Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Simona Fornaro

Proprietà di regolarità per alcuni operatori differenziali alle derivate parziali con coefficienti illimitati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 533–536.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_533_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 533-536

Proprietà di regolarità per alcuni operatori differenziali alle derivate parziali con coefficienti illimitati

SIMONA FORNARO

1. – Introduzione.

Operatori differenziali lineari ellittici e parabolici con coefficienti limitati e regolari sono stati oggetto, negli ultimi decenni, di uno studio vasto e accurato che ha prodotto una teoria completa ed esauriente, volta a stabilire risultati di esistenza, unicità e regolarità per le soluzioni delle equazioni associate a tali operatori in vari spazi funzionali, come spazi L^p, spazi di Hölder e altri. Nel corso degli ultimi anni, si è rilevato un interesse crescente verso operatori differenziali a coefficienti illimitati e/o singolari, motivato principalmente dallo stretto legame con equazioni differenziali stocastiche e dalle numerose applicazioni nell'ambito della probabilità e della matematica finanziaria. Nella tesi presentata, si sono volute studiare delle proprietà di regolarità di alcuni operatori differenziali lineari ellittici del secondo ordine a coefficienti regolari, ma possibilmente illimitati, in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$ e in spazi di funzioni continue in Ω, dove Ω è un aperto (illimitato) di $\boldsymbol{R}^N$. Le sezioni che seguono illustrano i problemi affrontati e i risultati ottenuti.

2. – Regolarità massimale in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$.

Consideriamo il seguente operatore lineare del secondo ordine in forma divergenza

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} D_i(q_{ij}D_j) + \sum_{i=1}^{N} F_i D_i - V, \tag{1}$$

e assumiamo che $q_{ij} = q_{ji}$ siano funzioni di classe C^1 in $\boldsymbol{R}^N$, limitate insieme alle loro derivate prime. Supponiamo inoltre che sia verificata una condizione di ellitticità uniforme, cioè che esista una costante $\upsilon > 0$, tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} q_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \upsilon|\xi|^2,$$

per ogni $x, \xi \in \boldsymbol{R}^N$. Se i coefficienti F_i, V sono misurabili e limitati, allora dalla teoria classica si deduce che l'operatore A, con dominio $W^{2,p}(\boldsymbol{R}^N)$, genera un semigruppo analitico, fortemente continuo di operatori lineari e limitati in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$, per ogni $1 < p < \infty$. Questo risultato poggia sulla stima fondamentale di Calderòn-Zygmund

$$\|D^2 u\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)} \leq C(N,p)\,\|\Delta u\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)}$$

valida per ogni $u \in W^{2,p}(\boldsymbol{R}^N)$.

Se, al contrario, F_i, V sono funzioni illimitate allora il quadro della situazione cambia radicalmente e non è ovvio ritrovare il risultato classico. Inoltre, in alcuni casi studiati in letteratura si vede che opportune ipotesi sui coefficienti permettono di dimostrare che A genera ancora un semigruppo in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$, tuttavia non è dato conoscere esplicitamente il dominio del generatore. Assumendo opportune condizioni per F_i, V, siamo stati in grado di ritrovare un risultato molto vicino a quello classico. Più precisamente, abbiamo provato il seguente teorema.

TEOREMA 1. – *Sia $1 < p < \infty$. Assumiamo che F_i, V siano di classe C^1 in $\boldsymbol{R}^N$ e che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(H1) $|DV(x)| \leq \alpha \dfrac{V^{2-\sigma}(x)}{(1+|x|^2)^{\mu/2}}$,

(H2) $|DF(x)| \leq \beta V(x) + c_\beta$,

(H3) $|F(x)| \leq \theta (1+|x|^2)^{\mu/2} V^\sigma(x)$,

(H4) $|\langle F(x), Dq_{ij}(x)\rangle| \leq \kappa V(x) + c_\kappa$,

dove $\alpha, \beta, \theta, \kappa > 0$, $c_\beta, c_\kappa \geq 0$ e $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$. Allora l'operatore (1) *con dominio $\mathcal{D}_p = \{u \in W^{2,p}(\boldsymbol{R}^N) | \langle F, Du\rangle, Vu \in L^p(\boldsymbol{R}^N)\}$ genera un semigruppo fortemente continuo in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$.*

