Maurizio Pratelli

Alcuni problemi matematici legati alla gestione ottima di un portafoglio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.3, p. 593–607.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_593_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 593-607

Alcuni problemi matematici legati alla gestione ottima di un portafoglio.

MAURIZIO PRATELLI (*)

Summary. – *In this talk, main ideas concerning the classic problem of portfolio optimization (also known as Merton's problem) are illustrated. Methods of stochastic control are compared to those of infinite-dimensional convex duality.*

Sunto. – *In questa conferenza, vengono esposte le idee essenziali che stanno alla base del classico problema di gestire un portafoglio in modo da rendere massima l'utilità media. I metodi tipici del controllo stocastico sono confrontati con le idee della dualità convessa infinito-dimensionale.*

1. – Introduzione.

Scopo di questa esposizione è presentare brevemente un classico problema della moderna finanza matematica: gestire un portafoglio in modo da rendere massima la speranza matematica del valore finale di questo portafoglio, rispetto ad una opportuna funzione di utilità.

Questo problema è anche noto come il *problema di Merton*, dal nome dello studioso che per primo lo ha formalizzato e studiato ottenendo risultati significativi (vedi ad esempio [16]).

Naturalmente il problema che sopra ho descritto informalmente, per essere affrontato con tecniche matematiche, deve essere formalizzato con una opportuna modellizzazione.

L'utilità dell'agente che gestisce il portafoglio è rappresentata da una funzione $U(x)$ che soddisfi alle condizioni sotto elencate: è ragionevole supporre che agenti diversi abbiano una diversa attitudine di fronte al rischio, e questo viene modellizzato prendendo in considerazione funzioni di utilità diverse.

Tutte però sono supposte soddisfare le seguenti proprietà:

$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è *crescente su* $\mathbb{R}$, *continua* su $\{U > -\infty\}$, *differenziabile e strettamente concava* all'interno di $\{U > -\infty\}$, e la cosiddetta *utili-*

(*) Conferenza tenuta a Milano l'11 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

tà marginale (cioè la derivata U') tende a zero quando il capitale tende all'infinito:

$$U'(+\infty) := \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0 . \tag{1.1}$$

Queste condizioni, come è noto, hanno un buon significato economico; in particolare la convergenza a zero dell'utilità marginale è anche essenziale per ottenere un teorema generale di esistenza della soluzione del problema.

In questa esposizione mi limiterò per semplicità al caso in cui $U(x) = -\infty$, per $x < 0$, mentre $U(x) > -\infty$, per $x > 0$; si suppone inoltre che U soddisfi la cosiddetta *condizione di Inada*, cioè

$$U'(0) := \lim_{x \searrow 0} U'(x) = \infty . \tag{1.2}$$

Supponiamo ora di poter rappresentare il valore all'istante finale T del portafoglio, in un modo opportuno, su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$: più precisamente indichiamo con $\Psi(x)$ l'insieme dei valori finali (secondo le diverse possibili strategie) dei portafogli con capitale iniziale x. Si tratta di determinare, per $x > 0$, la funzione

$$u(x) = \sup_{X \in \Psi(x)} \boldsymbol{E}[U(X)] = \sup_{X \in \Psi(x)} \int_\Omega U(X)\, d\boldsymbol{P} \tag{1.3}$$

e, laddove possibile, chiarire se questo estremo superiore è in realtà un massimo e caratterizzare l'elemento massimizzante nell'insieme $\Psi(x)$.

La modellizzazione degli attivi finanziari (azioni, titoli) e del relativo portafoglio che segue alla gestione (in tempo continuo) di questi titoli pone problemi più seri, e diverse modellizzazioni portano a tecniche radicalmente differenti nella soluzione del problema.

Nel secondo paragrafo esporrò l'approccio secondo il quale il *processo stocastico* $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ che rappresenta l'evoluzione aleatoria dei prezzi degli attivi è supposto essere un *processo di diffusione*: in tali ipotesi il problema può essere affrontato come un problema di *controllo stocastico*. Questo è stato l'approccio iniziale di Merton, che ha poi portato e continua a portare notevoli sviluppi.

Queste tecniche di controllo stocastico, che possiamo chiamare *analitiche*, si possono applicare solo in presenza di processi di Markov: nel terzo paragrafo esporrò il metodo della *dualità convessa infinito-dimensionale*, che può essere utilizzato con processi stocastici più generali.

Il problema di gestione di un portfoglio avente speranza massima rispetto ad una opportuna funzione di utilità (o, come si dice usualmente, di «*massimizzazione dell'utilità*»), come l'ho descritto sopra, è nella sua versione più semplice: ne esistono diverse varianti e generalizzazioni, per le quali faccio riferimento alla ricca bibliografia di [16] e [22]. Lo scopo di questa mia breve esposizione è solo raccontare alcune delle idee che sono alle base di questi numerosi lavori.

2. – L'approccio con metodi di controllo stocastico.

L'approccio originale sviluppato da Merton (vedi [14] e [15] per gli articoli originali ed [16] per una esposizione completa) considera come punto di partenza il cosiddetto *modello di Samuelson* ed affronta il problema con tecniche di controllo stocastico: per una esposizione più generale e scritta con stile matematico si può consultare [3] o anche, a livello più avanzato, [24].

