Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Cuoghi

Disuguaglianze di tipo Brunn-Minkowski per funzionali variazionali collegati all'operatore p-laplaciano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 509–512.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_509_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 509-512

Disuguaglianze di tipo Brunn-Minkowski per funzionali variazionali collegati all'operatore *p*-laplaciano

PAOLA CUOGHI

1. – La Disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

Il lavoro svolto ha come punto di riferimento la disuguaglianza di Brunn-Minkowski, risultato fondamentale nella Teoria dei Corpi Convessi. Lo scopo della tesi è stato quello di provare disuguaglianze analoghe a quella di Brunn-Minkowski per alcuni funzionali del Calcolo delle Variazioni.

Siano K_0, K_1 corpi convessi di $\boldsymbol{R}^n$, cioè insiemi convessi, compatti e con interno non vuoto. Per ogni $t \in [0,1]$, definiamo il corpo convesso

$$K_t = (1-t)K_0 + tK_1 = \{(1-t)x_0 + tx_1 \,:\, x_i \in K_i,\, i = 0,1\}.$$

Indicata con $V_n(\,\cdot\,)$ la misura n-dimensionale di Lebesgue, vale il seguente

TEOREMA 1.1 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski.) – *Dati K_0 e K_1 corpi convessi in $\boldsymbol{R}^n$, allora, per ogni $t \in [0,1]$,*

$$[V_n((1-t)K_0 + tK_1)]^{1/n} \geq (1-t)[V_n(K_0)]^{1/n} + t[V_n(K_1)]^{1/n}. \tag{1}$$

L'uguaglianza vale se e solo se K_0 e K_1 sono tra loro omotetici, cioè sono uguali a meno di dilatazioni e traslazioni.

La stessa disuguaglianza si estende alla classe degli insiemi misurabili (anche se in questo caso non è garantita la misurabilità della loro combinazione lineare alla Minkowski). In pratica, la disuguaglianza di Brunn-Minkowski afferma che il volume, elevato al reciproco del suo grado di omogeneità, risulta concavo nella classe degli insiemi misurabili.

Il campo di applicazione di tale disuguaglianza non rimane confinato alla Teoria dei Corpi Convessi; infatti negli ultimi trent'anni sono stati provati collegamenti con alcune disuguaglienze fondamentali del Calcolo delle Variazioni, quali la disuguaglianza di Sobolev e quella isoperimetrica. Di particolare interesse sono inoltre i legami, emersi recentemente, con il trasporto di massa. Una rassegna esauriente dedicata alla disuguaglianza di Brunn-Minkowski è la monografia [3].

Diciamo che un opportuno funzionale di insieme F, positivamente omogeneo di un certo grado $a \neq 0$ rispetto alle dilatazioni, soddisfa ad una *disuguaglianza di tipo Brunn-Minkowski* se vale la (1), dove al posto di V_n si sostituisce F e al posto di $1/n$ si scrive $1/a$.

Oltre che per il volume, questa disuguaglianza vale per la misura $(n-1)$-dimensionale del bordo e per tutti gli altri *volumi intrinseci* o *quermassintegrals*, funzionali tipici della teoria dei corpi convessi, definiti in termini delle funzioni simmetriche elementari delle curvature principali. Un'altra classe di funzionali per cui vale una disuguaglianza di questo tipo si incontra nel Calcolo delle Variazioni: tra questi ricordiamo il primo autovalore del laplaciano, la capacità elettrostatica (e più in generale la p-capacità), la capacità logaritmica bidimensionale, la rigidità di torsione e l'autovalore dell'operatore di Monge-Ampère.

Il lavoro svolto è stato quello di provare una disuguaglianza analoga per altri funzionali, più generali di quelli ora menzionati.

2. – Risultati Principali.

Dato un sottoinsieme aperto Ω di $\boldsymbol{R}^n$, $p > 1$ e $u : \Omega \to \boldsymbol{R}$ sufficientemente regolare, il p-laplaciano di u è definito da

$$\Delta_p u = \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Si tratta di un operatore ellittico degenere (nei punti in cui $\nabla u = 0$).

I funzionali che consideriamo sono definiti tramite opportuni problemi al contorno per l'operatore Δ_p, con condizioni di Dirichlet. Il fatto che l'operatore sia in forma di divergenza fa sì che le soluzioni di questi problemi siano anche dei punti di minimo per funzionali integrali in cui compare il termine $\int_\Omega |\nabla u|^p$.

2.1. – *La Costante di Poincaré.*

Sia K un corpo convesso, con bordo di classe C^2. Detto Ω l'interno di K, la costante di Poincaré di K è

$$\lambda(K) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p dx}{\int_\Omega |v|^p dx} \, : \, v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \int_\Omega |v|^p dx > 0 \right\}, \tag{2}$$

dove $W_0^{1,p}$ indica la classe delle funzioni reali definite in Ω, con derivate prime deboli in $L^p(\Omega)$ e nulle al bordo. L'estremo inferiore della precedente uguaglianza è in realtà un minimo e le funzioni minimizzanti sono le soluzioni del seguente problema agli autovalori

$$\begin{cases} \Delta_p u = -\lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

La costante di Poincaré è positivamente omogenea di grado $-p$ rispetto alle dilatazioni del corpo stesso.