In primo luogo, osserviamo che nel precedente teorema le costanti $\alpha, \beta, \theta, \kappa$ sono da intendersi «sufficientemente piccole». Ciò è strettamente legato alla caratterizzazione del dominio del generatore che, come anticipato, è un aspetto fondamentale del risultato ottenuto. In secondo luogo, precisiamo il fatto che il caso $p = 2$ può essere trattato indipendentemente, con delle ipotesi più deboli rispetto a (H1)-(H4), che non riportiamo per brevità espositiva. La distinzione tra $p = 2$ e p qualunque è presente anche nella trattazione del caso classico.

In virtù del Teorema 1 e grazie a risultati generali della teoria dei semigruppi, risulta che per λ sufficientemente grande e per ogni dato $f \in L^p(\boldsymbol{R}^N)$ esiste un'unica soluzione $u \in \mathcal{D}_p$ dell'equazione $\lambda u - Au = f$. Ciò significa che le soluzioni di tale equazione godono di regolarità massimale, poichè sapendo solo che $u, Au \in L^p(\boldsymbol{R}^N)$, si ricava di fatto che *ogni* addendo di Au è in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$. Da questo punto di vista la situazione è completamente analoga al caso classico in cui i coefficienti dell'operatore sono limitati.

Per quanto riguarda la dimostrazione del Teorema 1, il punto cruciale consiste nel provare le seguenti stime a priori

$$\|u\|_{W^{2,p}(\boldsymbol{R}^N)} + \|\langle F, Du\rangle\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)} + \|Vu\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)} \leq C(\|u\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)} + \|Au\|_{L^p(\boldsymbol{R}^N)}), \tag{2}$$

dove $u \in \mathcal{D}_p$ e C è una costante indipendente da u. La parte più delicata è quella relativa alla stima della norma L^p delle derivate seconde con $p \neq 2$, che costituisce l'analogo della stima di Calderòn-Zygmund per l'operatore di Laplace. La strategia dimostrativa può essere descritta nel seguente modo. Mediante un cambio di variabili e un processo di localizzazione in opportune palle $B(x_0, r(x_0))$, si costruiscono nuovi operatori A_{x_0}. Ad ogni operatore della famiglia $\{A_{x_0}\}$ si possono applicare dei risultati presenti in letteratura che permettono di ottenere delle stime per la norma L^p delle derivate seconde di un'arbitraria funzione test in ogni palla $B(x_0, r(x_0))$. La scelta oculata dei raggi $r(x_0)$ ed un controllo attento delle costanti coinvolte consentono infine di usare un argomento di ricoprimento per passare da stime locali a stime globali. Una volta provato (2), si ottiene facilmente la chiusura dell'operatore $(A, \mathcal{D}_p)$ in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$. Essendo tale operatore anche dissipativo e densamente definito, per applicare il teorema classico di generazione di Hille-Yosida, resta solo da verificare la suriettività di $\lambda - A$ in $\mathcal{D}_p$, per λ abbastanza grande. Ciò si dimostra con un argomento di approssimazione.

Quanto esposto è contenuto anche nell'articolo [2].

3. – Stime gradiente in problemi parabolici in spazi di funzioni continue.

Un altro problema affrontato nella tesi è stato quello di stabilire risultati di esistenza, unicità e regolarità per le soluzioni del seguente problema di Cauchy-Neumann

$$\begin{cases} u_t(t,x) - Lu(t,x) = 0 & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(t,x) = 0 & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = f(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

dove Ω è un aperto illimitato convesso con bordo regolare, η è la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, f è una funzione continua e limitata in $\overline{\Omega}$, $L = \sum_{i,j=1}^{N} q_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} F_i D_i - V$. I coefficienti di L sono funzioni di classe $C^{1+a}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Ancora una volta, richiediamo una condizione di ellitticità uniforme per i coefficienti q_{ij}, che ora possono anche essere illimitati. In più, le ipotesi essenziali sono una condizione di dissipatività per il drift F, un limite dal basso ed una crescita al più esponenziale per il potenziale V e l'esistenza di una funzione di Liapunov che assicura la validità di un principio del massimo.

