Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Irene Benedetti

Metodi topologici per disuguaglianze variazionali e inclusioni differenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 457–460.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_457_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 457-460

Metodi topologici per disuguaglianze variazionali e inclusioni differenziali

IRENE BENEDETTI

Nella tesi abbiamo affrontato due diversi problemi, la ricerca di soluzioni per un certo tipo di dusuguaglianze variazionali e per un sistema governato da un'inclusione differenziale. Considerando le soluzioni come punti fissi di multi operatori, abbiamo risolto entrambi i problemi applicando lo stesso tipo di tecnica, cioè la teoria del grado topologico relativo per mappe multivoche.
In particolare abbiamo considerato una versione multivoca di una disuguaglianza variazionale di tipo Stampacchia studiando il seguente problema.

(P) trovare $x \in X$, $y \in T(x)$, tali che:

$$\langle v - x, y \rangle \geq \langle v - x, h \rangle \qquad \forall v \in K. \tag{1}$$

dove X è uno spazio di Banach riflessivo e separabile, X^* il suo duale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto di dualità tra X e X^*, $K \subset X$ è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso, $h \in X^*$ un elemento dato e $T : X \multimap \mathcal{P}(X^*)$ è una multimappa.

Abbiamo costruito un invariante topologico per la multimappa T che ci permette di avere un risultato di esistenza, invarianza per omotopia della soluzione e ci permette di dare alcune condizioni geometriche sulla multimappa T e sull'isieme K che garantiscono l'esistenza di almeno una soluzione.

Abbiamo basato la definizione di questo invariante topologico $\mathrm{Ind}(T, U, K, h)$, che abbiamo chiamato indice di solubilità, sulla definizione del grado topologico relativo per multimappe in dimensione finita, definendo quest'ultimo utilizzando la definizione del grado per ε-approssimazioni.

Ricordiamo il concetto di una ε-approssimazione per una multimappa.

DEFINIZIONE 1. – *Data una multimappa $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una funzione continua $f : X \to Y$ è una ε-approssimazione di F se per ogni $x \in X$, esiste $x' \in O_\varepsilon(x)$ tale che $f(x) \in O_\varepsilon(F(x'))$.*

Più precisamente dati V uno spazio di dimensione finita, $U \subset V$ un sottoinsieme aperto e limitato, $K \subset V$ un sottoinsieme chiuso e convesso, $U_K = U \cap K$ abbiamo definito il grado topologico relativo per la seguente classe di multimappe.

DEFINIZIONE 2. – *Indichiamo con $C\mathcal{A}(\overline{U}_K, V)$ l'insieme delle multimappe $F : \overline{U}_K \to \mathcal{P}(V)$ della forma $F = f \circ G$, dove $f : Y \to V$ è una mappa continua,*

$f(Y) \subseteq K$, per un qualche spazio metrico Y e $G \in \mathcal{A}(\overline{U}_K, Y)$, dove $\mathcal{A}(\overline{U}_K, Y)$ è la classe delle multimappe $G : \overline{U}_K \to \mathcal{P}(Y)$ semicontinue superiormente a valori compatti e tali che soddisfano le seguenti condizioni:

- *per ogni $\varepsilon > 0$ G ammette una ε-approssimazione $g_\varepsilon : X \to Y$;*
- *per ogni $\delta > 0$, esiste $\varepsilon_0 > 0$, tale che per ogni ε $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ e per qualsiasi due ε-approssimazioni g_ε, $g'_\varepsilon : X \to Y$ di G, esiste una mappa continua $h : X \times [0,1] \to Y$ tale che:*
  1) *$h(\cdot, 0) = g_\varepsilon$, $h(\cdot, 1) = g'_\varepsilon$;*
  2) *$h(\cdot, \lambda)$ è una δ-approssimazione di G, per ogni $\lambda \in [0,1]$.*

La definizione del grado topologico relativo per questa classe di multimappe è una costruzione originale basata su un lavoro di Górniewicz Granas e Kryszewski, che hanno introdotto la classe $\mathcal{A}(\overline{U}_K)$, definendone il grado topologico in [1]. Nel caso infinito dimensionale definiamo l'indice per la classe di multimappe $S^+(X, X^*)$, i.e. multimappe che soddisfano le seguenti condizioni.

