Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Mauro Francaviglia, Marcella Palese

I fondamenti epistemologici della Relatività Generale e la sua «eredità matematica»

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.2, p. 289–312.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_2_289_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Agosto 2005, 289-312

I fondamenti epistemologici della Relatività Generale e la sua «eredità matematica»

MAURO FRANCAVIGLIA - MARCELLA PALESE

1. – Introduzione.

In un famoso libro sulla simmetria Hermann Weyl [Wey] scrisse che «*Se non abbiamo successo nel risolvere un problema matematico, la ragione frequentemente consiste nel nostro fallimento nell'individuare il punto di vista più generale in cui il problema appare solo come un singolo anello in una catena di problemi interconnessi. Dopo aver trovato questo punto di vista non solo quel problema è spesso più accessibile alla nostra investigazione, ma nello stesso tempo noi arriviamo a possedere un metodo che è applicabile ad altri problemi connessi*».

In questa nota, fondamentale sarà il concetto di struttura geometrica, come descritta matematicamente dalla *Teoria delle Categorie*, che vede le relazioni tra *oggetti* della categoria espresse da *morfismi*. Considereremo, infatti, spazi dotati di struttura, unitamente ai loro elementi e alle operazioni definite su di essi. In particolare, un ruolo fondamentale è giocato dagli *automorfismi*, ovvero quei morfismi invertibili di uno spazio in sé che conservano una struttura data. Ancora con Weyl [Wey] ricordiamo il principio conduttore della matematica moderna: «*Ogni volta che si abbia a che fare con un ente dotato di struttura si cerchi di determinare il gruppo degli automorfismi, ovvero il gruppo delle trasformazioni degli elementi di tale ente che lascino invariati tutti i rapporti strutturali. In tal modo ci si può attendere di acquisire una profonda comprensione della costituzione dello stesso ente*» — che ben sintetizza il cosiddetto «Programma di Erlangen» di Felix Klein [Kle].

L'analisi delle configurazioni *simmetriche* degli elementi di uno spazio equivale allo studio delle configurazioni invarianti rispetto all'azione di un opportuno sottogruppo del gruppo di tutti gli automorfismi. Si possono considerare, ad esempio, gruppi continui di trasformazioni di uno spazio o gruppi ad un parametro di trasformazioni differenziabili. I campi di vettori saranno allora i generatori infinitesimi di gruppi ad un parametro di trasformazioni e si potrà definire la derivata di Lie di oggetti con una certa struttura. Come esempio di categoria fondamentale considereremo quella dei «fibrati» con i loro morfismi. La teoria dei fibrati, allora, diventa dunque il contesto naturale in cui la Geometria Differenziale descrive le proprietà intrinseche degli spazi; vedi, per esempio, la recente monografia [FaFr].

Come vedremo, questo punto di vista — che potrebbe essere riassunto con il termine di «*approccio globale ad un problema*» — affonda le proprie radici nei primi venti anni del Novecento, che segnano, grazie al contributo di numerose menti geniali, la nascita e lo sviluppo — non solo nell'ambito della Fisica Matematica — di nuovi e fruttuosi approcci allo studio dei fenomeni fisici, specialmente in relazione alla necessità di fornire una descrizione unificatrice dei diversi tipi di interazione allora conosciuti. Uno degli aspetti fondamentali della nuova Fisica Matematica e della Fisica Teorica degli inizi del Novecento sarà infatti lo stretto interscambio tra ambiti matematici sino allora sviluppatisi disgiuntamente: Geometria e Topologia, in particolare, che diventeranno non solo i linguaggi delle nuove teorie, ma assumeranno via via un significato sempre più ontologico. Al culmine di tale sviluppo, nella seconda metà del secolo, nasceranno, ad esempio, le *teorie topologiche di campo*, le *teorie di stringa* e il *teorema dell'indice* per i complessi di operatori differenziali ellittici.

Il punto di partenza per lo sviluppo di questi nuovi concetti risiede nel fermento scientifico-culturale che all'inizio del secolo XX pervade tutta l'Europa e che in breve produrrà sia la Teoria della Relatività Generale sia la Fisica Quantistica. Entrambe tali discipline poggiano i loro fondamenti matematici sulle formulazioni Lagrangiane e Hamiltoniane della Meccanica e della Teoria dei Campi, nella sistemazione definitiva precedentemente fornita da Joseph-Louis Lagrange e da William R. Hamilton attraverso gli strumenti di quella branca della Matematica oggi nota come «*calcolo delle variazioni*». Esse, inoltre, rappresentano il naturale punto di arrivo di una lunga e profonda serie di indagini scientifiche concernenti i fondamenti della Geometria e l'introduzione del concetto di campo nello studio dei fenomeni elettromagnetici, argomenti che a loro volta affondano le proprie radici nel XIX secolo, in particolare nelle opere di G.F. Bernhard Riemann [Rie] e James Clerk Maxwell [Max], rispettivamente.

La teoria della Relatività Generale, cui Albert Einstein pervenne nel 1916 dopo una lunga ricerca che occupò le sue riflessioni dal 1905 al 1915, rappresentò infatti per la Fisica moderna una profonda rivoluzione concettuale. In essa, il campo gravitazionale è identificato con una metrica di segnatura lorentziana in uno spazio-tempo quadridimensionale e le equazioni dinamiche che ne reggono la struttura sono espresse in funzione del tensore di curvatura della metrica stessa. Essa, tuttavia, non può ritenersi il risultato di un unico genio. Gli stessi contributi alla nascita e allo sviluppo della teoria della Relatività Speciale e Generale sono molteplici, e la storiografia scientifica ha più volte sottolineato i notevoli contributi sia di J. Henri Poincaré [Poi] alla Relatività Speciale, sia di David Hilbert [Ein] alla Relatività Generale. Einstein, Hilbert e Poincaré, infatti, sono le grandi menti fisico-matematiche che (anche interagendo direttamente, come nel caso della corrispondenza epistolare tra Einstein ed Hilbert sulle equazioni del campo gravitazionale [Ein]) nei primi venti anni del Novecento hanno costruito la teoria della Relatività e praticamente fondato un nuovo modo di intendere e descrivere le interazioni fisiche, tuttora vitale e moderno [Fra2]. Ciò che li accomuna risiede essenzialmente in due aspetti della Matematica sviluppata nel XX secolo: la *teoria degli invarianti* e il *calcolo differenziale assoluto*; entrambi, in un certo senso, espressione del contesto filosofico-culturale europeo che si poneva a cavallo tra il XIX ed il XX secolo.

2. – Fondamenti epistemologici.

