j^n$, $j = 1, 2$ *ammettono limite per* $n \to \infty$. *Inoltre* $\lim_{n\to\infty} ArgF_1^n = \lim_{n\to\infty} ArgF_2^n$.

Le molte domande, di vari livelli di difficoltà, lasciate aperte da questa tesi sono oggetto di attuale attività di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABATE M., *The Julia-Wolff-Caratheodory theorem in polydisks*, Journ. d'Analyse Math., **74** (1998), 1-34.

[2] ABATE M., *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds,* Mediterranean Press, Rende, Cosenza (1990).

[3] HERVÉ M. M., *Itération des transformations analytiques dans le bicercle unité,* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **71** (1954) 1-28.

[4] VIGUÉ J. P., *Itérées et Points Fixes d'Applications Holomorphes*, C.R Acad. Sci. Paris, **303** (1986), 927-930.

[5] JARNICKI M. e PFLUG P., *Invariant distances and Metrics in complex anaysis,* de Gruyter Expositions in Mathematics, Berlin; New York (1993).

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università di Firenze
e-mail: frosini@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Graziano Gentili