DEFINIZIONE 3. – *Diciamo che $T \in S^+(X, X^*)$ se*

- *T è limitata (i.e. per ogni insieme limitato $D \subset X$ l'insieme $T(D) = \bigcup_{x \in D} T(x)$ è limitato in X^*);*
- *$\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X^*$, $y_n \in T(x_n)$, le condizioni $x_n \rightharpoonup x$ rispetto a $\sigma(X, X^*)$, $y_n \rightharpoonup y$ rispetto a $\sigma(X^*, X)$, $\limsup_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle \leq \langle x, y \rangle$, implicano che: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ e $y \in T(x)$;*
- *$T = (t \circ S)$, dove $t : Y \to X^*$ è una mappa continua, Y è uno spazio metrico e la restrizione $S\lfloor_{\overline{U}_K^V}$ appartiene alla classe $\mathcal{A}(\overline{U}_K^V, Y)$, dove $V \subset X$ è un sottospazio finito dimensionale e $U_K^V = U_K \cap V$.*

Osserviamo che la seconda proprietà della classe S^+ è la versione multivoca della proprietà $(S)_+$ per le mappe a un sol valore, introdotta da Browder in connessione con la convergenza del metodo di Galerkin. Infatti, generalizzando al caso multivoco un lavoro di Khidirov [4], abbiamo costruito l'indice nel caso infinito dimensionale usando il metodo della approssimazione di Galerkin, ottenendo, in questo modo, analogamente al caso finito dimensionale, che questo invariante topologico soddisfa le principali proprietà del grado, come l'invarianza per omotopia e l'additività rispetto al dominio ed inoltre la validità del seguente teorema di esistenza.

TEOREMA 1. – *Sia $T \in S^+(\overline{U}_K, X^*)$, supponiamo che la disuguaglianza variazionale (P) non abbia soluzioni su ∂U_K e che* $\mathrm{Ind}(T, U, K, h) \neq 0$. *Allora esiste una soluzione (x, y) di (P) con $x \in U_K$ e $y \in T(x)$.*

Applicando questo teorema otteniamo la seguente versione multivoca del teorema di Hartman-Stampacchia ([2]).

TEOREMA 2. – *Sia $K \subset X$ un insieme chiuso, convesso e limitato e $T \in S^+(K, X^*)$. Allora esiste una soluzione $(x, y) \in K \times X^*$ del problema* (P).

Infine abbiamo esteso la costruzione precedente alla classe più ampia delle multimappe pseudomonotone:

DEFINIZIONE 4. – *Una multimappa* $T : X \to \mathcal{P}(X^*)$ *è detta pseudomonotona se per ogni successione* $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightharpoonup x_0$ *rispetto a* $\sigma(X, X^*)$ *e* $\{y_n\} \subset X^*$, $y_n \in T(x_n)$, *per cui* $\limsup_{n\to\infty} \langle x_n - x_0, y_n \rangle \leq 0$, *esiste* $y_0 \in T(x_0)$ *tale che* $\langle x_0 - x, y_0 \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle x_n - x, y_n \rangle$, *per ogni* $x \in X$.

Questa definizione è una estensione al caso multivoco della definizione di pseudo monotonicità di Browder. Allo scopo di costruire l'indice consideriamo multimappe pseudomonotone, limitate, a valori compatti ed usiamo la ben nota regolarizzazione ellittica.

Per quanto riguarda il secondo problema affrontato nella tesi, applicando la teoria del grado topologico relativo per multimappe condensanti, sviluppata nel libro di Kamenskii Oboukhovskii e Zecca ([3]), abbiamo ottenuto un risultato di esistenza e la compattezza dell'insieme delle soluzioni per un'inclusione differenziale.

Più precisamente sia E uno spazio reale di Banach. Per ogni $a < b$ abbiamo denotato con $\mathcal{C}([a, b], E)$ lo spazio di tutte le funzioni continue a tratti $c : [a, b] \to E$ con un numero finito di punti di discontinuità $\{t_*\} \subset [a, b)$ ed abbiamo supposto che i valori $c(t_*^+) = \lim_{h\to 0^+} c(t_* + h)$, $c(t_*^-) = \lim_{h\to 0^-} c(t_* - h)$ siano finiti (abbiamo considerato $c(t_*^+)$ nel caso $t_* = a$).

Osserviamo che $\mathcal{C}([a, b], E)$ è uno spazio normato con la norma $\|c\|_{\mathcal{C}} = \sup_{a\leq t\leq b} \|c(t)\|_E$.