Un ruolo determinante nello sviluppo della geometria intrinseca degli spazi fu svolto da Riemann, il quale, generalizzando la teoria gaussiana delle superfici, nella sua nota prolusione [Rie] «*Sulle ipotesi che giacciono alla base della geometria*» (presentata a Goettingen nel 1854, ma pubblicata postuma solo nel 1866), fu indotto ad introdurre il concetto di curvatura di una varietà multidimensionale, gettando così di fatto le basi della moderna Geometria Differenziale. Riemann, proponendosi uno studio critico sia del concetto di spazio, sia dei principii fondamentali di costruzione nello spazio, giunse a ipotizzare, ben prima di Einstein, che la presenza di materia nell'Universo ne debba necessariamente influenzare la curvatura. «*Se supponiamo, infatti, che i corpi esistano indipendentemente dalla loro posizione* — dice Riemann — *la curvatura è ovunque costante e quindi risulta dalle misure astronomiche che essa non può essere diversa da zero*». Le relazioni di misura in una «varietà riemanniana» sono quindi completamente determinate dalla sua curvatura; Riemann, anzi, aggiunge quanto segue: — *se questa indipendenza dei corpi dalla posizione non esiste, non possiamo dedurre dalle relazioni metriche del «grande» quelle dell'infinitamente piccolo; nel qual caso la curvatura in ogni punto può avere un valore arbitrario nelle tre direzioni, purché la curvatura totale di ogni porzione misurabile di spazio non differisca sensibilmente da zero*». L'idea fondamentale di Riemann era la non omogeneità dello spazio, cioè il fatto che la struttura metrica dello spazio può essere pensata come determinata dalla distribuzione della materia. Si noti che la questione della validità delle ipotesi della geometria nell'infinitamente piccolo è strettamente legata alla questione del fondamento delle relazioni metriche dello spazio. «*In una varietà discreta* — Riemann osserva — *il fondamento delle sue relazioni metriche è dato dalla sua stessa nozione, mentre in una varietà continua questo fondamento deve venire «da fuori». Quindi* – dice ancora Riemann — *o la realtà che è sottostante lo spazio deve formare una varietà discreta, o dobbiamo cercare il fondamento delle sue relazioni metriche al di fuori di esso, in forze di legame che agiscono su di esso*». Come lo stesso Wolfgang E. Pauli [Pau] ha osservato, questa intuizione di Riemann avrebbe permesso, nel secolo successivo e disponendo del corretto concetto di spazio-tempo, di geometrizzare molti fenomeni fisici. Riemann per primo riconosce dunque che l'esistenza il rapporto tra strutture geometriche e teorie fisiche basato su un presupposto epistemologico relativo alla natura delle relazioni metriche dello spazio, sulla negazione cioè della separabilità tra struttura geometrica sottostante e oggetti fisici (implicando quindi la negazione dell'esistenza di uno spazio assoluto cui riferire la realtà fisica). La negazione di uno spazio-tempo assoluto e distinto dagli oggetti fisici, unitamente al principio di causalità, comporta pertanto una visione *relazionale* del moto, sulla quale peraltro si basano le più recenti ricerche circa la Gravità Quantistica [Rov].

Il superamento del punto di vista newtoniano, che nel 1905 avrebbe portato alla nascita della teoria della Relatività Speciale, si ebbe con uno sviluppo apparentemente estraneo al problema dello spazio-tempo: il concetto di *campo*, inteso con la definitiva pretesa di sostituire il concetto di particella quale punto materiale e, con esso, quello di forza agente a distanza. Basandosi su questi presupposti, M. Faraday [Far] e Maxwell [Max] fonderanno la teoria del campo come elemento irriducibile della descrizione fisica. Nella fisica classica il campo era infatti un concetto ausiliario, utile per trattare la materia come un continuo: di qui proveniva il concetto di «etere classico»; cfr. [FrPa]. Nella teoria della Relatività Ristretta di Einstein [Ein], invece, l'equivalenza fisica di tutti i sistemi inerziali comportò l'insostenibilità dell'ipotesi di un etere in quiete; fu pertanto necessario abbandonare l'idea che il campo elettromagnetico venisse considerato come stato di un veicolo materiale.

Anche la Relatività Generale, essendo una teoria geometrica del campo gravitazionale, si basa sul concetto di campo come elemento irriducibile della descrizione fisica e come propagatore con velocità finita delle relazioni fisiche causali [Cas, Pal, Rei], il quale sostituisce quello di oggetto materiale: questo la porta al di fuori della pura Meccanica; in questo consistono pertanto la sua peculiarità ed il motivo del suo successo sulla meccanica classica newtoniana [Jam, Pal].

3. – Sviluppi e conseguenze.

L'idea di relazione spazio-temporale risulta intimamente legata con la concatenazione causale del mondo, in quanto ciò che avviene prima può influire su ciò che avviene dopo, ma non può accadere il contrario;

in questo modo la nozione di *prima* e *dopo* può essere basata su una relazione *causa-effetto*. Indicheremo con *rapporto causale*, il rapporto tra causa ed effetto in generale; *principio causale* o di causalità, l'enunciazione della legge causale in generale, cioè una forma del tipo: «la stessa causa produce lo stesso effetto»; *determinismo causale*, o spesso solo *causalità*, la dottrina che afferma l'universalità del principio causale. Quindi, mentre il principio causale enuncia la forma del rapporto causale, il determinismo causale sostiene che tutto accade in base alla legge causale. Il principio di causalità, pur essendo una forma ristretta del principio del determinismo, essendo un presupposto della ricerca scientifica e non una semplice ipotesi metafisica, fa parte del motore filosofico della ricerca scientifica stessa [Cas, Pal, Rei].

Con l'introduzione del *principio di equivalenza* (che esprime la non distinguibilità locale tra effetti inerziali ed effetti gravitazionali) e del *principio di covarianza generale* (che esprime l'universalità delle leggi fisiche rispetto ad osservatori qualunque) il concetto di sistema inerziale perde il suo significato oggettivo, di modo che le leggi naturali risultano covarianti rispetto a trasformazioni continue arbitrarie delle coordinate. In questo modo, all'assoluto costituito dal continuo spazio-temporale si sostituisce uno spazio-tempo variabile da punto a punto e da istante ad istante, determinato dalla distribuzione della materia; all'assolutezza delle misure a riposo di lunghezza e di tempo della relatività ristretta si sostituisce la variabilità locale delle misure, in condizioni di quiete determinata dalla variabilità del campo gravitazionale, condizione dell'equivalenza di tutti i possibili sistemi di riferimento; cfr. [FrPa]. Al significato oggettivo del moto uniforme non rotatorio viene sostituito il significato oggettivo della coincidenza spazio-temporale di punti-evento ben definiti; all'azione istantanea della teoria della gravitazione newtoniana e all'impossibilità di inserire una qualsiasi teoria della gravitazione nella Relatività Ristretta, viene sostituito nella Relatività Generale un campo gravitazionale con la tipica velocità finita delle interazioni (e al più uguale a quella della luce nel vuoto, onde rispettare il necessario «*principio di causalità*»); assumendo il campo come concetto autonomo e fondamentale delle interazioni, viene quindi superato il dualismo tra materia e gravitazione, riducendo in tal modo ad un'unica causa tutte le leggi del moto.

Einstein, riprendendo la concezione di Mach [Mac] — secondo cui il moto di una particella massiva risente dell'azione di tutta la distribuzione di materia nell'Universo —osservava che la soluzione del problema riguardante l'inerzia e la distribuzione delle masse doveva essere sviluppata nella teoria dell'azione in termini di campo (e non come interazione a distanza tra masse), considerando quelle proprietà del continuo spazio-temporale che determinano l'inerzia come proprietà di campo dello spazio stesso. Lo spazio, cioè, si concepisce capace di *interazioni dinamiche* con il sistema della distribuzione della materia, considerato più propriamente fisico. Il principio di relatività veniva così generalizzato all'interno di una teoria di campo.