Secondo questo modello, gli *attivi con rischio* sono rappresentati da un processo stocastico n-dimensionale $S = (S^1, \ldots, S^n)$ che soddisfa una *equazione differenziale stocastica* della forma

$$dS_t = S_t \alpha dt + S_t \sigma dW_t \tag{2.1}$$

dove α è un vettore di $\mathbb{R}^n$, σ una matrice $n \times n$ invertibile e W un processo di Wiener n-dimensionale (per le definizioni di quanto detto sopra mi riporto a [3]); invece l'*attivo senza rischio* è rappresentato da un processo reale che soddisfa l'equazione

$$dS_t^0 = S_t^0 r\, dt \tag{2.2}$$

e cioè, più semplicemente, $S_t^0 = e^{rt}$. La *strategia di portafoglio* è rappresentata da un processo stocastico $v_t = (v_t^0, v_t^1, \ldots, v_t^n)$ dove, per ogni i, v_t^i rappresenta la *proporzione* del capitale posseduto all'istante t ed investita nell'attivo i-mo: possiamo considerare v_t come un *controllo vincolato* (si ha infatti ovviamente $\sum_{i=0}^{n} v_t^i = 1$) e, ponendo $v_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} v_t^i$, ci si riduce al controllo *senza vincoli* $v_t = (v_t^1, \ldots, v_t^n)$.

Indichiamo con $X_t^{s,x,v}$ il valore *attualizzato* all'istante t del portafoglio che all'istante s possiede un capitale x e segue il controllo v_t: si chiama attualizzato il prezzo di un attivo finanziario diviso per il valore dell'attivo senza rischio S_t^0 (maggiori dettagli si possono trovare ad esempio in [3]). Questo soddisfa l'equazione (vedi [3])

$$\begin{cases} dX_t^{s,x,v} = X_t^{s,x,v} \langle v_t, \alpha - r\boldsymbol{e} \rangle\, dt + X_t^{s,x,v} \sigma v_t\, dW_t \\ X_s^{s,x,v} \quad = x \end{cases} \tag{2.3}$$

dove $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$. Di conseguenza il processo X_t^v è un *processo di diffusione* il cui *generatore infinitesimale* è l'operatore differenziale

$$\mathcal{A}_t^v = x\langle v, \alpha - r\boldsymbol{e}\rangle \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 \langle \Sigma v, v\rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

essendo $\Sigma = \sigma^* \sigma$.

Il problema diventa allora determinare

$$V(t, x) = \sup_v \boldsymbol{E}^{x, t}[U(X_T^{t, x, v})] \tag{2.5}$$

dove $\boldsymbol{E}^{x, t}$ indica la speranza fatta sotto la probabilità tale che $X_t = x$.

Si può applicare il *principio di programmazione dinamica* che si può esprimere nella forma

$$V(t, x) = \sup_v \boldsymbol{E}^{x, t}[V(t + h, X_{t+h}^v)] \tag{2.6}$$

dove v varia nell'insieme dei controlli relativi all'intervallo di tempo $[t, t + h]$. Intuitivamente, si considera il *valore ottimo* tra $(t + h)$ e T e si *procede ottimamente* tra t e $(t + h)$. Per determinare la funzione V, questa è cercata come soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellmann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup\limits_{v \in \mathbb{R}^n} \{\mathcal{A}^v V(t, x)\} = 0 \\ V(T, x) = U(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

nel senso che, se esiste un *controllo markoviano* $v_t = g(t, X_t)$ e se $V(t, x)$ è di classe $\mathbb{C}^{1, 2}$, allora V risolve l'equazione (2.7).

Il risultato fondamentale a questo scopo è il *Teorema di verifica* (Verification Theorem), che in questo ambito si può enunciare nella forma seguente (vedi [24] per una formulazione generale):

TEOREMA 2.1. – *Supponiamo che esistano due funzioni $g(t, x)$ e $H(t, x)$ tali che*:

1) *H è di classe $\mathbb{C}^{1, 2}$ e risolve l'equazione* (2.7)

2) *per ogni (t, x), $\sup_v \{\mathcal{A}^v H(t, x)\}$ è raggiunto da $g(t, x)$.*

Allora $H(t, x) = V(t, x)$ e $v_t = g(t, X_t)$ è un controllo markoviano ottimo.

A coefficienti costanti (come nel modello di Samuelson considerato da Merton) o a cofficienti regolari, i passaggi sono agevoli. La soluzione dell'equazione di H.J.B *in pratica* si fa in due tempi:

1) per ogni $V \in \mathbb{C}^{1, 2}$ e per ogni (t, x), risolvere

$$\arg \max_{v \in \mathbb{R}^n} [\mathcal{A}^v V(t, x)] = \hat{v}(t, x; V) \tag{2.8}$$

2) risolvere l'equazione

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}^{\hat{v}}(t, x)\, V(t, x) = 0 \\ V(T, x) = U(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

Tra i vari risultati ottenuti da Merton, mi sembra importante citare (per le conseguenze pratiche che comporta) il cosiddetto *Teorema del Fondo d'investimento di Merton* (Merton's mutual fund theorem) del quale riporto una versione.

