Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Curi

Geometria delle osservazioni. Alcuni contributi alla topologia senza punti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 517–520.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_517_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 517-520

Geometria delle osservazioni. Alcuni contributi alla topologia senza punti

GIOVANNI CURI

Topologia «senza punti», o teoria dei locale.

Un *frame* (o *locale*, o algebra di Heyting completa) [1, 2] è un reticolo completo L che soddisfa la seguente legge di completa distributività:

$$a \wedge \bigvee_{i \in J} b_i = \bigvee_{i \in J} (a \wedge b_i),$$

per ogni elemento a in L ed ogni famiglia $\{b_i\}_{i \in J}$ di elementi di L. Il reticolo degli aperti di uno spazio topologico costituisce un esempio (il principale) di frame.

Un *omomorfismo* di frame è una mappa $f : L_1 \to L_2$ che preserva $\bigvee$ (*sup* arbitrari), e $\wedge$ (*inf* finiti). Data una funzione continua tra due spazi topologici X_1, X_2, la funzione inversa definisce un omomorfismo $f^{-1} : \Omega(X_2) \to \Omega(X_1)$ tra i frame degli aperti di X_2 e X_1.

Con questa nozione di omomorfismo, i frame formano la categoria **Frm**. La categoria opposta $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathbf{op}}$ è detta categoria dei locale (le mappe di locale sono dette suggestivamente funzioni continue). Lo studio sistematico di queste categorie inizia in Isbell [1] (si vedano anche [2, 3]).

Non ogni frame è il reticolo degli aperti di uno spazio topologico; ogni algebra di Boole completa non atomica, ad esempio, non lo è [2]. Un frame che sia isomorfo al frame degli aperti di uno spazio topologico è detto *spaziale* (o avere abbastanza punti).

I punti di uno spazio topologico X possono essere identificati con le funzioni continue dallo spazio con un solo punto ad X. Ciò conduce a definire *punto* di un frame ogni omomorfismo $f : L \to \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ il frame degli aperti dello spazio con un solo punto. Esiste una corrispondenza biunivoca tra queste mappe ed i filtri completamente primi su L (i.e., filtri F tali che, se $\bigvee U \in F$, allora $a \in F$ per qualche $a \in U$). Dato un frame L, il suo *spettro* è lo spazio topologico $(\Sigma(L), \{\Sigma_a : a \in L\})$, dove $\Sigma(L)$ è la collezione dei filtri completamente primi su L e $\Sigma_a \equiv \{F \in \Sigma(L) : a \in F\}$.

La costruzione dello spettro di un frame conduce all'aggiunzione

$$\Omega \dashv \Sigma$$

dove $\Omega : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ è il funtore che assegna ad ogni spazio topologico il suo frame degli aperti, e ad ogni funzione continua la sua inversa come omomorfismo di frame; $\Sigma : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ associa al frame L il suo spettro $\Sigma(L)$, e ad una mappa di locale $f : L \to L'$ (i.e. ad un omomorfismo di frame $f : L' \to L$), la funzione continua $f^p : \Sigma(L) \to \Sigma(L')$ che manda il filtro completamente primo F in $f^p(F) = \{b \in L' : f(b) \in F\}$.

Uno spazio topologico X è detto *sobrio* se i punti di X corrispondono biiettivamente ai filtri completamente primi su $\Omega(X)$. In questa situazione, X è omeomorfo a $\Sigma(\Omega(X))$.

L'aggiunzione descritta si restringe allora ad una equivalenza tra la sottocategoria piena degli spazi topologici sobri e la sottocategoria piena dei locale spaziali. Ciò spiega in che senso la categoria dei locale fornisca una generalizzazione della categoria degli spazi topologici: ogni spazio topologico di Hausdorff è (classicamente) sobrio (anche costruttivamente, $\Sigma(\Omega(X))$ definisce la riflessione sobria dello spazio X.