Come già accennato, ciò che emerge da tutte queste considerazioni è l'esistenza di un nucleo profondamente *relazionale* della Relatività Generale. La *localizzazione* spaziale e temporale è definita in termini di contiguità tra oggetti dinamici interagenti. Il moto non è altro che un *cambiamento di contiguità*. Da questo punto di vista, la Relatività Generale porta alle estreme conseguenze il programma tardo-cartesiano e leibniziano di una definizione completamente relazionale del moto, che elimina la nozione stessa di spazio (perché non necessaria alla descrizione dei fenomeni); cfr. ancora [FrPa].

Non ha più senso, dunque, parlare di tempo *durante* il quale le dinamiche si svolgono, né di spazio *in cui* le dinamiche hanno luogo. La Relatività Generale afferma infatti l'identificazione tra spazio-tempo — che è una varietà metrica e dunque un'entità *a priori* non dinamica — e la materia — che soggiace ed equazioni differenziali ed è dunque un'entità dinamica — stabilendo in tal modo la non separabilità tra spazio-tempo e materia. Le conseguenze di questo punto di vista sono la perdita del significato fisico delle coordinate spazio-temporali e la necessità di scrivere le equazioni di campo in termini di oggetti geometrici (*tensori*) le cui leggi di trasformazione per cambiamenti di coordinate ne garantiscano la covarianza e di cui sia possibile dare una definizione intrinseca (ovvero indipendente dal sistema di coordinate scelto). Questa perdita di significato fisico delle coordinate attribuisce un ruolo fondamentale al concetto di campo: non c'è più né spazio né materia, ma solo campi. D'altro canto, equivalentemente, è interessante ricordare il giudizio espresso da Cornelius Lanczos [Lan]:

«Le tre categorie, spazio, tempo, e materia, sono alla fine ridotte ad una singola entità: lo spazio. Se noi capiamo la struttura geometrica propria dell'Universo, noi contemporaneamente ne capiremo la struttura fisica, perché la fisica è geometria». In altre parole egli sostiene che per capire il ruolo del calcolo differenziale assoluto e della geometria riemanniana nella Relatività Generale il principio di equivalenza è di fondamentale importanza, poiché riconosce la gravitazione come un fenomeno puramente geometrico.

Dal punto di vista della storia della filosofia della scienza, in definitiva, la relatività rappresenta allora l'abbandono dei concetti di spazio, tempo e causalità come conoscenze sintetiche *a priori* [Cas, Pal, Rei]. In Relatività Ristretta le misure spaziali sono riducibili a misure temporali, di modo che il tempo risulti logicamente prioritario rispetto allo spazio. Inoltre, la geometria naturale dei raggi luminosi costituisce al tempo stesso la geometria degli orologi e dei regoli rigidi, al punto che il principio del carattere limite della velocità della luce porta a considerare l'onda elettromagnetica come archetipo della propagazione causale stessa. La catena causale è l'elemento topologico fondamentale dell'ordinamento temporale, e di conseguenza dell'ordinamento spaziale, poiché dire che un punto dello spazio è «più lontano» equivale a dire che la propagazione causale impiega più tempo per raggiungerlo. Nella teoria della Relatività Ristretta il concetto di *causalità* è legato all'esistenza, nello spazio-tempo di Minkowski (cfr. sez. 4), di un cono luce che rappresenta una sorta di barriera insormontabile per la propagazione degli effetti fisici. Se un evento P è «nel futuro» o «nel passato» di un altro evento O, scelto convenzionalmente come origine di un sistema di riferimento, il vettore che li unisce è necessariamente interno al cono. Parimenti ad una particella è permesso di muoversi solo con una velocità interna o la massimo giacente sul cono. Questa circostanza si traduce nell'affermazione che — pur non valendo un concetto assoluto di contemporaneità — possono essere in rapporto»causa-effetto» solo eventi non separati dal cono stesso. Il cono luce è l'oggetto caratteristico della geometria conforme dello spazio tempo, perché le trasformazioni conformi conservano gli angoli e, in particolare, non modificano il cono stesso [SaWu].

Il fatto che in Relatività Generale il tensore metrico definisca una struttura conforme solo localmente, in virtù del principio di equivalenza, comporta la possibilità di dare un senso esclusivamente al concetto di *causalità locale*, poichè in ogni punto della varietà metrica con segnatura lorentziana, descrivente il campo gravitazionale, lo spazio tangente contiene una distribuzione di *coni di luce* che definiscono le relazioni causali. Come anche Reichenbach [Rei] ha osservato, l'ordinamento delle catene causali rappresenta le proprietà topologiche dello spazio-tempo stesso. Dalle considerazioni che abbiamo fatto sulla natura relazionale della teoria relativistica della gravitazione, si riconosce dunque che tali proprietà topologiche sono legate alle relazioni tra campi in interazione ed, in un certo senso, ci richiamano il significato dinamico del «*topos*» aristotelico.

4. – Excursus storico.

L'emancipazione del concetto di campo dalla sua associazione ad un veicolo materiale costituisce quindi una delle svolte fondamentali nello sviluppo del pensiero scientifico. Questa emancipazione prende di fatto le mosse dalle già citate esperienze di Michael Faraday sull'elettricità ed il magnetismo [Far]; Faraday concepiva le particelle cariche come singolarità di un continuum nel quale tutte le interazioni si propagano senza che tra i punti esista qualcosa di inerte rispetto alla propagazione stessa. In un'analoga prospettiva, Maxwell utilizzerà in seguito un modello idrodinamico (e quindi continuo) per le interazioni elettriche e magnetiche [Max]: il campo deve essere posto in relazione con lo spazio, con la materia, con l'etere: *non c'è una materia in movimento, ma il movimento nella materia*. Le equazioni di Maxwell, base dell'elettromagnetismo moderno, verranno pubblicate nel 1879, lo stesso anno in cui a Ulm nasceva Albert Einstein. Una delle più sconvolgenti predizioni di tali equazioni affermava che i fenomeni elettromagnetici nel vuoto dovessero propagarsi con una velocità «assoluta» ed indipendente dal sistema di riferimento, in manifesto contrasto con le leggi fondamentali della fisica galileiana classica; questa predizione teorica fu poi verificata nel celebre (quanto discusso) esperimento di interferometria condotto nel 1887 da A.A. Michelson ed E. Morley e ripetuto poi più volte negli anni. La storiografia recente ha ben evidenziato che l'influenza di tale esperimento sul pensiero di Einstein e sulla nascita della Relatività Speciale fu assai marginale; esso, tuttavia, ne fu certamente banco di prova successivo e guadagnò fama proprio grazie alla nuova teoria einsteiniana relativa alla propagazione elettromagnetica in Relatività Speciale; cfr. il recentissimo saggio [Nor]. Einstein, come molti altri suoi contemporanei, era a conoscenza di uno dei lavori che più di tutti hanno contribuito ad influenzare lo sviluppo della Meccanica e della teoria dei campi del XX secolo: «La meccanica nel suo sviluppo storico-critico», ad opera di Ernst Mach [Mac]. In questo celebre trattato, Mach sosteneva la necessità logica di rinunciare al concetto di spazio assoluto (e come conseguenza anche al concetto di moto assoluto). Hendrik A. Lorentz, Poincaré ed Einstein sostennero in seguito la validità del principio di relatività anche per i fenomeni elettromagnetici, e non solo per la Meccanica, estendendo così il principio di relatività galileiano ad un gruppo di trasformazioni più ampio, rispetto alle quali le equazioni di Maxwell risultavano invarianti. Tutti questi contributi, e quello di Poincaré in particolare, si inseriscono infatti nell'ambito di un approccio generale allo studio dei problemi fisici suggerito dalla nuova idea di Geometria formulata da Felix Klein nel cosiddetto «Programma di Erlangen» [Kle], secondo il quale ogni geometria su un certo spazio (anche multidimensionale) è definita e completamente caratterizzata dal suo specifico gruppo di invarianza (vedi anche [Wey], già citato).