TEOREMA 2.2. – *Qualunque sia la funzione di utilità U, il portafoglio ottimo consiste in una distribuzione del capitale tra due portafogli fissi, e precisamente*

1) *l'attivo senza rischio*

2) *un portafoglio corrispondente al controllo* $v^f = \Sigma^{-1}(\alpha - r\boldsymbol{e})$.

Inoltre la proporzione del capitale da distribuire sui due portafogli (μ_t^0, μ_t^f) *è data da*

$$\begin{cases} \mu^f(t) = -\dfrac{V_x(t, X_t)}{X_t V_{xx}(t, X_t)} \\ \mu^0(t) = 1 - \mu^f(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

La funzione $V(t, x)$ che interviene nella formula (2.10) è la funzione definita in (2.5) e che risolve (2.7). Una dimostrazione completa del teorema ed altre varianti del medesimo possono essere trovate in [16] e [3]; mi limito a dare un cenno della dimostrazione.

Come si era detto sopra, il primo passo per risolvere l'equazione di H.J.B. è risolvere l'equazione (2.8): tenendo conto dell'espressione dell'operatore $\mathcal{A}^v$ (vedi (2.4)), si tratta di calcolare

$$\arg\max_{v \in \mathbb{R}^n} \left(x\langle v, \alpha - r\boldsymbol{e}\rangle V_x + \frac{1}{2} x^2 \langle \Sigma v, v\rangle V_{xx} \right).$$

Annullare il gradiente dell'espressione sopra scritta equivale a porre $xV_x(\alpha - r\boldsymbol{e}) + x^2 V_{xx} \Sigma v = 0$, che ha evidentemente come soluzione $v = \dfrac{-V_x}{xV_{xx}} \Sigma^{-1}(\alpha - r\boldsymbol{e})$: a questo punto è immediato sostituire X_t a x ed ottenere il risultato (2.10).

Ma è più importante commentare le implicazioni di questo teorema: esso in sostanza afferma che il piccolo investitore (qualunque siano le sue preferenze) deve limitarsi a distribuire il suo capitale tra l'investimento a reddito fisso (attivo senza rischio) e un *fondo di investimento* rappresentato dal portafoglio corrispondente al controllo v^f: vengono precisate poi le proporzioni esatte (continuamente variabili nel tempo) di capitale da distribuire tra le due parti.

Ma il teorema afferma anche come deve essere gestito il fondo d'investimento: siamo in un modello particolarmente semplice a coefficienti costanti, tuttavia il fondo d'investimento non è un portafoglio fisso ma dinamico. Per mantenere costante la proporzione di capitale impiegata nei vari attivi, il gestore del fondo deve acquistare nei titoli che perdono valore e vendere in quelli che ne acquistano, cioè deve *comprare quando tutti vendono e vendere quando tutti comprano*. Naturalmente, prima di utilizzare alla lettera questi risultati occorre riflettere che vi è un'ampia dose di soggettività nell'assegnare il modello, e un problema certamente impegnativo è trovare un modello che descriva realisticamente la situazione economica.
I risultati esposti sopra non portano contributi matematici di rilievo: sono essenzialmente una applicazione di risultati di controllo stocastico ampiamente noti negli anni '70. Sono naturalmente stati seguiti da un'abbondante letteratura che ha portato contributi importanti anche dal punto di vista matematico: il volumetto [24] descrive ad esempio risultati molto recenti ottenuti con tecniche di soluzioni di viscosità.

I metodi che ho sopra descritto, e che in sostanza permettono di scrivere la soluzione del problema come soluzione di una equazione differenziale a derivate parziali, hanno un interesse pratico evidente: la soluzione esplicita non è quasi mai disponibile, ma non è difficile applicare efficienti metodi di approssimazione numerica.

Questi metodi che ho chiamato *analitici* sono però applicabili solo in presenza di processi di Markov (anzi di una classe particolare di processi di Markov: i processi di diffusione o di diffusione con salti): la definizione di *processo di Markov* traduce l'idea intuitiva che la conoscenza di tutto il passato fornisce le stesse informazioni che sono fornite dalla conoscenza della sola situazione presente riguardo l'evoluzione della situazione futura. Questa ipotesi sembra molto ragionevole nei modelli fisici (ad esempio l'evoluzione di un sistema di particelle) ma un pò meno se applicata a modelli economici.

Più formalmente, la definizione generale di processo di Markov può essere espressa nel modo seguente:

DEFINIZIONE 2.1. – Un processo stocastico $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ a valori in uno spazio $(E, \mathcal{E})$ si dice di Markov (in senso lato) se, per ogni $s < t$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile limitata vale l'equazione

$$\boldsymbol{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \boldsymbol{E}[f(X_t) \mid X_s]. \tag{2.11}$$

Nella definizione precedente, l'espressione $\boldsymbol{E}[Y \mid \mathcal{E}]$ (chiamata in probabilità *speranza condizionale*) indica la proiezione ortogonale nel senso di L^2 della variabile aleatoria Y sul sottospazio delle variabili $\mathcal{E}$-misurabili di quadrato integrabile, $\mathcal{F}_s$ è la σ-algebra generata da tutte le variabili X_r con $r < s$ (quindi in un certo senso *il passato*) e con $\boldsymbol{E}[\,.\,|X_s]$ si intende la speranza condizionale rispetto alla σ-algebra generata da X_s (quindi *il presente*).

