Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ilaria Cardinali

Flock generalized quadrangles e fibrazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 477–480.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_477_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 477-480

Flock generalized quadrangles e fibrazioni

ILARIA CARDINALI

Gli argomenti trattati si inquadrano nell'ambito delle geometrie finite, cioè di quelle geometrie che si possono costruire a partire da campi di ordine finito. In particolare, l'interesse è rivolto principalmente alla teoria dei *flock su semicorpo*, che risulta a sua volta strettamente connessa a numerose altre teorie, tra cui la teoria dei *quadrangoli generalizzati di traslazione*, degli *ovoidi di traslazione di* $Q(4, q)$, dei *good eggs*, delle *fibrazioni di* $PG(3, q)$. Oltre ai flock su semicorpo, l'interesse è rivolto verso lo studio sia delle fibrazioni di traslazione dell'esagono generalizzato classico sia di particolari fibrazioni della quadrica ellittica dello spazio proiettivo 5-dimensionale $PG(5, q)$. La prima sezione che segue è dedicata ai flock su semicorpo mentre la seconda alle fibrazioni.

Per motivi di spazio, rimando alla stesura completa della tesi di dottorato per la maggior parte dei riferimenti bibliografici e per quelle definizioni e costruzioni che non verranno richiamate.

1. – Flock su semicorpo.

Sia $PG(3, q)$ lo spazio proiettivo di dimensione 3 costruito sul campo finito $GF(q)$.

DEFINIZIONE 1. – *Un flock del cono quadratico di* $PG(3, q)$ *è una partizione dell'insieme dei punti del cono tranne il vertice, in* q *coniche a due a due disgiunte.*

A partire da un flock del cono quadratico, è possibile ottenere una fibrazione di $PG(3, q)$ e quindi, dalla costruzione di André, Bruck-Bose, un piano di traslazione. Se la fibrazione di $PG(3, q)$ corrispondente a un flock dà origine a un piano di traslazione coordinatizzato da un *semicorpo* allora il flock si dice *flock su semicorpo.*

La classificazione dei flock su semicorpo è tuttora un problema aperto. Al momento, la situazione è la seguente, che si differenzia sostanzialmente a seconda della caratteristica del campo in cui lavoriamo: se la caratteristica del campo è pari, allora tutti i flock sono *lineari*. Nel caso in cui la caratteristica del campo è dispari, vi sono tre famiglie infinite: i flock lineari; i *flock di Kantor-Knuth*; i *flock di Ganley,* questi ultimi esistono solo per campi di caratteristica 3. In aggiunta a queste famiglie infinite esiste per $q = 3^5$ un esempio sporadico che è stato trovato sfruttando il legame tra flock su semicorpo e *ovoidi di traslazione di* $Q(4, q)$ e del quale era nota solo una descrizione algebrica. (Si veda la tesi per i riferimenti bibliografici di ognuna di queste famiglie).

DEFINIZIONE 2. – *Un ovoide di* $Q(4,q)$ *è un insieme di* q^2+1 *punti di* $Q(4,q)$ *avente esattamente un punto in comune con ogni retta di* $Q(4,q)$.

Un ovoide di $Q(4,q)$ si dice di *traslazione* rispetto a un punto x se esiste un gruppo di collineazioni di $Q(4,q)$ che fissa tutte le rette per x ed è strettamente transitivo sui punti dell'ovoide diversi da x. Per q pari ogni ovoide di traslazione di $Q(4,q)$ è una quadrica ellittica [3]. Per q dispari, ovoidi di traslazione di $Q(4,q)$ e flock su semicorpo sono oggetti equivalenti. Sfruttando il legame tra ovoidi di $Q(4,q)$ e flock su semicorpo, ognuna delle famiglie di flock sopra descritte dà luogo ad un ovoide di traslazione di $Q(4,q)$. Schematicamente, la situazione è la seguente:

$\mathcal{O}(\mathcal{F})$: quadrica ellittica	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{F}$: flock lineare;
$\mathcal{O}(\mathcal{F})$: Kantor-Knuth ovoide	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{F}$: Kantor-Knuth semifield flock;
$\mathcal{O}(\mathcal{F})$: Payne-Thas ovoide	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{F}$: Ganley semifield flock;
$\mathcal{O}(\mathcal{F})$: Penttila-Williams ovoide	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{F}$: semifield flock sporadico di ordine 3^5.