Il postulato fondamentale della costanza della velocità della luce (nel vuoto) era stato suggerito ad Einstein (cfr. [Nor]) da riflessioni basate appunto sulla necessità dell'invarianza dei fenomeni elettromagnetici rispetto ad un gruppo di trasformazioni dello spazio-tempo più esteso del gruppo di Galilei — quello oggi detto di Lorentz (il fisico olandese che, già nel 1895, sulla base dell'esistenza di una velocità assoluta fondamentale aveva suggerito le trasformazioni che oggi portano il suo nome, secondo le quali le lunghezze subiscono contrazioni ed i tempi dilatazioni proporzionali ad un fattore che decresce al crescere della velocità). Alla base della teoria della Relatività Speciale è dunque la richiesta che le equazioni formulate da Maxwell per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici restino invarianti rispetto ad una trasformazione di coordinate di tipo lorentziano (corrispondente, dal punto di vista fisico, alla richiesta che i fenomeni elettromagnetici siano indipendenti dalla scelta del riferimento in cui è posto l'osservatore che conduce le misure fisiche). Questo punto di vista sarebbe stato successivamente formalizzato matematicamente da Hermann Minkowski [Min], il quale, nel 1908, avrebbe finalmente introdotto il concetto di spazio-tempo quadridimensionale, postulando tra l'altro una coordinata immaginaria e definendo l'elemento metrico infinitesimo invariante di una varietà pseudo-riemaniana con segnatura lorentziana $(+, +, +, -)$, atta a descrivere il già citato «cono luce», che permette di distinguere tra vettori di tipo spazio, di tipo tempo e di tipo luce, ed implementare quindi il concetto di causalità [SaWu].

In un suo celebre articolo pubblicato sui «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» nel 1906 (ma presentato nel 1905 prima della pubblicazione dell'articolo di Einstein sulla Relatività Speciale), Poincaré già affrontava in maniera chiara il problema del principio di azione e reazione, sottolineando, infatti, che le equazioni di Maxwell implicano un tempo finito di propagazione delle perturbazioni e quindi un tempo finito per la propagazione di azione e reazione, che non si possono pertanto comunicare simultaneamente. Questo implica che la causalità — in Newton determinata dall'interazione «a distanza» tra forze, che attribuisce un significato fisico univoco alla successione temporale degli eventi (consentendo la definizione assoluta della simultaneità tra eventi distanti) — è ora determinata dal campo, che la propaga invece con velocità finita. Poincaré definiva inoltre il tempo locale in modo operativo e dandogli un preciso significato fisico, cioè collegandolo ad un'effettiva procedura di *sincronizzazione*. Il suo merito fondamentale in questo ambito è stato pertanto quello di avere per primo enunciato il *principio di relatività*, ovvero l'invarianza di tutte le leggi fisiche rispetto ad un riferimento inerziale.

Nel famoso lavoro del 1905, Einstein notò che l'assunzione lorentziana di un etere (in uno stato di quiete assoluta) come supporto sostanziale del campo implica un'asimmetria tra forza elettromotrice e campo elettrico nell'interpretazione dell'effetto di induzione magnetica; cfr. anche [Nor]. Mettendo insieme il principio di relatività ed il principio di costanza della velocità della luce, Einstein fondò così *l'elettrodinamica dei corpi in movimento* [Ein], basandola sulla teoria elettromagnetica di Maxwell per i corpi in quiete. Il campo come elemento fondamentale della teoria diventa allora lo strumento atto a giustificare la validità del principio di relatività per tutte le leggi fisiche. Al concetto di etere in quiete assoluta, secondo Einstein, non corrisponde nessuna proprietà dei fenomeni, né in Meccanica, né in elettrodinamica [Ein, Jam].

Poincaré, oltre ad aprire indirettamente la strada alla *teoria topologica dei campi* [Wit], partendo dallo studio dei sistemi a molti corpi arriverà con la sua opera scientifica a fondare lo studio qualitativo e globale delle equazioni di campo, introducendo concetti che saranno poi alla base della moderna Topologia Algebrica, come ad esempio il concetto di (primo) *gruppo fondamentale* di uno spazio topologico. Il problema della compatibilità delle equazioni di Maxwell con la descrizione del campo sarà per lunghi anni l'obiettivo che molti studiosi si porranno dopo la pubblicazione della Relatività Speciale di Einstein, nel 1905, e tutta l'Europa sarà pervasa — in quelli che possono essere definiti gli anni d'oro (sia della Matematica che della Fisica Teorica) — da un'attività intellettuale profonda e prolifica, basata anche sul ruolo centrale svolto dalla scuola di Goettingen sugli *invarianti differenziali* ed *integrali*, che permetterà un continuo confronto tra le idee e i progressi compiuti. Ciò porterà nel 1915, per due strade diverse, alla pubblicazione, a pochi giorni di distanza, delle equazioni di evoluzione della Gravitazione, ad opera di Hilbert per primo e poi di Einstein.

La scuola fondata da Klein [Kle] ad Erlangen aveva infatti prodotto importanti risultati nell'ambito dello studio degli invarianti differenziali, ed avrebbe visto eccellere, per quanto riguarda la Fisica Matematica, la studiosa tedesca Emmy Noether [Noe], che nel 1918 dimostrò la fondamentale relazione che intercorre tra proprietà di invarianza di una lagrangiana e l'esistenza di *quantità conservate* associate alla lagrangiana stessa; vedi anche [FaFr] per una esposizione moderna e molte nuove applicazioni di tale teoria. Sulla base dei continui contatti avuti proprio in Goettingen con Emmy Noether, la deduzione variazionale delle equazioni del campo elettromagnetico e gravitazionale sarebbe stata ricavata da Hilbert, come si è detto, già nel 1915 [Hil]. All'origine di tali importanti sviluppi — ed una delle basi fondamentali degli studi della scuola di Goettingen — si può ritenere il