3. – L'approccio mediante dualità convessa infinito-dimensionale.

Il metodo della dualità convessa infinito-dimensionale è stato introdotto in [2] in problemi di controllo stocastico, e più specificamente applicato al problema di cui ci stiamo occupando in [11] nel caso dei processi di diffusione ed in [13] in un quadro del tutto generale: attualmente questo metodo domina la letteratura dedicata a questo o simili problemi, e mi limiterò a raccontare le idee che ne stanno alla base. Voglio però sottolineare che diversi risultati di analisi funzionale sono stati trovati proprio sotto lo stimolo di questo o simili problemi posti dalla moderna finanza matematica.

L'estensione del processo stocastico (S_t) che modellizza l'attivo con rischio in ambito non-markoviano (quindi l'estensione del processo che, secondo il modello di Samuelson, verificava l'equazione (2.1)) è dato da un processo stocastico (d-dimensionale) S_t che *consente l'integrazione stocastica* e che soddisfa una ipotesi di *assenza di arbitraggio*: i processi che consentono l'integrazione stocastica sono chiamati *semimartingale* e, se un processo d-dimensionale (H_t) indica la strategia di portafoglio (cioè H_t^i indica quante unità dell'attivo S^i devono essere presenti nel portafoglio all'istante t), il valore all'istante t del portafoglio con capitale iniziale x è dato da

$$V_t = x + \int_{]0,\,t]} H_s\, dS_s \tag{3.1}$$

La strategia H_t deve soddisfare una opportuna condizione di misurabilità (deve essere *prevedibile*), e informazioni generali su semimartingale ed integrazione stocastica possono essere trovate ad esempio in [18], tuttavia non è essenziale possedere queste nozioni per comprendere quello che segue: quello che è essenziale è una pratica caratterizzazione (che enuncerò poco sotto) della classe $\Psi(x)$ nella quale cerchiamo la soluzione del problema, più precisamente della classe delle funzioni f che verificano la diseguaglianza

$$0 \leqslant f \leqslant x + \int_{]0,\,T]} H_s\, dS_s \tag{3.2}$$

con una opportuna strategia di portafoglio H_t. Si noterà che anzichè cercare il massimo dell'utilità tra tutti i valori finali dei portafogli con capitale iniziale x lo si cerca tra le funzioni positive *maggiorate* da un tale portafoglio: questo perchè quest'ultimo insieme ha migliori proprietà matematiche (ed evidentemente il valore massimo non cambia).

Avevo citato una ipotesi di *assenza di arbitraggio*: questa si traduce nel fatto che non è vuoto l'insieme $\mathcal{M}$ delle probabilità $\boldsymbol{Q}$ equivalenti alla probabilità originale $\boldsymbol{P}$ e tali che il processo stocastico (S_t) sia una martingala (locale) sotto $\boldsymbol{Q}$. Quello che ho detto sopra andrebbe precisato con maggiore puntigliosità, informazioni più precise sulle martingale possono essere reperite in [18] e una dimostrazione precisa dell'equivalenza tra il fatto che $\mathcal{M}$ non sia vuoto ed una nozione di assenza di arbitraggio può essere trovata in [6] e [7]. Di nuovo però queste nozioni non sono essenziali per quello che segue: quello che è essenziale è la seguente relazione, provata in [8] nel caso dei processi di diffusione e in [6] in tutta generalità.

TEOREMA 3.1. – *Una funzione f misurabile a valori positivi appartiene alla classe $\Psi(x)$ (è cioè maggiorata dal valore finale di un portafoglio con capitale iniziale x) se e solo se è soddisfatta la seguente diseguaglianza:*

$$\forall \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}, \qquad \int f\, d\boldsymbol{Q} = \int f \frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\, d\boldsymbol{P} \leqslant x\,. \tag{3.3}$$

È naturale domandarsi se una tale funzione f appartenga ad una opportuna classe di funzioni integrabili, ma la risposta è negativa: in generale f non ha alcuna proprietà di sommabilità e deve pertanto essere cercata nella classe di tutte le funzioni misurabili (definite su Ω, a valori reali). Tale spazio, indicato $\mathbb{L}^0$, è munito della topologia della convergenza in misura, che è indotta dalla distanza $d(f, g) = \int_\Omega \operatorname{arctg}(|f-g|)\, d\boldsymbol{P}$. Guardato come spazio topologico, è metrico completo e quindi ha buone proprietà; guardato però come *spazio vettoriale topologico* è molto meno buono: infatti non è localmente convesso e il suo duale si riduce alla sola forma lineare costantemente nulla. Non si possono pertanto utilizzare i teoremi più usuali dell'analisi funzionale.

Tuttavia questo spazio $\mathbb{L}^0$ si è rivelato un oggetto interessante nella teoria dei processi stocastici: più precisamente però l'ambiente nel quale viene cercata la soluzione f del problema è $\mathbb{L}^0_+ = \{f \in \mathbb{L}^0,\ f \geqslant 0\}$. Vedremo in particolare tre proprietà del *cono* $\mathbb{L}^0_+$:

– un *teorema bipolare*;
– un *sostituto della compattezza*;
– un *teorema minimax* senza ipotesi di compattezza.

