Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Mirella Cappelletti Montano

Problemi di approssimazione per operatori positivi in spazi adattati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 473–476.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_473_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 473-476

Problemi di approssimazione per operatori positivi in spazi adattati

MIRELLA CAPPELLETTI MONTANO

1. – Introduzione.

Con riferimento ad uno spazio localmente compatto e separato X, ad un sottospazio E di funzioni reali e continue su X munito di una topologia localmente convessa τ e ad un prefissato operatore lineare positivo $T : E \to E$, nella presente tesi di dottorato si affrontano diverse questioni legate al problema di determinare condizioni sufficienti affinché, data una arbitraria rete $(L_i)^{\leq}_{i\in I}$ di operatori lineari positivi da E in E, si verifichi

$$\lim_{i\in I^{\leq}} L_i(f) = T(f) \qquad (f \in E). \tag{1}$$

Gli strumenti attraverso i quali si procede allo studio del problema (1) sono essenzialmente quelli tipici della cosiddetta teoria dell'approssimazione *di tipo Korovkin*. Scopo fondamentale di tale teoria, i cui sviluppi più importanti sono documentati nella monografia di F. Altomare e M. Campiti (cfr. [1]) e nelle relative appendici, consiste nel determinare e caratterizzare quei sottoinsiemi H di E, detti *sottoinsiemi di Korovkin* per T, tali che ogni rete $(L_i)^{\leq}_{i\in I}$ di operatori lineari positivi da E in E, che converge a T su H, automaticamente converge a T su E.

Nella tesi si studiano siffatte questioni nel contesto di particolari sottospazi di $C(X,\boldsymbol{R})$ (ove con $C(X,\boldsymbol{R})$ si denota lo spazio delle funzioni reali e continue su X), detti *spazi adattati* (cfr. [4, Vol. II, Ch. 34]).

Nella prima parte della tesi, dopo aver ricordato le principali proprietà degli spazi adattati, si presenta una opportuna classe di proiettori positivi definiti su spazi adattati. Tale studio è suggerito da un problema precedentemente affrontato in [1, Section 3.3]. In [1], infatti, dato uno spazio X compatto e separato, si sono studiati particolari proiettori positivi definiti sullo spazio $C(X,\boldsymbol{R})$, a partire dai quali si è elaborata una articolata teoria che coinvolge processi di approssimazione positivi, semigruppi di Feller e processi di Markov.

Nella presente tesi si pongono le basi per una possibile estensione di parte di siffatta teoria al caso in cui X sia uno spazio localmente compatto e separato. Infatti, si introducono particolari proiettori positivi definiti su spazi adattati, detti *proiettori affini* e per essi si determinano dei sottoinsiemi di Korovkin. I risultati appena citati sono raccolti in [2].

Infine, per avere a disposizione un «*numero*» maggiore di sottoinsiemi di Korovkin, si analizza anche il caso in cui la relazione (1) valga per reti $(L_i)^{\leq}_{i \in I}$ *equicontinue* di operatori lineari positivi; in particolare, si determinano metodi costruttivi per la individuazione di sottoinsiemi di Korovkin (anche finiti) per diverse classi di operatori lineari positivi (cfr. [3]).

2. – Proiettori affini su sottoalgebre adattate di funzioni continue.

Sia X uno spazio localmente compatto e separato; si denoti con $M^+(X)$ (risp., $M_b^+(X)$) il cono delle misure di Borel regolari (risp., regolari e finite) su X. Per ogni $\mu \in M^+(X)$ si denoti, inoltre, con $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ lo spazio delle funzioni reali μ-integrabili su X.

Si consideri ora un sottospazio adattato E di $C(X, \boldsymbol{R})$ e si ponga

$$E_b := \{f \in C(X, \boldsymbol{R}) \mid \text{esiste } h \in E, \ h \geq 0, \ \text{tale che } \ |f| \leq h\}.$$

È facile dimostrare che E_b è uno spazio di Riesz ed è esso stesso uno spazio adattato. D'ora in poi, si supponga E_b munito di una topologia τ indifferentemente scelta tra la topologia τ_s della convergenza puntuale su X, la topologia τ_c della convergenza uniforme sui compatti di X o la topologia τ_o per l'ordine su E_b.