La teoria dei locale rende simultaneamente utilizzabili tecniche algebriche, topologiche, e logico-matematiche. Consente inoltre di ottenere, senza ricorso a principi di scelta, versioni frame-teoretiche di risultati come il teorema di Tychonoff [2], la compattificazione di Stone-Čech, o il teorema di Hahn-Banach [4] (1). Questa caratteristica rende in particolare la teoria dei locale più adatta alle applicazioni rispetto alla topologia ordinaria, in specie alla formalizzazione in contesti computazionali. Per la stessa ragione, essa fornisce la nozione di «topologia» generalmente adottata in contesti topos-teoretici [3], nei quali né principi di scelta, né il principio del terzo escluso, possono essere assunti. I frame costitutiscono comunque, anche nell'ambito set-teoretico tradizionale, una categoria più soddisfacente rispetto alla categoria degli spazi topologici usuale.

La tesi.

La ricerca illustrata nella tesi si situa nel contesto descritto. Oltre agli assiomi di scelta, ed al principio del terzo escluso, come ricordato non disponibili nel contesto di un topos generico, non sono considerati validi principi che consentano definizioni impredicative, come l'assioma delle parti. Molto sommariamente, l'assioma delle parti è considerato come principio non costruttivo perchè l'insieme di cui asserisce l'esistenza non può essere generato in modo effettivo. Applicazioni di questo assioma vengono sostituite da definizioni induttive (eventualmente generalizzate, del genere della definizione degli ordinali ricorsivi di Kleene).

I risultati ottenuti in un contesto di assunzioni così indebolito hanno un carattere fortemente effettivo (ad un risultato che asserisca l'esistenza di un certo oggetto corrisponde una procedura effettiva per ottenerlo), ed una validità assai più generale dei risultati ottenuti sulla base della teoria degli insiemi ordinaria. In particolare, oltre che nei topoi, il materiale presentato nella tesi può essere formulato all'interno della teoria costruttiva dei tipi di Martin-Löf, ed in larga parte nella teoria costruttiva degli insiemi di Aczel-Myhill.

Sulla base di queste assunzioni, è più conveniente utilizzare la presentazione della categoria dei locale in [5]; un locale è qui descritto come una topologia formale (o spazio formale, nella tesi i due termini stanno il primo al secondo come «frame» sta a

(1) Nella formulazione usuale, ciascuno di questi risultati richiede necessariamente, o è equivalente a, principi come il lemma di Zorn o il teorema dell'ideale primo [2].

«locale»). In estrema sintesi, una topologia formale è una struttura che genera il frame in modo analogo a quello in cui, in algebra universale, generatori e relazioni descrivono una determinata struttura algebrica (in termini più geometrici, la nozione di spazio formale caratterizza assiomaticamente il concetto di base *per* un locale).

Quanto fin qui riassunto compare per esteso nel capitolo introduttivo della tesi. Il secondo capitolo riguarda la categoria degli spazi formali in generale. Si discutono in particolare alcune differenze generali riscontrabili tra la categoria in analisi, considerata nell'ambiente costruttivo indicato, e la manifestazione della categoria dei locale nei topoi, differenze indotte dall'aver adottato solo principi costruttivamente validi; dopo aver ricordato alcuni risultati noti, si sviluppano alcuni strumenti di base (la nozione di sotto-spazio formale, corrispondente alla nozione di nucleo di un frame, e risultati generali connessi). Nello stesso capitolo si discutono alcune proprietà di separazione, la compattezza locale, e si presenta lo spazio di funzioni.

A differenza di quanto avviene in ambito classico o topos-teoretico, nei contesti costruttivi menzionati la categoria dei locale/spazi formali non è localmente piccola (esistono classi di funzioni continue $hom(X, Y)$ tra due spazi formali che non formano un insieme). Come mostrano in particolare i risultati nel capitolo quarto, si tratta di una differenza cruciale. Il terzo capitolo individua dunque alcune condizioni sotto le quali $hom(X, Y)$ forma un insieme; in particolare si prova che la classe $hom(X, [0,1])$ è un insieme per ogni locale X localmente compatto.

Il quarto capitolo introduce una compattificazione. Dato un locale X e qualunque famiglia indiciata di funzioni continue $\{f_i\}_{i\in I}, f_i : X \to X_i$, con X_i compatto e completamente regolare per ogni i, si costruisce una compattificazione $(X_\gamma, \eta : X \to X_\gamma)$ con le proprietà seguenti:

i) quando X è completamente regolare η è un immersione densa;

ii) ogni funzione in $\mathcal{F}$ ha un unica «estensione» a X_γ: per ogni f_i, esiste un'unica $\bar{f}_i$, con

$$\bar{f}_i \circ \eta = f_i;$$

iii) sulla base della teoria degli insiemi ordinaria, il peso di X_γ è inferiore alla somma del peso di X e dei pesi di X_i.

