Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Angeloni

Metodi di separazione in economia matematica: uguaglianza di Edgeworth, arbitraggio ed informazione asimmetrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 437–440.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_437_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 437-440

Metodi di separazione in economia matematica: uguaglianza di Edgeworth, arbitraggio ed informazione asimmetrica

LAURA ANGELONI

In questa tesi si affrontano due problemi nell'ambito della Teoria dell'Equilibrio Generale, la cui trattazione si basa su comuni strumenti matematici dell'analisi funzionale, in particolare sui teoremi di separazione.

1. – Uguaglianza di Edgeworth in spazi infinito-dimensionali

L'uguaglianza di Edgeworth (1874) è una delle più importanti congetture in economia matematica, ed afferma che i due principali concetti di equilibrio (il *core* e l'*equilibrio walrasiano*) coincidono. Mentre la dimostrazione classica di tale risultato è stata data nel caso finito-dimensionale e si basa su un teorema di separazione, negli ultimi decenni l'estensione al caso infinito-dimensionale si è rivelata cruciale, in particolare dal punto di vista delle applicazioni economiche.

Poiché uno dei problemi che si riscontrano nel passaggio al caso infinito-dimensionale è proprio quello relativo alla mancanza delle proprietà necessarie a garantire la separazione in senso classico, abbiamo proposto un nuovo teorema di separazione in cui viene alleggerita l'ipotesi di convessità del sottoinsieme. Una conseguenza di tale risultato è nella forma appropriata per essere applicato nella dimostrazione del'uguaglianza:

TEOREMA 1. – *Sia X uno spazio di Banach e sia I un sottoinsieme convesso di X tale che $0 \in I$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(I) *esiste un cono aperto Γ tale che $\Gamma \cap I = \emptyset$;*

(II) *esiste $y_o \in X$ tale che $d(y_o, w(I)) > 0$, dove $w(I) = \bigcup\limits_{a>0} aI$;*

(III) *esiste un funzionale lineare continuo $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \neq 0$ tale che $p(x) \geq 0$, per ogni $x \in cl(I)$.*

Il modello considerato è quello di un'economia di puro scambio

$$\mathcal{E} = [(A, \mathcal{A}, m); X^+; e; \{\succ_a\}_{a \in A}],$$

dove $(A, \mathcal{A}, m)$ è lo *spazio degli agenti,* con $\mathcal{A}$ una σ-algebra di A, m una misura finita positiva, X, uno spazio di Banach ordinato separabile, è lo *spazio dei beni,* $e \in L^1_X(A, \mathcal{A}, m)$ è la *dotazione iniziale* e $\succ_a$ è la *relazione di preferenza* associata all'agente $a \in A$, ovvero è un preordine irriflessivo.

Un'*allocazione* è una funzione Bochner-integrabile $f : A \longrightarrow X^+$ ed è *ammissibile* se $\int\limits_A f\, dm = \int\limits_A e\, dm$. Un prezzo è un funzionale $p \in (X^*)^+ \setminus \{0\}$, dove $(X^*)^+$ è il cono positivo del duale di X e il *budget set* di un agente $a \in A$ è $B_p(a) = \{x \in X^+ \ : \ p(x) \le p(e(a))\}$. Una *coalizione* è un sottoinsieme S di $\mathcal{A}$ tale che $m(S) > 0$. Il *core* di $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, è l'insieme delle allocazioni ammissibili che non possono essere migliorate da alcuna coalizione S, ovvero per cui non esiste un'allocazione g tale che $g(a) \succ_a f(a)$ $m-q.o.$ in S, $m(S) > 0$ e $\int_S g\,dm = \int_S e\,dm$. L'insieme delle allocazioni walrasiane, $\mathcal{W}(\mathcal{E})$, è l'insieme delle allocazioni ammissibili per cui esiste un prezzo p tale che $f(a)$ è massimale per $\succ_a$ in $B_p(a)$ per $m-$q.o. $a \in A$.