TEOREMA 2.1. – *Siano K_0 e K_1 corpi convessi in $\boldsymbol{R}^n$ con bordo di classe C^2 e sia $p > 1$. Per ogni $t \in [0,1]$, posto $K_t = (1-t)K_0 + tK_1$, vale la seguente disuguaglianza:*

$$[\lambda(K_t)]^{-1/p} \geq (1-t)[\lambda(K_0)]^{-1/p} + t[\lambda(K_1)]^{-1/p}. \tag{3}$$

Per quanto riguarda il caso dell'uguaglianza invece:

PROPOSIZIONE 2.1. – *Siano* K_0 *e* K_1 *corpi convessi in* $\boldsymbol{R}^n$ *con bordo di classe* C^2 *tali che valga l'uguaglianza in (2.1) e una delle due condizioni seguenti:*

1) $n = 2$;

2) K_0 *e* K_1 *sono corpi convessi di classe* $C^{2,+}$ *(cioè in ogni punto del bordo le curvature principali sono strettamente positive).*

Allora K_0 *e* K_1 *sono omotetici.*

Il Teorema 2.1, nel caso particolare del primo autovalore del laplaciano ($p = 2$), è dovuto a Brascamp e Lieb [2].

2.2. – *La Capacità Logaritmica n-dimensionale.*

Sia K un corpo convesso di $\boldsymbol{R}^n$, tale che l'origine appartenga all'interno di K. Consideriamo il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_n u = 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^n \backslash K \\ u = 0 & \text{su } \partial K \\ u(x) \sim \ln|x| & \text{per } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Questo problema ammette un'unica soluzione u, detta *potenziale di equilibrio* di K; inoltre è univocamente determinata la costante $a \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\lim_{|x| \to +\infty} (u(x) - \ln|x|) = a.$$

DEFINIZIONE 2.1. – *La capacità logaritmica del corpo convesso* K *è il numero*

$$c(K) = e^{-a}.$$

La capacità logaritmica è positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle dilatazioni.

TEOREMA 2.2. – *Siano* K_0 *e* K_1 *corpi convessi di* $\boldsymbol{R}^n$. *Per ogni* $t \in [0,1]$, *posto* $K_t = (1-t)K_0 + tK_1$, *vale la seguente disuguaglianza*

$$c(K_t) \geq (1-t)c(K_0) + tc(K_1).$$

L'uguaglianza vale se e solo se K_0 *e* K_1 *sono omotetici.*

La Definizione 2.1 estende quella di capacità logaritmica a dimensioni maggiori di 2 (il caso $n = 2$ era l'unico noto in letteratura fino ad oggi, se si eccettuano nozioni analoghe presenti nella teoria delle funzioni di più variabili complesse). Osserviamo anche che il Teorema 2.2, nel caso $n = 2$, era stato provato da Pommerenke [4], e successivamente da Borell (1984).

2.3. – *La p-Rigidità di Torsione.*

Sia K un corpo convesso e sia Ω il suo interno. La p-rigidità di Torsione $\tau(K)$ di K è data dalla seguente formula:

$$\frac{1}{\tau(K)} = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla w(x)|^p dx}{\left[\int_\Omega |w(x)|dx\right]^p}, : w \in W_0^{1,p}, \int_\Omega |w(x)|dx > 0 \right\}. \tag{5}$$

Tale estremo inferiore è raggiunto in corrispondenza dell'unica soluzione u di

$$\begin{cases} \Delta_p u = -1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

e delle funzioni cu, con $c \neq 0$. Si deriva inoltre che τ è omogenea di grado $p + n(p-1)$ rispetto alle dilatazioni del corpo.

TEOREMA 2.3. – *Siano K_0 e K_1 corpi convessi di $\boldsymbol{R}^n$. Per ogni $t \in [0,1]$, posto $K_t = (1-t)K_0 + tK_1$, vale la seguente disuguaglianza*

$$[\tau(K_t)]^{1/[p+n(p-1)]} \geq (1-t)[\tau(K_0)]^{1/[p+n(p-1)]} + t[\tau(K_1)]^{1/[p+n(p-1)]}.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se K_0 e K_1 sono omotetici.

Il risultato per la rigidità di torsione ($p = 2$), di cui la p-rigidità è un'estensione, è stato dimostrato da Borell in [1].

Per concludere, osserviamo che le dimostrazioni dei Teoremi 2.1, 2.2 e 2.3 richiedono tecniche diverse tra loro, analoghe tuttavia a quelle usate per dimostrare risultati di concavità, o quasi-concavità, per soluzioni di equazioni ellittiche.

Inoltre, si può osservare che, nei casi in cui sono state determinate, le condizioni per il caso dell'uguaglianza sono sempre le stesse della disuguaglianza classica, cioè i corpi devono essere tra loro omotetici. Si congettura che siano le stesse anche nei casi non ancora risolti.

BIBLIOGRAFIA

[1] BORELL C., *Greenian potentials and Concavity*, Math. Ann., **272** (1985), 155-160.

[2] BRASCAMP H. J. e LIEB E. H., *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Funct. Anal., **22** (1976), 366-389.

[3] GARDNER R. J., *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **39** n. 3, (2002), 355-405.

[4] POMMERENKE C., *Über die kapacität der summe von continuen*, Math. Ann., **85** (1959), 127-132.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata «G. Vitali»,
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
e-mail: pcuoghi@unimo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Modena) - Ciclo XVI
Direttori di Ricerca: Prof. Stefano Campi, Università di Modena,
Prof. Andrea Colesanti, Università di Firenze