In presenza di principi come il lemma di Zorn questa compattificazione restituisce una compattificazione degli spazi topologici con proprietà corrispondenti.

Si ottiene la compattificazione di Stone-Čech come caso particolare di questa costruzione in quei contesti (come la teoria degli insiemi ordinaria, o più in generale, la teoria dei topoi) in cui la classe $Hom(X, [0,1])$ è piccola per ogni X. Questo segue dall'aver provato che – corrispondentemente a quanto avviene nella categoria degli spazi topologici – l'esistenza dell'estensione delle mappe a valori in $[0,1]$ (proprietà *ii*), implica l'esistenza dell'analoga estensione delle mappe a valori in qualunque locale compatto e completamente regolare (i.e. la riflessione compatta e completamente regolare della categoria dei locale).

La tecnica descritta, insieme ai risultati del capitolo terzo, consente quindi di caratterizzare i locale/spazi formali X per i quali la compattificazione di Stone-Čech

$\beta(X)$ esiste costruttivamente: $\beta(X)$ esiste se e soltanto se la classe $Hom(X, [0,1])$ è piccola. In particolare dunque la compattificazione di Stone-Čech esiste per ogni spazio formale localmente compatto.

Si osserva come questo risultato sveli la misura in cui l'assunzione dell'assioma delle parti (o di altri principi impredicativi) separi la teoria degli insiemi dalla pratica matematica, nascondendo connesioni profonde, ed annullando distinzioni rilevanti.

Le relazioni di «way-below», «well inside» e «really inside», usate nella formulazione frame-teoretica delle nozioni di compatezza locale, regolarità e completa regolarità rispettivamente [2], forniscono diverse formalizzazioni dell'idea che un certo intorno sia propriamente «più preciso» (finer than), o costituisca una approssimazione migliore, di un altro intorno. Introducendo la nozione di diametro elementare (capitolo quinto), si riesce ad esprimere quantitativamente questo concetto nella forma delle relazioni di «measurably inside» e «uniformly inside» (nei capitoli quinto e sesto, rispettivamente); queste relazioni permettono di esprimere la metrizzabilità e l'uniformizzabilità per i locale/spazi formali in contesti topos-teoretici e costruttivi. Risultati di metrizzazione ed uniformizzazione si ottengono quindi mettendo tra loro in relazione le menzionate differenti formulazioni del concetto di «finer than».

Nei capitoli quinto e sesto si definiscono inoltre categorie naturali di spazi formali metrici ed uniformi. In questa contesto «senza punti» si può dimostrare un teorema di uniforme continuità effettivo in tutta generalità, laddove la versione usuale non può essere ottenuta ricorsivamente (2). Queste nozioni conducono infine anche a risultati effettivi di esistenza di filtri completamente primi. Un frame può essere visto come l'algebra di Lindenbaum di una teoria geometrica proposiozionale T [3]; i punti di un frame corrispondono allora ai modelli di T. La costruzione effetiva di un punto corrisponde quindi all'esibire un modello effettivo della teoria T.

BIBLIOGRAFIA

[1] Isbell J. R., *Atomless parts of spaces*, Math. Scand., **31** (1972), 5-32.

[2] Johnstone P. T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press (1982).

[3] MacLane S., Moerdijk I., *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory*, Springer (1992).

[4] Mulvey C. J., Pelletier J. W., *A globalization of the Hahn-Banach theorem*, Advances in Mathematics, **89** (1991), 1-60.

[5] Sambin G., *Some points in formal topology*, Theor. Comp. Science, **305** (2003), 347-408.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: gcuri@math.unipd.it
Dottorato in logica matematica ed informatica teorica (sede amministrativa: Dipartimento di Matematica «Roberto Magari», Università di Siena) - Ciclo XV

(2) La prova richiede il teorema del ventaglio (classicamente il lemma di König), dimostrato da S. Kleene non essere ricorsivamente valido.