Esistono controesempi ([5]) che mostrano come l'uguaglianza di Edgeworth ($\mathcal{W}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}(\mathcal{E})$) non sia più vera, in generale, in assetto infinito-dimensionale. Appare pertanto chiaro che si rende necessaria l'introduzione di un'ipotesi opportuna: diverse ipotesi aggiuntive, soprattutto sulle preferenze, sono state proposte in letteratura. Ispirandoci alla classica *properness* ([4, 5]) abbiamo introdotto la nozione di *$\sigma-$uniform weak properness* delle preferenze.

DEFINIZIONE 1. – *Le preferenze $\{\succ_a\}_{a \in A}$ sono $\sigma-$*uniformemente proprie *rispetto alla successione $(V_n)_n$ di intorni di 0 se esistono una partizione $(A_n)_n$ di A e $(x_n)_n \in \ell^1(X^+)$ tali che per ogni $x \in X^+$, $z \in X$ per cui vale la relazione $z + x - ax_n \succ_a x$, per qualche $a > 0$, m-q.o. in A_n, allora $z \notin aV_n$. Sono σ-*uniformemente debolmente proprie *se sono $\sigma-$uniformemente proprie rispetto agli intorni $V_n = \{x \in X : \ x^*(x) < \|x_n\|\}$, per qualche $x^* \in X_1^*$ tale che $x^*(\sum_{n \in N} x_n) > 0$.*

Assumiamo che $\mathcal{E}$ sia tale che A sia non-atomico, $m-$completo e che ammetta le operazioni di Souslin, che $\int_A e\,dm$ sia strettamente positivo e che le preferenze siano continue, monotone e misurabili. Si propone, dapprima, una condizione necessaria e sufficiente per l'uguaglianza di Edgeworth, senza ipotesi di convessità né di completezza delle preferenze. Quindi, utilizzando questo risultato ed il Teorema 1, siamo in grado di provare il seguente risultato principale:

TEOREMA 2. – *Sia $\mathcal{E}$ tale che le preferenze siano negativamente transitive e $\sigma-$uniformemente debolmente proprie. Allora $\mathcal{W}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}(\mathcal{E})$.*

2. – Arbitraggio ed esistenza di equilibri in un'economia stocastica multiperiodo.

Come ulteriore applicazione dei teoremi di separazione ci siamo occupati della condizione di arbitraggio e dell'esistenza di equilibri in mercati finanziari incompleti.

In particolare, abbiamo generalizzato il classico modello a due date, studiando il caso di un'economia finanziaria stocastica in cui il tempo e l'incertezza sono descritti da un albero finito (*finite event tree*). Ci sono $(T+1)$ date $t = \{0, \dots, T\}$, un insieme finito di agenti I e un insieme finito S di *stati della natura*, quindi un insieme finito S^t di eventi che potrebbero prevalere alla data t, per ogni $t = 0, \dots, T$, con $S = \bigcup_{t=0}^{T} S^t$. Ad ogni istante $t \neq T$ c'è un incertezza a priori su ciò che accadrà all'istante successivo.

Il primo modello multiperiodo si deve a Debreu ([1]), il quale ha introdotto l'idea di un albero di lunghezza finita e, successivamente, il modello a $T-$periodi è stato largamente esplorato in letteratura (ricordiamo, tra gli altri, [2] e [3]).

Ad ogni nodo s è disponibile un insieme finito di beni H: un *bene* è una coppia (h, s) di un bene fisico $h \in H$ e un nodo $s \in S$ in cui h è disponibile. $x_i = (x_i(s))_{s\in S} \in \mathbb{R}^{H\times S}$, dove $x_i(s) = (x_i(h, s))_{h\in H}$, è un *paniere* per $i \in I$, $X_i \subset \mathbb{R}^{H\times S}$ è l'insieme dei panieri accessibili all'agente i e $p \in \mathbb{R}^{H\times S} \setminus \{0\}$ è il prezzo dei beni.