Prima di presentare il teorema bipolare nel cono $\mathbb{L}^0_+$, richiamiamo il teorema bipolare classico. Assegnata una coppia (E, E') di spazi vettoriali topologici localmente convessi in dualità ed un sottinsieme A di E, si chiama *polare* di A (e si indica A^0) l'insieme

$$A^0 = \{x' \in E' : |\langle x, x'\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall x \in A\} \tag{3.4}$$

ed analoga è la definizione del polare per un sottinsieme di E'.

Allora il teorema bipolare (vedi ad esempio [1] pag. 66) afferma che A^{00} (cioè il polare del polare di A) coincide con la chiusura dell'*inviluppo convesso cerchiato* di A (cioè la chiusura dell'insieme dei vettori della forma $\sum_i t_i x_i$, $x_i \in A$, $\sum |t_i| \leqslant 1$). Non ho specificato rispetto a quale topologia si intende la chiusura, poichè trattandosi di un insieme convesso la chiusura rispetto alla topologia debole coincide con quella rispetto alla topologia originale (vedi [1] pag. 64).

In $\mathbb{L}^0_+$ (che non è uno spazio lineare) si può però definire una *forma bilineare* nel modo seguente:

$$(f, g) \to \int fg \, d\boldsymbol{P} \in [0, +\infty] \tag{3.5}$$

Se A è un sottinsieme di $\mathbb{L}^0_+$, in modo analogo a (3.4) si può definire A^0 nel modo seguente

$$A^0 = \left\{ g \in \mathbb{L}^0_+ : \int gf \, d\boldsymbol{P} \leqslant 1 \quad \forall f \in A \right\}. \tag{3.6}$$

Nel cono $\mathbb{L}^0_+$ vale il seguente teorema bipolare di Brannath-Schachermayer: la dimostrazione originale si può trovare in [4], mentre [22] in appendice riporta una dimostrazione semplificata dovuta a Michael Meyer.

TEOREMA 3.2. – *Sia A un sottinsieme di $\mathbb{L}^0_+$: A^{00} coincide con la chiusura* (*rispetto alla topologia della convergenza in misura*) *dell'inviluppo convesso solido di A.*

Un insieme $B \subseteq \mathbb{L}^0_+$ si dice *solido* se verifica la seguente proprietà:

$$f \in B, \qquad 0 \leqslant g \leqslant f \Rightarrow g \in B.$$

È importante sottolineare che questo teorema è stato dimostrato proprio sotto lo stimolo dell'applicazione che sto illustrando. Torniamo ora alla notazione (3.2) e sia $\Psi = \Psi(1)$

$$0 \leqslant f \leqslant 1 + \int_{]0, T]} H_s \, dS_s \tag{3.7}$$

e indichiamo con Υ l'inviluppo convesso chiuso solido in $\mathbb{L}^0_+$ generato dalle densità $\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}$: tra i due insiemi Ψ e Υ vale (proprio come conseguenza del Teorema 3.2) una perfetta *relazione bipolare*, più precisamente

$$f \in \Psi \Leftrightarrow \int fg \, d\boldsymbol{P} \leqslant 1, \qquad \forall g \in \Upsilon$$

$$g \in \Upsilon \Leftrightarrow \int fg \, d\boldsymbol{P} \leqslant 1, \qquad \forall f \in \Psi.$$

Si ha evidentemente $\Psi(x) = x\Psi$ (cioè ogni funzione di $\Psi(x)$ è il prodotto di un elemento di Ψ per la costante x), ed in modo analogo indichiamo $\Upsilon(y) = y\Upsilon$,

($x,\ y > 0$). Il problema originale si può scrivere nella forma seguente: determinare (per $x > 0$)

$$u(x) = \sup_{f \in \Psi(x)} \int U(f)\, d\boldsymbol{P} = \left.\begin{array}{l} \sup\limits_{f \geq 0} \int U(f)\, d\boldsymbol{P} \\[2ex] \int fg\, d\boldsymbol{P} \leq x\,, \quad \forall g \in \Upsilon \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

Prima di proseguire, facciamo un rapido richiamo su nozioni elementari di ottimizzazione, che chiamerò *dualità Lagrangiana*: supponiamo di dover risolvere un problema della forma

$$\left.\begin{array}{l} \sup f(x) \\ x \in C \subset \mathbb{R}^n \\ g(x) \leq c \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

A tale scopo si introduce la *Lagrangiana* $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda[g(x) - c]$, ed il problema (3.9) diventa

$$\sup_{x \in C} \inf_{\lambda > 0} L(x, \lambda) \tag{3.10}$$

Se vale un *teorema minimax* (se si può cioè invertire *sup* e *inf*) il problema si trasforma in

$$\inf_{\lambda > 0} \sup_{x \in C} L(x, \lambda) = \inf_{\lambda > 0} \Phi(\lambda) \tag{3.11}$$

essendo $\Phi(\lambda) = \sup\limits_{x \in C} L(x, \lambda)$.