Per $\tau > 0$, sia $x \in \mathcal{C}([-\tau, 0], E)$ una funzione data. Abbiamo considerato un problema di Cauchy per una inclusione differenziale semilineare con ritardo con impulsi a tempi fissati.

$$y(t) = x(t)\ ,\ t \in [-\tau, 0] \tag{2}$$

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y_t)\ ,\ t \in [0, d] \tag{3}$$

$$\Delta y\lfloor_{t=t_k} = I_k(y_{t_k^-})\ ,\ k = 0, \dots, m \tag{4}$$

dove A è un generatore infinitesimale di un semigruppo e^{At}, $F : [0, d] \times \mathcal{C}([-\tau, 0], E) \to \mathcal{P}(E)$ è una multimappa, $y \in \mathcal{C}([-\tau, d], E)$. Per $t \in [0, d]$, $y_t \in \mathcal{C}([-\tau, 0], E)$ è definita da $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq d$ sono punti dati, $\Delta y\lfloor_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-), y(t_k^-) = y(t_k)$ e $I_k : \mathcal{C}([-\tau, 0], E) \to E$, $k = 0, \dots, m$ sono funzioni date.

Per questo tipo di problema abbiamo ottenuto un risultato di esistenza per soluzioni deboli.

DEFINIZIONE 5. – *Una funzione* $y \in \mathcal{C}([-\tau, d], E)$ *è detta una soluzione debole del problema* (2), (3), (4) *se esiste una funzione* $f \in L^1([0, d], E)$ *tale che* $f(t) \in F(t, y_t)$

per q.o. $t \in [0,d]$ *e*

$$
\begin{aligned}
&y(t) = x(t)\ ,\ t \in [\,-\tau, 0];\\
(5)\qquad &y(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,ds + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)} I_k(y_{t_k})\ ,\ t \in [0,d].
\end{aligned}
$$

TEOREMA 3. – *Assumiamo che le seguenti ipotesi siano verificate.*

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ *è un generatore infinitesimale di un semigruppo* C_0; *la mappa multivoca* $F : [0,d] \times \mathcal{C}([\,-\tau,0],E) \to \mathcal{P}(E)$ *è tale che:*

(F1) *la multifunzione* $F(\cdot, c) : [0,d] \to \mathcal{P}(E)$ *ha una selezione fortemente misurabile per ogni* $c \in \mathcal{C}([\,-\tau,0],E)$, *i.e. esiste una funzione fortemente misurabile* $f : [0,d] \to E$ *tale che* $f(t) \in F(t,c)$ *per q.o.* $t \in [0,d]$;

(F2) *la multimappa* $F(t,\cdot) : \mathcal{C}([\,-\tau,0],E) \to \mathcal{P}(E)$ *è semicontinua superiormente per q.o.* $t \in [0,d]$;

(F3) *esiste una funzione* $a \in L^1_+([0,d])$ *tale che:*

$$
(6)\qquad \|F(t,c)\| \le a(t)(1 + \|c\|_{\mathcal{C}}) \text{ per q.o. } t \in [0,d];
$$

(F4) *esiste una funzione* $\mu \in L^1_+([0,d])$ *tale che:*

$$
(7)\qquad \chi(F(t,D)) \le \mu(t)\varphi(D) \text{ per q.o. } t \in [0,d],
$$

per ogni $D \subset \mathcal{C}([\,-\tau,0],E)$ *limitato, dove* χ *è la misura di non compattezza di Hausdorff in* E *e* $\varphi(D) = \sup_{-\tau \le t \le 0} \chi(D(t))$.

Allora il problema (2), (3), (4) *ha una soluzione debole su* $[\,-\tau,d]$, *inoltre se* I_k, $k = 0,\dots,m$ *sono funzioni continue, l'insieme delle soluzioni è un sottoinsieme compatto dello spazio* $\mathcal{C}([\,-\tau,d],E)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] GÓRNIEWICZ L., GRANAS A. e KRYSZEWSKI W., *On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts*, J. Math. Anal. Appl., **161** (2) (1991), 457-473.

[2] HARTMAN P. e STAMPACCHIA G., *On some non-linear elliptic differential-functional equations*, Acta Math., **115** (1966), 271-310.

[3] KAMENSKII M., OBUKHOVSKII V. e ZECCA P., *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications (2001).

[4] KHIDIROV YU. E., *Degree theory for variational inequalities in complementary systems*, Z. Anal. Anwendungen, **17** (2) (1998), 311-328.

Dipartimento di Energetica S.Stecco, Università di Firenze
e-mail: benedetti@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof P.Zecca, Dipartimento di Energetica S.Stecco Università di Firenze