Al fine di trasferire valore da un istante all'altro e da uno stato all'altro, si introduce una struttura finanziaria, ovvero ad ogni stato s sono disponibili un numero finito di titoli $J(s)$, al prezzo $q \in \mathbb{R}^J$, dove $J = \bigcup\limits_{s\in S} J(s)$, che danno un payoff in uno qualsiasi degli stati successivi allo stato di emissione $s(j)$. Un portafoglio per l'agente $i \in I$ è un vettore $z_i = (z_i(s))_{s\in S} \in \mathbb{R}^J$ e la struttura finanziaria $\mathcal{F}$ è descritta dalla matrice associata all'applicazione $W_{\mathcal{F}}(p, q) : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^S$ definita da

$$[W_{\mathcal{F}}(p,q)z](s) = \sum_{j\in J} v(p,s,j)z^j - \sum_{j\in J} \delta_{s,s(j)}q^j z^j = \sum_{\{j\in J|\ s(j)<s\}} v(p,s,j)z^j - \sum_{\{j\in J|\ s(j)=s\}} q^j z^j,$$

dove $v(p, s, j)$ è il payoff del titolo j al nodo $s \in S$. Assumiamo che i portafogli accessibili all'agente i appartengano a $Z_i \subset \mathbb{R}^J$, pertanto il nostro modello comprende anche i casi di portafogli con limitazioni dal basso ($Z_i \subset \bar{z}_i + \mathbb{R}^J$, $\bar{z}_i \in -\mathbb{R}^J_+$), portafogli non vincolati ($Z_i = \mathbb{R}^J$) e portafogli limitati ($Z_i = B_J(0, 1)$).

Dapprima viene esaminato in dettaglio il caso in cui gli agenti non ricevono informazioni, estendendo opportunamente la classica nozione di non-arbitraggio.

DEFINIZIONE 2. – *Il portafoglio* $z_i^* \in Z_i$ *è* arbitrage-free *per l'agente* $i \in I$ *ai prezzi* $(p, q) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^J$ *se non esiste* $z_i \in Z_i$ *tale che* $W_{\mathcal{F}}(p, q)z_i > W_{\mathcal{F}}(p, q)z_i^*$, *ovvero* $[W_{\mathcal{F}}(p, q)z_i](s) \geq [W_{\mathcal{F}}(p, q)z_i^*](s)$, *per ogni* $s \in S$, *con almeno una disuguaglianza stretta. La struttura finanziaria* $\mathcal{F}$ *è* arbitrage-free *se non esiste* $z_i \in Z_i$ $(i \in I)$ *tale che* $W_{\mathcal{F}}(p, q)(\sum\limits_{i\in I} z_i) > 0$.

Ricordiamo che tale nozione è fondamentale, in quanto si prova che, sotto l'ipotesi di non-saziazione delle preferenze, un prezzo d'equilibrio è sempre di non-arbitraggio.

Si stabilisce poi una caratterizzazione della condizione di non-arbitraggio che ci consente di dimostrare, nel caso di portafogli non vincolati, l'equivalenza tra la completezza dei mercati e l'unicità del vettore dei prezzi su ogni stato.

L'analisi sull'arbitraggio viene anche generalizzata nel caso di informazione asimmetrica, ovvero nel caso in cui gli agenti, all'istante iniziale, ricevono informazioni su quello che accadrà nel futuro. La principale differenza con il caso di informazione simmetrica è che l'esistenza di un prezzo di non-arbitraggio non è più garantita, cosicché gli agenti sono interessati a dedurre una struttura d'informazione «arbitrage-free» prima di affrontare il proprio problema di massimizzazione. In questo senso proviamo che gli agenti, attraverso un processo decentralizzato, eliminando sequenzialmente gli stati che presentano opportunità di arbitraggio, sono in grado di dedurre abbastanza informazioni da raffinare le proprie opinioni fino ad arrivare ad una struttura arbitrage-free.