Il problema (3.11) è chiamato il *problema duale* di (3.9). Non è detto che i problemi sopra scritti abbiano soluzione, ma vale il seguente risultato: *se esite un* punto di sella (x^*, λ^*) *tale che si abbia* $f(x^*) = \Phi(\lambda^*)$, *allora* x^* *risolve il problema originale* (*usualmente detto* primale) *e* λ^* *risolve il problema duale.*

Prima di esporre come queste idee si possano estendere alla situazione che stiamo esaminando, occorre definire la funzione *convessa coniugata* associata alla funzione di utilità U: essa è definita da

$$V(y) = \sup_{x > 0} [U(x) - xy]$$

(più precisamente è la *trasformata di Fenchel* della funzione convessa $-U(-x)$, vedi [19] per i dettagli). La funzione V è convessa decrescente e U si ricava da essa tramite l'equazione

$$U(x) = \inf_{y > 0} [V(y) + xy].$$

Torniamo ora al problema (3.8): questo si può riscrivere nella forma

$$u(x) = \sup_{f \geqslant 0} \inf_{y > 0} \left[\int U(f)\, d\boldsymbol{P} - y \left(\sup_{g \in \Upsilon} \int fg\, d\boldsymbol{P} - x \right) \right] \tag{3.12}$$

e, se vale un *teorema minimax* (torneremo più avanti su questo punto) questo si trasforma in

$$\inf_{y>0} \inf_{g \in \Upsilon} \left(\left[\sup_{f \geqslant 0} \int (U(f) - yfg)\, d\boldsymbol{P} + xy \right] \right) = \inf_{y>0} \inf_{h \in \Upsilon(y)} \left(\int V(h)\, d\boldsymbol{P} + xy \right) \tag{3.13}$$

Il *problema duale* del problema (3.8) è pertanto

$$v(y) = \inf_{g \in \Upsilon(y)} \int V(g)\, d\boldsymbol{P}\,. \tag{3.14}$$

Il vantaggio di passare al problema duale consiste nel fatto che questo (a differenza del problema primale) ammette sempre soluzione: illustriamo meglio questo punto. Per risolvere un problema di minimo di un funzionale su un dominio (come è il caso del problema (3.13)) sono usualmente necessari due ingredienti:

– la *semicontinuità inferiore* del funzionale;

– una qualche forma di *compattezza* del dominio.

La caratterizzazione delle parti relativamente compatte dello spazio $\mathbb{L}^0$ è estremamente macchinosa ed è immmediato rendersi conto che non è applicabile al problema che ci interessa.

Facciamo tuttavia una digressione su quello che succede in uno spazio X di Banach riflessivo. Data una successione limitata $(x_n)_{n \geqslant 0}$, come è ben noto (teorema di Alouglu) esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \geqslant 0}$ convergente debolmente ad un certo vettore x: allora x è un punto di aderenza (debole) per l'insieme costituito dai punti $(x_n)_{n \geqslant 0}$ e di conseguenza per il relativo inviluppo convesso. Ma per un insieme convesso essere *debolmente* chiuso equivale ad essere *fortemente* chiuso: a questo punto è facile rendersi conto che si può determinare una successione $(y_n)_{n \geqslant 0}$, con y_n appartenente a $\mathrm{Conv}(x_n, x_{n+1}, \ldots)$, convergente fortemente ad x. Con la notazione $\mathrm{Conv}(x_n, x_{n+1}, \ldots)$ si intende l'inviluppo convesso dell'insieme $\{x_k : k \geqslant n\}$.

Questo criterio si può applicare agli spazi $\mathbb{L}^p$ con $1 < p < +\infty$, per lo spazio $\mathbb{L}^1$ ne esiste una estensione nota come *teorema di Komlos* (vedi [12]), ma tutto questo non si può evidentemente applicare ad $\mathbb{L}^0$. Per il cono $\mathbb{L}^0_+$ è stato tuttavia dimostrato il seguente risultato, noto come *Lemma di Schachermayer* (vedi ad es. [6]):

LEMMA 3.3. – *Sia $(f_n)_{n \geqslant 0}$ una successione di funzioni misurabili a valori positivi: si può determinare una successione $(g_n)_{n \geqslant 0}$ (dove, per ogni n, $g_n \in$ $\mathrm{Conv}(f_n, f_{n+1}, \ldots)$) convergente quasi ovunque ad una funzione g a valori in* $[0, +\infty]$.

La funzione limite g, naturalmente, può assumere il valore $+\infty$ da qualche parte, o anche su tutto Ω; tuttavia se ogni $f_n \in C$, dove C è un convesso limitato in $\mathbb{L}^0_+$, è immediato constatare che g è a valori reali. Anche il Lemma di Schachermayer è stato provato sotto lo stimolo di problemi posti dalla *finanza matematica*: si può consultare [6] per maggiori dettagli.

Mentre la relativa compattezze significa intuitivamente poter ottenere la convergenza passando ad una opportuna sottosuccessione, il risultato precedente consente di ottenere la convergenza passando a opportune combinazioni convesse: il fatto di passare a combinazioni convesse non porta inconvenienti se si deve affrontare un problema come «$\sup_{f \in C} U(f)$», dove U è *concava* e C un opportuno insieme convesso (o equivalentemente come «$\inf_{f \in C} V(f)$», dove V è *convessa*).