Calcolo Tensoriale, sviluppato da numerosi matematici, tra cui citeremo solo E. Bruno Christoffel, e gli italiani Gregorio Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita e Luigi Bianchi (si veda anche [Ber]). A partire dal 1869 Christoffel generalizza infatti i risultati di Riemann e, nel caso delle superfici bidimensionali, introduce per primo l'espressione di quella che noi oggi chiamiamo la *derivata covariante* di un campo di vettori; a partire da questo risultato, nel 1887 Ricci definisce la nozione di campo di tensori su una varietà differenziabile ed introduce l'operazione generale di derivazione di un tensore. In particolare, il tensore metrico di una varietà riemanniana ha una derivata covariante nulla e la curvatura della metrica soddisfa alcune identità fondamentali, oggi dette «*identità di Bianchi*». Allo stesso tempo, anche il «difetto di simmetria» (ovvero la non commutabilità) nell'ordine di derivazione per le derivate covarianti dei tensori sarà misurato tramite il tensore di curvatura (o tensore di Riemann-Christoffel). La tappa successiva nello sviluppo della Geometria Riemanniana è dovuta a Levi-Civita il quale, nel 1917, darà infine una definizione di *trasporto parallelo* per un campo di vettori lungo una curva sulla varietà, in termini dell'annullarsi della derivata covariante del campo di vettori lungo la curva stessa; come vedremo poco oltre, questo fondamentale lavoro avrebbe aperto la strada alla *teoria delle connessioni*.

Molte delle definizioni e dei risultati generali del calcolo tensoriale su una varietà riemanniana non fanno in realtà intervenire l'ipotesi che la forma quadratica che definisce l'elemento metrico sia definita positiva, così che questi si possono in genere estendere anche ad una struttura pseudo-riemanniana, ovvero con segnatura algebrica non positiva. Questa osservazione ha un'importanza che và ben al di là della matematica pura, in ragione della già citata interpretazione data da Minkowski nel 1908 della Relatività Ristretta per mezzo di una forma quadratica avente segnatura non euclidea [SaWu].

A partire dal 1915, Einstein può quindi sviluppare, in collaborazione con Marcel Grossmann, la teoria della Relatività Generale [Ein], partendo dal postulato che lo spazio-tempo sia una varietà pseudo-riemanniana in cui l'elemento metrico abbia una segnatura minkowskiana, ma — diversamente dallo spazio di Minkowski, che è «piatto» (ovvero a curvatura nulla) — sia ora caratterizzato da una curvatura diversa da zero. Einstein perviene quindi alle ben note equazioni che oggi portano il suo nome e che reggono la dinamica del campo gravitazionale, interpretato come metrica dello spazio-tempo. Esse, di natura non lineare, legano la metrica, attraverso la sua curvatura, alla distribuzione della materia nello spazio-tempo, che, in ossequio e generalizzazione della meccanica dei mezzi continui, viene opportunamente rappresentata dal *tensore degli sforzi*. La non linearità di tali equazioni esprime proprio il fatto che la curvatura dello spazio-tempo (e dunque le sue proprietà metriche) e la distribuzione della materia (e dunque dell'energia) sono legate in modo tale che l'una influenzi l'altra e viceversa; in tale interazione il tensore degli sforzi soddisfa una legge di conservazione covariante (la sua divergenza covariante è nulla) che, da un lato, corrisponde alle già citate identità di Bianchi per la curvatura e, dall'altro, alla possibile esistenza di simmetrie alla Noether e, in ultima analisi, allo studio delle proprietà energetiche ed entropiche del campo gravitazionale (ancor oggi di grande attualità, specie in relazione alle cosiddette soluzioni del tipo «buco nero»; si veda, per esempio, [Haw, GiMa]). Con l'introduzione del principio di equivalenza il concetto di sistema inerziale perde dunque il suo significato oggettivo: le leggi naturali devono risultare covarianti rispetto a trasformazioni continue ed arbitrarie delle coordinate (*principio di covarianza generale*).

Alle stesse equazioni, come già detto, era pervenuto Hilbert pochi giorni prima, seguendo però un approccio di tipo variazionale, secondo il quale il tensore degli sforzi si desumeva come «derivata funzionale» della Lagrangiana di interazione con la material [Hil]. Nel 1915, infatti, subito prima della formulazione covariante della gravitazione di Einstein, Hilbert pubblicò in una comunicazione all'Accademia delle scienze di Goettingen la sua prima nota sui «Fondamenti della Fisica» che egli avrebbe poi continuato ad elaborare fino a metà degli anni venti. In questa nota Hilbert deduceva le equazioni della gravitazione da un principio di minima azione, mentre Einstein sarebbe pervenuto allo stesso risultato poco tempo dopo, ma a partire dai summenzionati principii di relatività e covarianza e da un *Ansatz*, ovvero un'ipotesi di lavoro. Hilbert, tra l'altro, come semplice applicazione della teoria degli invarianti, aveva anche ottenuto le equazioni di Maxwell sotto forma di identità. Hilbert, insieme con Poincaré, fu tra i primi a proporre un approccio mirante all'unificazione di elettromagnetismo e gravitazione (vedi [FaFr]); Einstein in un primo momento si mostrò scettico su tale possibilità, per poi dedicarvisi in seguito, purtroppo senza esito, per tutto il resto della sua vita. Le interazioni di Einstein con Hilbert furono molteplici; il fisico Einstein visitò Goettingen agli inizi del 1915 e vi tenne un seminario, nonché diverse discussioni con l'illustre matematico, che continuarono durante tutto il 1915 attraverso un'intensa discussione epistolare [Ein]. Come precedentemente accennato oltre alle equazioni per il campo gravitazionale Hilbert dedusse anche le equazioni per il campo elettromagnetico in forma di identità conseguenti alle equazioni della stessa gravitazione, per cui fu (erroneamente) indotto a ritenere che i fenomeni elettrodinamici potessero essere una conseguenza della gravitazione [Hil].

5. – Sviluppi ulteriori e recenti.

La formalizzazione dovuta a Minkowski, con la rappresentazione del cono luce, evidenzia sia il carattere relativo della simultaneità sia il carattere limite della velocità della luce, enucleando al contempo i rapporti con il concetto di causalità. Come già evidenziato alla fine del par. **3**, due eventi, infatti, possono essere legati da una relazione causa-effetto solo se il loro intervallo è di tipo tempo (conseguenza, questa, dell'impossibilità per le interazioni di propagarsi con velocità maggiore di quella della luce). I postulati di base della Relatività Ristretta implicano dunque una definizione di intervallo (metrico) invariante, mentre la *struttura conforme* della teoria, cioè l'esistenza di una famiglia globalmente coerente di coni luce, si ritroverà ancora in Relatività Generale, più debolmente, nella forma di struttura «*localmente conforme*». Nel suo famoso articolo del 1916, in cui viene definitivamente formulata la teoria della Relatività Generale, Einstein afferma, infatti, che non esiste, in presenza di un campo gravitazionale, un riferimento inerziale (lorentziano) globale; il «principio di equivalenza» che vi viene formulato significa, in poche parole, che lo spazio-tempo è solo localmente una varietà di Minkowski con metrica iperbolica.