Infine, per ogni $f \in E_b$ si denoti con $\widehat{E}$ lo spazio costituito da quelle funzioni $f \in E_b$, dette funzioni E-*affini*, tali che $\inf\limits_{\substack{h \in E \\ h \geq f}} h = f = \sup\limits_{\substack{k \in E \\ k \leq f}} k$.

DEFINIZIONE 2.1. – *Dicesi proiettore* E-affine *su* E_b *ogni proiettore positivo* $T : E_b \to E_b$ *tale che* $T(E_b) = \widehat{E}$.

D'ora in poi, si assuma che X sia uno spazio localmente compatto, separato e σ-compatto; si supponga, inoltre, che E_b sia una sottoalgebra di $C(X, \boldsymbol{R})$ che contenga le funzioni costanti. In tal caso, si dice che E è una *quasi sottoalgebra* adattata.

Nella prima parte della tesi si presentano varie caratterizzazioni della frontiera di Choquet del rango di proiettori E-affini; si dimostrano, inoltre, condizioni necessarie e sufficienti affinché su una quasi sottoalgebra adattata esista un (unico) proiettore E-affine. Si ha, infatti, il seguente risultato.

TEOREMA 2.2. – *Siano X uno spazio localmente compatto, separato e σ-compatto ed E una quasi sottoalgebra adattata di $C(X, \boldsymbol{R})$ che separa linearmente i punti di X. Si denoti, inoltre, con $\partial_E X$ la frontiera di Choquet di E. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *Esiste uno ed un solo proiettore E-affine $T : E_b \to E_b$;*

(b) *$\partial_E X$ è un chiuso e per ogni $x \in X$ esiste una ed una sola misura $\mu_x \in M_b^+(X)$ concentrata su $\partial_E X$ tale che $E \subset \mathcal{L}^1(X, \mu_x)$ e per ogni $h \in E$*

$$h(x) = \int h \, d\mu_x;$$

(c) *Il problema astratto di Dirichlet associato a* $\partial_E X$ *è risolubile in* E_b*, ovvero per ogni* $f \in E_b$ *esiste una ed una sola* $\tilde{f} \in \widehat{E}$ *tale che* $\tilde{f} = f$ *su* $\partial_E X$*.*

Infine, si determinano sottoinsiemi di Korovkin per proiettori affini.

TEOREMA 2.3. – *Siano* X *uno spazio localmente compatto, separato e* σ*-compatto ed* E *una quasi sottoalgebra adattata di* $C(X,\boldsymbol{R})$ *che separa linearmente i punti di* X*. Si considerino un proiettore* E*-affine* $T : E_b \to E_b$ *ed un sottoinsieme* $\mathcal{U}$ *di* E_b *tale che*

(i) $u \leq T(u)$ *per ogni* $u \in \mathcal{U}$;
(ii) $\partial_E X = \{x \in X \mid T(u)(x) = u(x)$ *per ogni* $u \in \mathcal{U}\}$.

Allora $E \cup \mathcal{U}$ *è un sottoinsieme di Korovkin per* T *in* E_b*.*

3. – Sottospazi di Korovkin rispetto a reti equicontinue.

Nella seconda parte della tesi, dati uno spazio X localmente compatto e separato, un sottospazio adattato E di $C(X,\boldsymbol{R})$ e fissata su E_b una topologia $\tau \in \{\tau_s, \tau_c\}$, si consideri un sottospazio H di E_b ed un operatore lineare continuo e positivo T da (E_b, τ) in (E_b, τ); al fine di determinare un più cospicuo numero di esempi di sottospazi di Korovkin, si fornisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.1. – *Si dice che* H *è un sottospazio di Korovkin in* E_b *per* T *e* τ rispetto a reti equicontinue di operatori lineari positivi *se per ogni* $f \in E_b$ *risulta* $\lim_{\substack{\leq \\ i \in I}} L_i(f) = T(f)$ *in* (E_b, τ) *per ogni rete* τ*-equicontinua* $(L_i)^{\leq}_{i \in I}$ *di operatori lineari positivi da* E_b *in* E_b *tale che* $\lim_{\substack{\leq \\ i \in I}} L_i(h) = T(h)$ *in* (E_b, τ) *per ogni* $h \in H$*.*

Questa nuova nozione di sottospazio di Korovkin, del resto già studiata in altri spazi funzionali (cfr., p. es, [1]), sembra essere più flessibile, nel senso che possono esistere *molti* sottospazi di Korovkin (anche di dimensione finita) rispetto a reti equicontinue, mentre si può dimostrare che ogni sottospazio di Korovkin in E_b nel senso precedentemente inteso non può avere dimensione finita.