Infatti, se $(f_n)_{n \geq 0}$ è una successione massimizzante per il problema «$\sup_{f \in C} U(f)$», e $g_n \in \mathrm{Conv}(f_n, f_{n+1}, \ldots)$, si ha per ogni n, $g_n = \sum_{j=0}^{k(n)} a_j^n f_{n+j}$, con a_j^n positivi e $\sum_{j=0}^{k(n)} a_j^n = 1$: allora per la concavità della funzione U

$$U\left(\sum_{j=0}^{k(n)} a_j^n f_{n+j}\right) \geq \sum_{j=0}^{k(n)} a_j^n U(f_{n+j})$$

e a maggior ragione $(g_n)_{n \geq 0}$ è una successione massimizzante.

Si può provare che la funzione $g \to \int V(g)\, d\boldsymbol{P}$ è *semicontinua inferiormente* sull'insieme $\Upsilon(y)$ (mentre la funzione $f \to \int U(f)\, d\boldsymbol{P}$ non è sempre *semicontinua superiormente* su $\Psi(x)$ (vedi [13] per i dettagli)): è per questo che il problema duale (3.13) ha sempre soluzione e si può pertanto scrivere

$$\inf_{g \in \Upsilon(y)} \int V(g)\, d\boldsymbol{P} = \min_{g \in \Upsilon(y)} \int V(g)\, d\boldsymbol{P} = \int V(\widehat{g}(y))\, d\boldsymbol{P}\,. \tag{3.15}$$

Abbiamo lasciato da parte il problema del «teorema minimax»: assegnata una funzione $\Phi(x, y): \Psi \times \Upsilon \to \mathbb{R}$, si ha evidentemente la diseguaglianza

$$\sup_{x \in \Psi} \inf_{y \in \Upsilon} \Phi(x, y) \leq \inf_{y \in \Upsilon} \sup_{x \in \Psi} \Phi(x, y)\,. \tag{3.16}$$

Si dice che vale un *teorema minimax* se la diseguaglianza (3.16) è in realtà una eguaglianza. In realtà un teorema minimax, secondo le ipotesi, è spesso più preciso e stabilisce l'esistenza di un punto *di sella*: tuttavia per noi sarà sufficiente poter invertire *sup* e *inf*.

Le ipotesi usuali per la validità del teorema minimax sono che gli insiemi Ψ e Υ siano convessi, che la funzione Φ sia concava rispetto ad x e convessa rispetto ad y, e che rispetto alla componente x sia

– semicontinua superiormente

– sup-compatta (cioè gli insiemi di *sopralivello* $\{x : \Phi(x, y) \geq \alpha\}$ sono relativamente compatti).

Equivalentemente si può assumere che, rispetto alla componente y, la funzione sia semicontinua inferiormente ed inf-compatta: è facile infatti passare dall'una all'altra ipotesi semplicemente cambiando di segno.

Nel caso che ci interessa la funzione è $\Phi(f, g) = \int (U(f) - fg)\, d\boldsymbol{P}$: rispetto alla componente g è semicontinua superiormente (cioè nel senso opposto a quello che ci servirebbe) mentre rispetto alla componente f è semicontinua superiormente, a patto che la funzione U sia superiormente limitata. Questa restrizione non provoca grossi inconvenienti perchè ci si può agevolmente ridurre a questo caso approssimando la funzione U con una opportuna successione di funzioni superiormente limitate; abbiamo visto però che nell'insieme $\mathbb{L}^0_+$ la relativa compattezza non è praticamente mai verificata.

Il metodo originale di Kramkov-Schachermayer consiste nel ridursi (con opportuni passaggi) all'insieme delle funzioni a valori in $[0, n]$ dotato della topologia $\sigma(\mathbb{L}^\infty, \mathbb{L}^1)$ che è compatto; è naturale però chiedersi se il *sostituto della compattezza* fornito dal Lemma 3.3 possa servire ad ottenere un teorema minimax. Mi sono accorto infatti che vale il seguente risultato, la cui dimostrazione si può trovare in [17]:

TEOREMA 3.4. – *Consideriamo una funzione $\Phi : C \times \Upsilon \to \mathbb{R}$, dove Υ è convesso e C è un sottinsieme convesso chiuso di $\mathbb{L}^0_+$. Supponiamo che Φ sia concava e semicontinua superiormente rispetto alla prima componente $f \in C$ e lineare affine rispetto alla seconda componente $g \in \Upsilon$: allora vale il teorema minimax.*

Le ipotesi del risultato che ho appena enunciato sono evidentemente restrittive, ma *ritagliate su misura* per poter provare facilmente l'eguaglianza tra (3.12) e (3.13) (per essere precisi, il teorema 3.4 deve essere applicato due volte; i dettagli, un pò macchinosi ma non difficili, possono essere trovati in [17]).