Altra connessione da ricordare, utile per enunciare il contributo originale apportato in questo settore è data dal legame tra flock e BLT-set.

DEFINIZIONE 3. – *Un BLT-set di* $Q(4,q)$, *q dispari, è un insieme di* $q+1$ *punti di* $Q(4,q)$ *con la proprietà che nessun punto della quadrica è collineare* (*in* $Q(4,q)$) *con più di due punti di* $Q(4,q)$.

A ogni punto di un BLT-set in $Q(4,q)$ corrisponde un flock del cono quadratico in $PG(3,q)$. Viceversa, ad un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$ corrisponde un BLT-set. Alla luce di questo legame, è stato possibile ottenere in [2] una descrizione geometrica del flock sporadico. Più precisamente, il BLT-set associato al flock su semicorpo sporadico si può ottenere come intersezione completa degli ovoidi di Payne-Thas e Kantor-Knuth della quadrica $Q(4,3^5)$. Come corollario, avvalendosi del legame tra flock e ovoidi di traslazione, è stato possibile ottenere una descrizione completamente geometrica dell'ovoide di Pentilla-Williams.

2. – Fibrazioni.

Sia $H(q)$ uno Split-Cayley esagono. Seguendo la costruzione di Tits, $H(q)$ è definito come l'insieme di punti e rette assolute di una quadrica non-singolare $Q(6,q)$ dello spazio $PG(6,q)$. Due punti di $H(q)$ si dicono *opposti* se sono a distanza 6 nel grafo di incidenza di $H(q)$ o, equivalentemente, se non sono collineari come punti di $Q(6,q)$.

Due rette di $H(q)$ si dicono *opposte* se e solo se ogni piano singolare di $Q(6,q)$ per ciascuna di esse, è disgiunto dall'altra.

DEFINIZIONE 4. – *Un ovoide [fibrazione] di* $H(q)$ *è un insieme di* q^3+1 *punti [rette] di* $H(q)$ *a due a due opposti.*

Un ovoide di $H(q)$ definisce un ovoide di $Q(6,q)$ mentre una fibrazione di $H(q)$ definisce un *1-sistema di* $Q(6,q)$, cioè un insieme $\mathcal{S}$ di q^3+1 rette di $Q(6,q)$ tale che ogni piano di $Q(6,q)$ contenente un elemento di $\mathcal{S}$ ha intersezione vuota con ogni altro elemento di $\mathcal{S}$.

Sia $\mathcal{S}$ una fibrazione di $H(q)$ e L una retta fissata di $\mathcal{S}$. Per ogni retta M di $\mathcal{S}$, il sottospazio $\langle L,M\rangle$ generato da L e M, ha dimensione proiettiva 3 e interseca $Q(6,q)$ in una quadrica iperbolica non-singolare $Q^+(3,q)$. Sia $\mathcal{R}_{L,M}$ il regolo di $\langle L,M\rangle \cap Q(6,q)$ contenente le rette L e M.

DEFINIZIONE 5. – *La fibrazione* $\mathcal{S}$ *si dice localmente hermitiana rispetto a* L *se* $\mathcal{R}_{L,M} \subseteq \mathcal{S}\ \forall M \in \mathcal{S}\setminus\{L\}$. *La fibrazione* $\mathcal{S}$ *si dice hermitiana se è localmente hermitiana rispetto a tutte le rette di* $\mathcal{S}$.

Sia x un punto fissato di $Q(6,q)$ e sia Γ_x lo spazio polare i cui *punti* sono le rette di $Q(6,q)$ passanti per x e le cui *rette* sono i piani di $Q(6,q)$ passanti per x. Per costruzione, $\Gamma_x \simeq Q(4,q)$.

Se $\mathcal{S}$ è un 1-sistema localmente hermitiano rispetto a L e x è un punto di L allora l'insieme $\mathcal{O}_x$ delle rette i cui elementi sono L e le trasversali per x dei regoli di $\mathcal{S}$ contenenti L, è un ovoide di $\Gamma_x \simeq Q(4,q)$[4]. L'ovoide $\mathcal{O}_x$ è chiamato *proiezione lungo i regoli di* $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{O}_x$ è una quadrica ellittica per ogni punto x di L, l'1-sistema si dice *semiclassico.*

Sia L una retta della fibrazione e E^L il gruppo di automorfismi di $H(q)$ generato da quelle collineazioni che fissano L puntualmente e stabilizzano tutte le rette per un punto di L.