Nel contesto in esame, si riescono a caratterizzare i sottospazi di Korovkin in E_b per T e τ rispetto a reti equicontinue di operatori lineari positivi, sia in termini di opportune misure di Borel regolari, sia nel senso precisato nel seguente teorema.

TEOREMA 3.2. – *Siano* X *uno spazio localmente compatto e separato,* E *un sottospazio adattato di* $C(X,\boldsymbol{R})$*,* $\tau \in \{\tau_s, \tau_c\}$*,* H *un sottospazio di* E_b *e* T *un operatore lineare continuo e positivo da* (E_b, τ) *in* (E_b, τ)*. Si denoti, inoltre, con* $\mathcal{U}_\tau$ *un opportuno sistema fondamentale di intorni della topologia* τ*. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *H è un sottospazio di Korovkin in E_b per T e τ rispetto a reti equicontinue*;

(b) *Per ogni $f \in E_b$ e per ogni $V \in \mathcal{U}_\tau$ esistono $n, m \in \boldsymbol{N}$, $k_1, ..., k_n$, $k'_1, ..., k'_m \in H$ tali che*

(i) $(f - k_i)^+ \in V$ *per ogni* $i = 1, ..., n$ *e* $(k'_j - f)^+ \in V$ *per ogni* $j = 1, ..., m$;

(ii) $\inf\limits_{1 \le i \le n} T(k_i) - \sup\limits_{1 \le j \le m} T(k'_j) \in V$;

(c) $\sup\limits_{U \in \mathcal{U}_\tau} \left(\inf\limits_{\substack{k \in H \\ (f-k)^+ \in U}} T(k) \right) = T(f) = \inf\limits_{U \in \mathcal{U}_\tau} \left(\sup\limits_{\substack{k \in H \\ (k-f)^+ \in U}} T(k) \right)$ *per ogni* $f \in E_b$.

Si determinano, infine, metodi per costruire sottospazi di Korovkin rispetto a reti equicontinue di operatori lineari positivi per particolari operatori lineari positivi, detti operatori *finitamente definiti*, per proiettori positivi e per l'operatore identità su E_b. Ad esempio, si ha il seguente risultato.

TEOREMA 3.3. – *Siano X uno spazio localmente compatto e separato ed E un sottospazio adattato di $C(X, \boldsymbol{R})$. Se esistono $f_0 \in E_b$, $f_0 > 0$ e $S \subset E_b$ che separa i punti di X, tali che $f_0 S, f_0 S^2 \subset E_b$, ove $S^2 := \{h^2 \mid h \in S\}$, allora il sottospazio generato da $\{f_0\} \cup f_0 S \cup f_0 S^2$ è un sottospazio di Korovkin in E_b rispetto a reti equicontinue di operatori lineari positivi per l'operatore identità su E_b sia per τ_c che per τ_s. In particolare, se $S := \{h_1, ..., h_n\}$, allora il sottospazio generato da*

$$\left\{ f_0, f_0\, h_1, ..., f_0\, h_n,\ f_0 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \right\}$$

è un sottospazio di Korovkin in E_b rispetto a reti equicontinue di operatori lineari positivi per l'operatore identità su E_b sia per τ_c che per τ_s.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALTOMARE F., CAMPITI M., *Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications*, De Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, Berlin-New York, **17** (1994).

[2] ALTOMARE F., CAPPELLETTI MONTANO M., *Affine projections on adapted subalgebras of continuous functions*, in corso di stampa su Positivity.

[3] ALTOMARE F., CAPPELLETTI Montano M., *Teoremi di tipo Korovkin per operatori positivi in spazi adattati, Parte I e II*, preprint, 2003.

[4] CHOQUET G., *Lecture on Analysis*, Voll. I, II, III, W.A. Benjamin Inc., New York-Amsterdam, (1969).

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: montano@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XV
Direttore di Ricerca: Prof. Francesco Altomare, Università di Bari.