In Relatività Generale il *principio di equivalenza* implicherà allora che, in un opportuno sistema di riferimento (locale), una variazione cinematica (l'accelerazione) modifica o addirittura annulla la gravità, che è una proprietà dinamica delle masse. Questo equivale a dire, in termini matematici, che è possibile trovare un sistema di coordinate in cui la curvatura dello spazio-tempo si annulli e la connessione metrica sia integrabile. La cinematica è dunque interpretabile come una geometria quadridimensionale e la gravitazione come una geometria intrinseca dello spazio-tempo considerato (le cui dinamiche sono *moti geodetici*, ovvero tali da rendere estremo — in ossequio all'interpretazione di Gauss — un integrale che ne esprime, in un appropriato spazio funzionale, la lunghezza nello spazio-tempo). Lo spazio si concepisce quindi capace di interazioni dinamiche con il sistema della distribuzione della materia, considerato più propriamente fisico; il principio di relatività viene così generalizzato all'interno di una teoria di campo.

Sotto l'influenza della Relatività Generale, ed in stretta correlazione con essa, a partire dal 1918, lavori successivi di Hermann K.H. Weyl [Wey] e soprattutto di Elie J. Cartan [Car] tenderanno ad arricchire il quadro pseudo-riemanniano, a seguito dell'osservazione elementare ma profonda che nella nozione di derivazione covariante intervengono solo i simboli di Christoffel attraverso le loro proprietà di trasformazione. Su una varietà differenziabile si può dunque introdurre una nuova struttura geometrica, presto detta *«struttura affine»*, definita da un nuovo oggetto che fu ben presto chiamato una *«connessione»* (lineare). Una connessione lineare — concetto introdotto dal matematico italiano Tullio Levi-Civita nell'ambito dei sui già citati studi sul trasporto parallelo dei vettori — è un'opportuna famiglia di n elevato al cubo funzioni locali (essendo n la dimensione dello spazio in cui essa viene introdotta), che opportunamente generalizzano i simboli di Christoffel legati all'esistenza di una metrica [SaWu].

Le successive idee di Cartan [Car] sono di natura ancora più prettamente geometrica. Strettamente legate ai suoi metodi basati sull'uso del calcolo differenziale esterno e sulla generalizzazione di *sistema di riferimento mobile*, tramite l'introduzione di un gruppo G diverso dal gruppo lineare generale, esse condurranno poi — anche in vista di applicazioni a mezzi continui con strutture microlocali («à la Cosserat»)

— a definire, intorno al 1925, quelle che oggi si chiamano *connessioni principali*; queste, intorno agli anni Quaranta, sono state messe sotto una forma ancor più precisa e rigorosa soprattutto grazie ai lavori di Hassler Whitney e Charles Ehresmann, svolti in un contesto geometrico basato sulla moderna nozione di *spazio fibrato* [Hus].

Lo spazio fibrato è una struttura geometrica che opportunamente permette di generalizzare il concetto di funzione; esso, infatti, *localmente* rappresenta il grafico di una funzione nella forma del prodotto cartesiano tra un aperto della varietà di base (dove sono definite le variabili indipendenti) e la varietà di fibra (dove sono definite le variabili dipendenti ovvero i campi fisici). Un fibrato *non banale*, tuttavia, ha una struttura più ricca in quanto esso *non è* globalmente un prodotto cartesiano; [Hus]. In quanto tale, questa struttura geometrica si presta perfettamente alla descrizione e allo studio di problemi di carattere globale, quali *di fatto* — in virtù dei *Principii di Covarianza Generale* e *di Equivalenza* – si assume debbano essere quelli inerenti allo studio della Fisica; vedi, per esempio, [FaFr]. Il Principio di Covarianza Generale infatti, postulando il carattere tensoriale di tutte le leggi fisiche implica necessariamente che le leggi della fisica — seppure descrivibili localmente — lo siano tuttavia in un modo tale che le informazioni locali possano poi essere globalizzate in maniera opportuna. Per tale motivo, la *Teoria dei Fasci* — ed i suoi sviluppi in Topologia Algebrica — hanno successivamente assunto un ruolo fondamentale anche nella formulazione del classico «calcolo delle variazioni» in Fisica Matematica. Come in tutti i problemi globali che riguardino l'uso di fibrazioni, anche in Relatività non è insolito incontrare *ostruzioni topologico-differenziali*, le quali si traducono attraverso il moderno concetto di *classi caratteristiche* (come, ad esempio, le classi di Chern, di Pontrjagin, di Stiefel-Whitney; [Nak]). A titolo esemplificativo, ricordiamo due casi interessanti:

1) il fatto che la metrica debba essere a segnatura locamente lorentziana impone restrizioni topologiche alla varietà dello spazio tempo. Infatti, in una varietà esiste una metrica lorentziana globale se e solo se esiste un campo globale mai nullo di vettori di genere tempo; e questo accade, nel caso di varietà compatte, se e solo se è nulla la caratteristica di Euler-Poincaré dello spazio-tempo medesimo.

2) uno spazio-tempo metrico non compatto ammette un campo globale di *tetradi nulle* se e solo se esso ammette una *struttura spinoriale* (vedi, p.e., [FaFr]); ciò equivale all'annullarsi nello spazio-tempo della seconda classe di Stiefel-Whitney.

D'altro canto, una formulazione delle interazioni fisiche coerente con la Relatività Generale ha portato allo sviluppo delle cosiddette *teorie naturali* di campo, in cui le trasformazioni infinitesime delle coordinate locali della varietà di base definiscono in modo unico le corrispondenti trasformazioni infinitesime dei campi fisici [FaFr]. Un'ulteriore fondamentale generalizzazione riguarda un'analoga costruzione a partire dalle trasformazioni infinitesime delle coordinate locali di un *fibrato principale* con gruppo di struttura G per ottenere, in maniera unica, le corrispondenti trasformazioni dei campi: si tratta delle cosiddette *teorie gauge-naturali* [FaFr], che si basano su una costruzione geometrica che generalizza le *teorie di gauge* [MaMa] — che, come vedremo fra poco sono, a loro volta, generalizzazioni della teoria del campo elettromagnetico — nel tentativo di fornire un contesto adatto a descrivere l'interazione tra gravitazione ed elettromagnetismo (e sue generalizzazioni come la teoria di Yang-Mills).

Gli sviluppi successivi della Fisica Matematica in questo contesto porteranno infatti, nei giorni nostri, alla formulazione del *Calcolo delle Variazioni su getti* di ordine finito di varietà fibrate, in cui un ruolo fondamentale è svolto dall'*invariante integrale di Poincaré-Cartan*, nonché alla citata formulazione delle teorie di campo gauge-naturali, con importanti sviluppi per quanto concerne i *Teoremi di Noether* e la definizione covariante delle quantità conservate, quali energia, quantità, momento angolare e cariche «di gauge» (cfr. ancora [FaFr]). La parola «*gauge*» fu in effetti coniata da Hermann Weyl in un suo sfortunato tentativo di formulare nel 1919 una teoria unitaria elettro-gravitazionale. Malgrado il tentativo si rivelasse presto infruttuoso, l'idea di assegnare le «cariche» particellari ad un gruppo «di gauge» esterno allo spazio-tempo tornò in voga negli anni '50, a seguito della scoperta di ulteriori forze fisiche fondamentali (elettrodebole e nucleare forte). Le cosiddette «*teorie di gauge*», sviluppate a partire dalle idee di C.N. Yang e R.L. Mills (premi Nobel per la fisica nel 1957), generalizzano di fatto l'elettromagnetismo di Maxwell a campi i cui contenuti particellari godono di simmetrie «interne» descritte da gruppi di matrici complesse. L'opinione corrente della Fisica Teorica è che le quattro interazioni fondamentali siano oggi descritte, anche attraverso i paradigmi della covarianza generale e dell'invarianza di gauge, dal cosiddetto *«modello (particellare) standard»*.