Abbiamo infine affrontato il problema dell'esistenza di un equilibrio finanziario in un'economia stocastica con T-periodi ottenendo un risultato generale che ci consente di riottenere, come casi particolari, risultati di esistenza per alcune strutture finanziarie largamente studiate in letteratura, tra cui, ad esempio, le strutture nominali e numéraire, con e senza vincoli di portafoglio. Le ipotesi sono le seguenti:

(C) X_i è chiuso e convesso ed $e_i \in \mathrm{int} X_i$;

(P) la relazione di preferenza di $i \in I$, rappresentata da $P_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$, è semicontinua inferiormente, convessa, aperta, non saziata ad ogni stato e tale che $x_i \notin P_i(x)$ per ogni $x = (x_i)_i \in \prod_{i\in I} X_i$;

(F) l'applicazione $p \mapsto v(p, s, j)$ è continua, per ogni $s \in S, j \in J$; Z_i è chiuso, convesso, tale che $0 \in Z_i$, per ogni $i \in I$ ed esiste $i_0 \in I$ tale che $0 \in \mathrm{int}\, Z_{i_0}$;

(B_λ) l'insieme dei panieri e dei portafogli ammissibili $B(\lambda) := \{(x_i, z_i)_i \in \prod_{i\in I} X_i \times Z_i : \exists (p, q) \in B_L(0, 1) \times \mathbb{R}^J,\ {}^t W_{\mathcal{F}}(p, q)\lambda \in B_J(0, 1),\ \ p(s) \cdot [x_i(s) - e_i(s)] \leq [W_{\mathcal{F}}(p, q)z_i](s)$ for every $s \in S,\ i \in I,\ \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} e_i,\ \sum_{i\in I} z_i = 0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^S$, è limitato.

Teorema 3. – *Supponiamo che valgono* (C), (P), (F), *e sia* $\lambda \in \mathbb{R}^S$, $\lambda(s) > 0$ *per ogni* $s \in S$, *tale che vale* (B_λ). *Allora, se* $i_0 \in I$ *è tale che* $0 \in int\ Z_{i_0}$, *esiste un equilibrio finanziario* $\big((x_i^*, z_i^*)_{i\in I}, p^*, q^*\big) \in \prod_{i\in I} (X_i \times Z_i) \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^J$ *tale che, per ogni* $s \in S$, $p^*(s) \neq 0$ *e* ${}^t W(p^*, q^*)\lambda \in N_{Z_{i_0}}(z_{i_0}^*) = \{\eta \in \mathbb{R}^J :\ \eta \cdot z_{i_0}^* \geq \eta \cdot z_i,\ \forall z_i \in Z_{i_0}\}$.

Se, inoltre, $z_{i_0}^* \in \mathrm{int}\, Z_{i_0}$, *allora* $\mathcal{F}$ *è arbitrage-free e risulta* ${}^t W(p^*, q^*)\lambda = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Debreu G., *Theory of value*, Wiley (1959).

[2] Duffie D. e Schafer W., *Equilibrium in incomplete markets: I. A basic model of generic existence in Stochastic Economies*, J. Math. Econ., **14** (1985), 285-300.

[3] Magill M. e Quinzii M., *Theory of incomplete markets*, MIT Press, Cambridge, MA (1996).

[4] Mas Colell A., *The price equilibrium existence problem in topological vector lattices*, Econometrica, **54**, (1986), 1039-1053.

[5] Rustichini A. e Yannelis N., *Edgeworth's conjecture in economies with a continuum of agents and commodities*, J. Math. Econ., **20** (1991), 307-326.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia,
e-mail: angeloni@dipmat.unipg.it
Dottorato di ricerca in Metodi Matematici e Statistici per le Scienze Economiche e Sociali
(Sede: Università di Perugia) - Ciclo XVI
Direttori di ricerca: Prof. Bernard Cornet, Universitè Paris 1 (Panthéon-Sorbonne), Prof. Anna Martellotti, Università di Perugia