DEFINIZIONE 6. – *Un fibrazione* $\mathcal{S}$ *di* $H(q)$ *si dice di traslazione rispetto alla coppia* (x,L) *se esiste un sottogruppo* $E_{x,L}$ *di* E^L *che stabilizza* $\mathcal{S}$ *ed agisce transitivamente sulle rette di* $\mathcal{S}$ *a distanza* 4 *da* M, *per ogni retta* M *passante per* x *e distinta da* L. *Un fibrazione* $\mathcal{S}$ *di* $H(q)$ *si dice di traslazione rispetto alla retta* L *se è di traslazione rispetto alla coppia* $(x,L)\ \forall x \in L$.

Tutte le fibrazioni di traslazione di $H(2^r)$ sono semiclassiche.

Sfruttando la rappresentazione di $H(q)$ come geometria dei laterali, abbiamo ottenuto una caratterizzazione delle fibrazioni di traslazione di $H(q)$ in termini di punti di $PG(3,q)$ che appartengono a corde immaginarie di una cubica sghemba. Questo ambiente di lavoro ha consentito la costruzione di un nuovo esempio di fibrazione semiclassica nel caso di q pari e $q \equiv 1 \pmod 3$ [3].

Continuando lo studio delle fibrazioni di spazi polari, l'attenzione si sposta alle fibrazioni hermitiane della quadrica ellittica $Q^-(5,q)$. Basandoci su una costruzione canonica che permette di ottenere fibrazioni di $PG(3,q)$ partendo da fibrazioni localmente hermitiane di $Q^-(5,q)$ e viceversa, è stato possibile costruire esempi di fibrazioni localmente hermitiane, non hermitiane, di $Q^-(5,q)$ ([3]). Questi esempi consentono di «colmare» il gap presente nella classificazione degli 1-sistemi semiclassici localmente hermitiani di $Q(6,q)$ in [4]. Inoltre, se $\mathcal{S}$ è un 1-sistema localmente hermitiano di $Q(6,q)$ che è anche una fibrazione hermitiana di $Q^-(5,q)$, allora la fibrazione associata di $PG(3,q)$ è *regolare*, ma sorprendentemente il viceversa non è vero. In realtà, dimostriamo che se $q > 2$, esistono fibrazioni regolari di $PG(3,q)$ le cui corrispondenti fibrazioni di $Q^-(5,q)$ localmente hermitiane, non sono hermitiane.

Il contributo originale apportato in questo settore consiste nel fornire una caratterizzazione geometrica di quelle fibrazioni regolari di $PG(3,q)$ che inducono fibrazioni hermitiane di $Q^-(5,q)$ ([1]). Più precisamente, le uniche fibrazioni regolari di $PG(3,q)$ corrispondenti a fibrazioni hermitiane di $Q^-(5,q)$, sono quelle le cui trasversali appartengono ai due piani per una retta fissata L, dell'estensione $Q^+(5,q^2)$ di $Q^-(5,q)$. Per ottenere questo risultato si fa uso della dualità tra il quadrangolo generalizzato $Q^-(5,q)$ e il quadrangolo generalizzato $H(3,q^2)$ e si ottiene anche una interessante parametrizzazione di quegli ovoidi di $H(3,q^2)$ aventi un punto speciale.

Nell'ultima parte della tesi vi è una descrizione delle strutture chiamate *herd di ovali* esitenti solo per campi di caratteristica pari e della loro connessione con i *q-clan.*

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Cardinali and R. Trombetti, *On Hermitian spreads*, Bullettin of the Belgian Mathematical Society , **11** (2004), 63-67.

[2] I. Cardinali, O. Polverino and R. Trombetti, *On the sporadic semifield flock*, Designs Codes and Cryptography, **30** (2003), 219-226.

[3] I. Cardinali, G. Lunardon, O. Polverino and R. Trombetti, *Spreads in $H(q)$ and 1-systems of $Q(6,q)$*, Europ. J. Combin., **23** (2002), 367-376.

[4] D. Luyckx and J. A. Thas, *Flocks and locally hermitian 1-systems of $Q(6,q)$*, Finite Geometries, Proceedings of the Fourth Isle of Thorns Conference, **23** (2000), 257-277.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli «Federico II»
e-mail: cardinali3@unisi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. G. Lunardon, Università degli Studi di Napoli«Federico II»