I primi tentativi di unificazione dei campi classici, volti ad interpretare, oltre al campo gravitazionale, anche il campo elettromagnetico (ed in seguito altri campi fisici) come parte della struttura geometrica dello spazio-tempo, dopo Einstein, Weyl e Cartan si baseranno anche sulla possibilità di interpretare come campi strutture metriche, metrico-affini ed affini degli spazi fibrati. I più recenti sviluppi di questa nuova interpretazione geometrica dello spazio e delle strutture fisiche nel campo della fisica teorica contemporanea riguardano oltre alle "teorie di gauge", le ancor più moderne *teorie di campo* "*conformi*", le *teorie di* "*stringa*" e di "*superstringa*"; cfr. [Nak, Wit].

Bisogna poi accennare al ruolo determinante svolto dagli invarianti topologici di una teoria fisica formulata nel suddetto contesto globale. Il ben noto metodo di Chern-Weil permette di calcolare certi invarianti topologici del fibrato principale (definibili anche indipendentemente) attraverso la forma di curvatura di una connessione principale. Conseguentemente, è chiaro che la topologia costituisce il limite delle possibilità geometriche realizzabili per mezzo delle connessioni di un fibrato; per esempio, un fibrato per il quale i detti invarianti non svaniscono non permette connessioni piatte. Gli sviluppi ulteriori riguardano, come già accennato, la Topologia Differenziale e la teoria topologica dei campi [MaMa, Nak]. Una rassegna dettagliata, aggiornata fino al 1978 e ricca di riferimenti bibliografici, si trova ad esempio in [Fra].

L'introduzione di tecniche di Topologia Differenziale in Fisica, dovuta a numerosi studiosi, tra cui possiamo ricordare, in particolare, R. Penrose e S. Hawking [PeHa], è soprattutto legata a problemi di casualità, a problemi di natura globale ed alle definizioni e formalizzazioni del concetto di singolarità per uno spazio-tempo. Gli studi sulle proprietà legate alla *causalità* e *cronologia* richiedono l'intervento delle proprietà locali e globali delle geodetiche nulle e temporali di uno spazio-tempo; con il proposito di rendere sempre più chiaro il ruolo da esse giocato, sono stati quindi introdotti alcuni concetti, quali – fondamentali sia per la comprensione della geometria globale dello spazio-tempo sia per le tecniche di analisi relative allo studio dei sistemi di equazioni di tipo iperbolico — quelli di *passato* e *futuro di un punto* (o di una sottovarietà dello spazio-tempo) e di *insiemi acronali* [Haw]. Con il passaggio alla causalità globale da quella locale, infatti, tecniche ancora più raffinate si sono spesso rivelate utili: teoremi di immersione, teorema di Sard e vari metodi di topologia combinatoria sono stati largamente utilizzati per lo studio degli insiemi passati e futuri, per la definizione degli spazi-tempo cosiddetti *fortemente causali*, nonché per fornire criteri di esistenza di geodetiche nulle e di curve causali chiuse [Haw]. Si apre in questo contesto tutto un vasto studio, di carattere geometrico-differenziale ed anche analitico, riguardante l'estensione al caso di metriche indefinite di svariati teoremi già noti nel caso di metriche strettamente riemanniane: tra essi citiamo *i criteri di completezza geodetica*, i *teoremi di Jacobi* sui punti coniugati, la *teoria di Morse* e i suoi legami con i campi di Jacobi lungo le geodetiche. Questa parte della Geometria e della Topologia Differenziale, riguardante il caso indefinito, era praticamente quasi inesplorata prima che l'esigenza di sue applicazioni in Relatività ne stimolasse approfonditi studi; vedi ancora [Fra].

Anche la teoria delle azioni dei gruppi di Lie su varietà differenziabili trova vaste applicazioni in Relatività ed in particolare nello studio di (famiglie di) soluzioni esatte aventi particolari proprietà di simmetria: per esempio, nei cosiddetti *Universi di Bianchi*, la cui fondamentale importanza in certe questioni di astrofisica relativistica è diventata sempre più rilevante. Essi costituiscono, infatti, la classe di soluzioni esatte per le equazioni di Einstein (nel vuoto) che presentino caratteri di isotropia e di omogeneità nelle sezioni tridimensionali di tipo spaziale. La loro caratterizzazione si basa essenzialmente sulla classificazione di tutte le possibili varietà tridimensionali con metrica definita positiva, che ammettano gruppi continui di movimenti; quest'ultima classificazione – che costituisce invero un profondo e interessante capitolo della Geometria Differenziale riemanniana — risale agli inizi del secolo XX grazie all'opera del grande matematico italiano Luigi Bianchi [Bia].

Anche l'Analisi Matematica, come già accennato, spesso entra in svariati problemi di natura analitico-geometrica suggeriti o aperti dalla Relatività Generale (citeremo, per esempio, l'intervento dell'Analisi Complessa per funzioni di più variabili nella teoria dei *twistors* e delle varietà kaehleriane, e l'intervento dell'Analisi Funzionale in problemi globali di esistenza e unicità di soluzioni esatte, oppure relativi alla positività dell'energia gravitazionale). Non ultimi per importanza — ma più recenti nella scansione temporale – devono poi essere citati (cfr. anche [Fra]) gli sviluppi di Analisi e di Geometria Differenziale in dimensione infinita — soprattutto legati alle equazioni di Einstein — nonché le tecniche di discretizzazione simpliciale e di strutture reticolari, soprattutto legate ai moderni problemi di quantizzazione (cfr. [Rov]). Tuttavia, il campo più affascinante della Relatività Generale in cui l'Analisi entra come strumento principale è certamente costituito dal *problema di Cauchy per le equazioni di Einstein.* Essendo, infatti, queste ultime, equazioni alle derivate parziali e, come tali, non direttamente risolubili (salvo casi assai particolari) – ma comunque suscettibili di una formulazione ai dati iniziali — il problema di Cauchy in Relatività assume tuttavia due caratteristiche che lo distinguono nettamente da analoghi problemi riguardanti altre teorie fisiche: la *non linearità delle equazioni gravitazionali*, da un lato, e dall'altro il fatto stesso che l'oggetto incognito sia la metrica dello spazio-tempo, cioè la struttura geometrica stessa di quest'ultimo; fatti che rendono assai più complessa e delicata la questione di una corretta e coerente formulazione del problema di Cauchy stesso, soprattutto in presenza di singolarità o su superfici iniziali degeneri (coni luce o superfici tangenti ai coni luce). Tali problemi di natura analitica globale hanno portato allo sviluppo di un intero settore dell'Analisi Globale — e precisamente tutto ciò che ivi concerne lo studio delle cosiddette *varietà globalmente iperboliche* — riportando così fortemente l'attenzione ancora una volta sul ruolo svolto in Fisica dalla Geometria e dalla Topologia Differenziale; cfr. ancora [Fra].