Torniamo ora al problema originale, e chiamiamo u e v le due funzioni (definite per x e y positivi):

$$u(x) = \sup_{f \in \Psi(x)} \int U(f)\, d\boldsymbol{P}$$

$$v(y) = \inf_{g \in \Upsilon(y)} \int V(g)\, d\boldsymbol{P}\,.$$

Si provano i seguenti fatti (vedi [13] per i dettagli):

– la funzione u è *convessa crescente*, v è *concava decrescente*, e sono coniugate tra di loro (cioè ereditano le proprietà delle funzioni U e V);

– se esiste il punto di massimo $\widehat{f}(x)$ per il problema primale, vale l'eguaglianza

$$\widehat{f}(x) = (U')^{-1}(\widehat{g}(y)) \tag{3.17}$$

dove x e y sono legati dalla relazione $u(x) = v(y) + xy$.

Ricordo che il problema duale ha sempre soluzione, mentre non è detto che l'abbia il problema primale; sotto opportune condizioni (ad esempio sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, sulla funzione di utilità U o sulla funzione valore del problema duale v) si può provare che il problema primale ha effettivamente soluzione e si può pertanto applicare la formula (3.17).

Naturalmente non è sempre agevole determinare esplicitamente il *minimizzatore* per il problema duale $\widehat{g}(y)$ ma in determinate condizioni questo si può fare (in modo analogo talvolta si possono calcolare esplicitamente le due funzioni $u(x)$ e $v(y)$): in ogni caso si sa che, una volta che sia stata provata l'esistenza del *massimizzatore* $\widehat{f}(x)$, esiste una opportuna *strategia di portafoglio* H_t tale che si abbia

$$\widehat{f}(x) = x + \int_{]0,\,T]} H_s \, dS_s \tag{3.18}$$

ma naturalmente una caratterizzazione esplicita di questa strategia si può ottenere solo in casi particolari.

Anche il teorema del *Fondo di Investimento* di Merton ammette una estensione in casi particolari; naturalmente questa è ottenuta attraverso una dimostrazione probabilistica (a differenza della prova originale ottenuta risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellmann). Si può consultare a questo proposito [10] dove sono anche presenti estensioni dei risultati sopra esposti al caso di modelli con un numero infinito di attivi (i cosiddetti *large financial markets*).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI - G. TOMASSINI, *Spazi vettoriali topologici*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[2] J. M. BISMUT, *Conjugate convex functions in optimal stochastic control*, J. Math. Anal. Appl., **44** (1973), 384-404.

[3] T. BJÖRK, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press (1998).

[4] W. BRANNATH - W. SCHACHERMAYER, *A Bipolar Theorem for Subsets of L^0*, Séminaire de Probabilités, **XXXIII** (1999), 349-354.

[5] J. CVITANIC - W. SCHACHERMAYER - H. WANG, *Utility Maximization in Incomplete Markets with Random Endowment*, Finance and Stochastics, **5**, No. 2 (2001), 259-272.

[6] F. Delbaen - W. Schachermayer, *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*, Math. Annalen, **300** (1994), 463-520.
[7] F. Delbaen - W. Schachermayer, *The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes*, Mathematische Annalen, **312** (1998), 215-250.
[8] N. El Karoui - M. C. Quenez, *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market*, SIAM Journal on Control and Optimization, **33** (1995), 29-66.
[9] P. Guasoni - W. Schachermayer, *Necessary Conditions for the Existence of Utility Maximizing Strategies under Transaction Costs*, Preprint (2003).
[10] P. Guasoni - M. De Donno - M. Pratelli, *Super-replication and Utility Maximization in Large Financial Markets*, Preprint (2003).
[11] I. Karatzas - J. P. Lehoczky - S. E. Shreve - G. L. Xu, *Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market*, SIAM Journal of Control and Optimization, **29** (1991), 702-730.
[12] J. Komlos, *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Sci. Hung., **18** (1967), 217-229.
[13] D. Kramkov - W. Schachermayer, *The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets*, Annals of Applied Probability, **9**, No. 3 (1999), 904-950.
[14] R. C. Merton, *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time model*, Rev. Econom. Statist., **51** (1969), 247-257.
[15] R. C. Merton, *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, Journal of Economic Theory, **3** (1971), 373-413.
[16] R. C. Merton, *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Oxford (1990).
[17] M. Pratelli, *A minimax theorem without compactness hypothesis*, Preprint (2004).
[18] P. Protter, *Stochastic Integration and differential equations*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1990).
[19] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).
[20] P. A. Samuelson, *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming*, Rev. Econom. Statist., **51** (1969), 239-246.
[21] W. Schachermayer, *Optimal Investment in Incomplete Financial Markets*, Mathematical Finance: Bachelier Congress 2000 (H. Geman, D. Madan, St.R. Pliska, T. Vorst, editors), Springer (2001), 427-462.
[22] W. Schachermayer, *Portfolio Optimization in Incomplete Financial Markets*, apparirà nella collana «Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore» (2003).
[23] H. Strasser, *Mathematical theory of statistics: statistical experiments and asymptotic decision theory*, De Gruyter studies in mathematics, Vol. 7 (1985).
[24] N. Touzi, *Stochastic control problems, viscosity solutions, and application to Finance*, apparirà nella collana «Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore» (2003).

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, via Buonarroti 2
56127 Pisa, Italy. E-mail: pratelli@dm.unipi.it

Pervenuta in Redazione
il 24 febbraio 2004 e in forma rivista il 12 luglio 2004