Per provare che esiste un'unica soluzione classica limitata del problema (3), procediamo per approssimazione, considerando una successione di aperti limitati, convessi e regolari $\{\Omega_n\}_n$, che invadono Ω e tali che $\partial\Omega \subset \cup_n \partial\Omega_n$. Ristretto ad ogni aperto Ω_n, l'operatore L è uniformemente ellittico a coefficienti limitati e regolari, pertanto, dalla teoria classica, esiste un'unica soluzione u_n del problema (3) in Ω_n. A questo punto è fondamentale provare che, per ogni $T > 0$, esiste una costante

$C_T > 0$, tale che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$

$$|\nabla u_n(t,x)| \le \frac{C_T}{\sqrt{t}} \|f\|_\infty \qquad 0 < t \le T,~x \in \overline{\Omega}_n. \tag{4}$$

Tale stima si dimostra attraverso il metodo di Bernstein: posto $z_n = u_n^2 + at|\nabla u_n|^2$, si fa vedere che esiste un valore del parametro $a > 0$ indipendente da n, tale che $(D_t - L)u_n \le 0$ in $]0,T[\times \Omega_n$. Poi, dato che l'aperto Ω_n è convesso e dato che u_n ha derivata normale nulla al bordo di Ω_n, si dimostra che z_n ha derivata normale non positiva su $\partial\Omega_n$ (questo è il punto cruciale). Infine, il classico principio del massimo parabolico produce la stima (4).

A questo punto, le classiche stime di Schauder permettono di provare che la successione (u_n) converge ad una soluzione classica limitata u di (3) in tutto Ω. La verifica della continuità di u in $\{0\} \times \partial\Omega$ tiene conto in modo essenziale delle stime (4). Infine la stessa funzione limite soddisfa

$$|\nabla u(t,x)| \le \frac{C_T}{\sqrt{t}} \|f\|_\infty \qquad 0 < t \le T,~x \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

con la stessa costante C_T. In virtù dell'unicità di u, ha senso porre $P_t f(x) = u(t,x)$, dando luogo, in tal modo, ad un semigruppo *non* fortemente continuo di operatori lineari e limitati in $C_b(\overline{\Omega})$. Per un siffatto semigruppo, la nozione di generatore classico può essere sostituita da quella di *generatore debole*, dovuta a E. Priola. Grazie alla stima gradiente (5), siamo in grado di provare che il dominio dell'operatore L, dato da $D(L) = \Big\{ u \in C_b(\overline{\Omega}) \cap \bigcap_{1 \le p < \infty} W^{2,p}(\Omega \cap B(0,R))$ for all $R > 0 :$ $: Lu \in C_b(\overline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial \eta}\big|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}$ è immerso con continuità nello spazio delle funzioni di classe C^1 in $\overline{\Omega}$ limitate con le loro derivate prime. Ciò rappresenta un risultato di regolarità parziale per le soluzioni dell'equazione $\lambda u - Lu = f$, con $f \in C_b(\overline{\Omega})$ e con $\frac{\partial u}{\partial \eta}\big|_{\partial\Omega} = 0$. Quanto descritto fa parte anche del lavoro [1], mentre [3] tratta stime gradiente per problemi con condizioni di Dirichlet.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERTOLDI M. e FORNARO S., *Gradient estimates in parabolic problems with unbounded coefficients*, Studia Mathematica, **5** (2004), 221-254.

[2] CUPINI G. e FORNARO S., *Maximal regularity in $L^p(\boldsymbol{R}^N)$ for a class of elliptic operators with unbounded coefficients*, Differential and Integral equations, **17** (2004), 259-296.

[3] FORNARO S., METAFUNE G. e PRIOLA E., *Gradient estimates for Dirichlet parabolic problems in unbounded domains*, Journal of Differential Equations, **205** (2004), 329-353.

Dipartimento di Matematica «E. De Giorgi», Università degli Studi di Lecce
e-mail: simona.fornaro@unile.it
Dottorato di ricerca in Matematica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Lecce) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Metafune, Università degli Studi di Lecce