La Fisica Matematica, in questo modo, non solo eleva, come già predetto da Riemann, le nuove concezioni della Geometria al ruolo di guida per la comprensione del mondo fisico, ma, seguendo Weyl, essa segna addirittura la fine dell'idea che possa esistere una Geometria indipendente dalla Fisica.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano il Prof. Raffaele Palese per le molto proficue discussioni sui fondamenti della Relatività Generale ed in particolare sui contenuti epistemologici concernenti i concetti di tempo, spazio e materia che vi sono alla base.

Questo lavoro è stato realizzato con il supporto di GNFM-INdAM, MIUR (PRIN 2003), Università di Torino. Uno degli autori (M.F.) è stato supportato parzialmente anche dall'INFN, iniziativa specifica NA12.

BIBLIOGRAFIA

[Ber] S. BERGIA, *Il contributo italiano alla relatività*, in questo Volume.

[Bia] L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa (1918).

[Car] E. CARTAN, Ann. Ec. Norm. **40** (1923) 325; Ann. Ec. Norm. **41** (1924) 1; Ann. Ec. Norm. **42** (1925) 17.

[Cas] E. CASSIRER, *Storia della filosofia moderna*, Il Saggiatore, Milano (1968).

[Ein] The collected papers of A. Einstein, John Stachel Editor (1989); A. Einstein, *On the electrodynamics of moving bodies*, in «*The collected papers of A. Einstein*», John Stachel Editor (1989), 276-295; A. Einstein, Prefazione a: M. Jammer, «*Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*», Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1954).

[Fra] M. FRANCAVIGLIA, *Metodi e prospettive matematiche in Relatività generale.* Proceedings of the 3rd National Meeting on General Relativity and Gravitation Physics, (Torino, 1978). Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **114** (1980/81), suppl., 93-109.

[Fra2] M. FRANCAVIGLIA, *Poincaré, Hilbert ed Einstein e le grandi idee della fisica matematica del primo Novecento*, Voce dell'Enciclopedia Treccani, Storia della Scienza (in corso di stampa).

[FaFr] L. FATIBENE - M. FRANCAVIGLIA, *Natural and gauge natural formalism for classical field theories. A geometric perspective including spinors and gauge theories*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).

[Far] M. FARADAY, in E. Bellone, *Spazio e tempo nella nuova scienza*, La Nuova Italia Scientifica (1994).

[FrPa] M. FRANCAVIGLIA - M. PALESE, *Geometria e Fisica da Descartes ad Einstein*, in «*Descartes e i vortici del dubbio*», Università di Perugia (1999); M. FRANCAVIGLIA - M. PALESE, *Il ruolo della geometria non euclidea nello sviluppo delle teorie relativistiche della gravitazione*, in Atti del Convegno in memoria di Beltrami, Milano (2005 - in corso di stampa).

[GiMa] R. GIAMBÒ - G. MAGLI, *Buchi neri e singolarità nude*, in Boll. Un. Mat. Ital. Sez. A, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 37-50.

[Haw] S. HAWKING - G.F.R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).

[Hil] D. HILBERT, *Hilbert's invariant theory papers*. Translated from the German by Michael Ackerman. With comments by Robert Hermann. Lie Groups: History, Frontiers and Applications, VIII. Math Sci Press, Brookline, Mass., (1978); D. HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band. Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, nebst einer Lebensgeschichte*. Chelsea Publishing Co., New York (1965).

[Hus] D. HUSEMOLLER, *Fibre bundles.* Third edition. Graduate Texts in Mathematics, **20**. Springer-Verlag, New York (1994).

[Kle] F. KLEIN, Le programme d'Erlangen. (traduzione francese) *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Collection *«Discours de la Méthode»,* Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., (1974).

[Jam] M. JAMMER, *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1954).

[Lan] C. LANCZOS, *The Einstein decade (1905-1915*), P. Elek Ltd., London (1974).

[Mac] E. MACH, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, Torino (1968).

[MaMa] K. B. MARATHE - G. MARTUCCI, *The mathematical foundations of gauge theories.* Studies in Mathematical Physics, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1992).

[Max] J.C. MAXWELL, *Trattato di elettricità e magnetismo*, UTET, Torino (1973).

[Min] H. MINKOWSKI, *Space and time*, in *The principle of relativity,* A. Einstein *et al.*, Dover Publications Inc. (1952).

[Nak] M. NAKAHARA, *Geometry, topology and physics.* Second edition. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics, Bristol (2003).

[Noe] E. NOETHER, *Invariant variation problems*. Translated from the German (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II 1918, 235-257). *Transport Theory Statist. Phys.* 1 (1971), no. **3**, 186-207.

[Nor] J.D. NORTON, *Einstein's investigations of Galilean covariant electrodynamics prior to 1905*, preprint (2005).

[Pal] R. PALESE, *Spazio, tempo e causalità nella storia della Fisica*, tesi di Laurea, Università di Lecce (1996); M. PALESE - R. PALESE, *Il concetto di* *campo come elemento irriducibile in relatività generale*, in Atti del congresso della Società Italiana di Fisica ed Astronomia (Como 1998), Università di Milano (1999).

[Pau] W. PAULI, *Theory of Relativity*, Pergamon Press (1967).

[PeHa] R. PENROSE, *Twistor theory, its aims and achievements*, in «*Quantum Gravity*», C. Isham et al. Eds. Clarendon Press, Oxford (1975); R. PENROSE, *Thecniques of differential topology in relativity*, Reg. Conf. Series in Appl. Math., SIAM, Philadelphia (1972).

[Poi] J.H. POINCARÉ, *Scritti di Fisica Matematica,* UTET (1967).

[Rei] H. REICHENBACH, *Filosofia dello spazio e del tempo*, Feltrinelli (1977).

[Rie] G.F.B. RIEMANN, *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry* (1866), traduzione inglese da Nature, Vol. **VIII**, n. 183,184.

[Rov] C. ROVELLI, *Half way through the woods*, in «*The Cosmos of Science*», J. Earman and J.D. Norton eds., University of Pittsburgh Press: Universitaets Verlag Konstanz (1997); C. ROVELLI, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[SaWu] R.K. SACHS - H.H. WU, *General relativity for mathematicians*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 48. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).

[Wey] H. WEYL, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton (1952), ed. italiana: *La simmetria*, Feltrinelli (1981); H. WEYL, *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*. Seventh edition. Edited and with a foreword by Jürgen Ehlers. Heidelberger Taschenbücher [Heidelberg Paperbacks], 251. Springer-Verlag, Berlin (1988).

[Wit] E. WITTEN, *Topological quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), no. 3, 353-386.

Mauro Francaviglia - Marcella Palese, Dipartimento di Matematica
Università di Torino, Via C. Alberto 10, I-10123 Torino
e-mail: mauro.francaviglia@unito.it
e-mail: marcella.polesi@unito.it