Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Emanuele Pacifici

Fattorizzazione tensoriale e induzione tensoriale per rappresentazioni di gruppi finiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 551–554.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_551_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 551-554

Fattorizzazione tensoriale e induzione tensoriale per rappresentazioni di gruppi finiti.

EMANUELE PACIFICI

L'ambito generale in cui questo lavoro si colloca è la teoria delle rappresentazioni di gruppi finiti, ovvero l'area della Matematica il cui tema di fondo è la «realizzazione» di gruppi finiti, in linea di principio astratti, come gruppi di matrici (più esplicitamente, per rappresentazione di un gruppo G si intende un omomorfismo di G in un gruppo lineare generale). In ciò che segue vengono prese in considerazione rappresentazioni *di dimensione finita* e *sul campo complesso*; tali condizioni saranno assunte tacitamente, assieme alla finitezza dei gruppi.

Una rappresentazione irriducibile di un gruppo è detta *quasi-primitiva* se la sua restrizione ad un qualunque sottogruppo normale è *omogenea*, vale a dire, ha le costituenti irriducibili a due a due equivalenti. È ben noto che, assegnata una rappresentazione irriducibile D di un gruppo G, il Teorema di Clifford ([2, 11.1]) permette di individuare un sottogruppo H di G, ed una rappresentazione quasi-primitiva T di H, tali che *D si ottiene da T mediante induzione additiva*; in altre parole, D può essere ricostruita a partire da T attraverso un metodo standard che utilizza la «struttura additiva» delle rappresentazioni. In tal senso le rappresentazioni quasi-primitive possono essere riconosciute come costituenti fondamentali delle rappresentazioni irriducibili (e, in ultima analisi, di qualunque rappresentazione). Poiché inoltre non sembra possibile ricorrere a metodi additivi per ottenere ulteriori riduzioni sulla struttura delle rappresentazioni quasi-primitive, appare opportuno studiare tali oggetti dal punto di vista della loro «struttura moltiplicativa».

1. – La fattorizzazione tensoriale.

Sia dunque D una rappresentazione fedele (cioè di nucleo banale) e quasi-primitiva di un gruppo G. Il nostro primo obiettivo è ottenere una «parametrizzazione», in termini della struttura gruppale di G, di tutti i possibili modi in cui D si fattorizza nel prodotto tensoriale di due rappresentazioni *proiettive* di G. Il concetto di rappresentazione proiettiva generalizza quello di rappresentazione in senso classico (o rappresentazione ordinaria), ed ha un ruolo fondamentale nel nostro contesto poiché è possibile costruire prodotti tensoriali di rappresentazioni proiettive (mentre non ha senso costruire somme dirette di tali oggetti), e un prodotto tensoriale di questo tipo può dare luogo ad una rappresentazione ordinaria. Denotando con Z il *centro* di G e con F il *sottogruppo di Fitting* di G, il risultato principale che si ottiene nella tesi relativamente a questo argomento può essere sintetizzato come segue (l'enunciato originale ha una maggiore generalità).

TEOREMA 1. – *Sia D una rappresentazione fedele e quasi-primitiva di G, la cui restrizione ad F sia irriducibile. È possibile costruire esplicitamente una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle fattorizzazioni tensoriali di D e l'insieme dei sottogruppi normali di G compresi fra Z ed F.*

È opportuno precisare che una fattorizzazione tensoriale di D è qui intesa come una coppia $([P_1],[P_2])$ di classi di equivalenza di rappresentazioni proiettive di G tale che D è «proiettivamente equivalente» al prodotto tensoriale $P_1 \otimes P_2$. Inoltre, l'ipotesi di fedeltà per D è stata inclusa nel precedente enunciato solo al fine di semplificare l'esposizione, mentre l'ipotesi di irriducibilità per la restrizione $D \downarrow_F$ ha un ruolo fondamentale: un esempio elaborato nella tesi mostra infatti come tale ipotesi non possa essere eliminata dall'enunciato del Teorema 1, né indebolita lungo una certa linea. Un'analisi sistematica della fattorizzazione tensoriale per rappresentazioni quasi-primitive viene condotta in [3], da un punto di vista differente e, per certi aspetti, complementare al presente approccio.

2. – L'induzione tensoriale: una prima caratterizzazione.

Una volta ottenuto un controllo di tutte le possibili fattorizzazioni tensoriali, appare naturale chiedersi come si possa analizzare la struttura di una rappresentazione quasi-primitiva *che non ammetta alcuna fattorizzazione di questo tipo* (oltre ovviamente a quelle banali). Supponiamo dunque che D sia una rappresentazione fedele, quasi-primitiva e *tensor-indecomponibile* del gruppo G. L'esistenza di una tale rappresentazione implica rilevanti condizioni strutturali per G. In particolare, assumendo che F non coincida con Z (condizione soddisfatta ad esempio in ogni gruppo risolubile non abeliano), la sezione F/Z risulta essa stessa un G-modulo semplice su un campo primo; sul modulo F/Z resta inoltre definita una forma simplettica non degenere e G-invariante. Questo è il contesto natuale in cui il metodo dell'*induzione tensoriale* assume un ruolo centrale (tale metodo è definito in stretta analogia con quello della già citata induzione additiva, e può essere interpretato come una «traduzione» di quest'ultimo ad un contesto moltiplicativo). Più esplicitamente, ci si può chiedere se la rappresentazione D sia tensor-indotta (cioè ricostruibile mediante induzione tensoriale) da una rappresentazione proiettiva di un qualche sottogruppo proprio H di G. Un profondo legame fra induzione tensoriale per D e struttura *additiva* del modulo simplettico F/Z è osservata e discussa da Berger in [1]. inoltre, un teorema di Kovács ([4, §6]) può essere parafrasato come segue: D è tensor-indotta da una rappresentazione proiettiva di H se il modulo F/Z è *form-indotto* da un suo H-sottomodulo (la form-induzione è un tipo di induzione additiva in cui si tiene conto anche della presenza di una forma simplettica). Per completare il quadro, nella tesi si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Sia D una rappresentazione fedele, quasi-primitiva e tensor-indecomponibile di G, e sia H un sottogruppo di G. Si assuma inoltre $F \neq Z$. È possibile costruire esplicitamente una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle (classi di equivalenza di) rappresentazioni proiettive di H che tensor-inducono D, e l'insieme degli H-sottomoduli di F/Z che form-inducono F/Z.*

Se da un lato il precedente teorema è evidentemente affine al Teorema 1, da un altro esso offre una caratterizzazione che risulta utile per trasporre problemi relativi all'induzione tensoriale ad un più accessibile contesto additivo (si veda la Sezione 3). Ciò avviene tuttavia al prezzo di analizzare moduli (con una forma simplettica di cui si deve tener conto) su campi primi, anziché moduli sul ben più «ricco» campo complesso.

3. – Induzione tensoriale e restrizione.

Come si è accennato, è possibile riconoscere una significativa analogia fra induzione additiva ed induzione tensoriale, ed in generale fra metodi additivi e moltiplicativi nella teoria delle rappresentazioni; nondimeno, tale analogia è tutt'altro che completa, ed i risultati ottenuti nella tesi, relativamente al problema illustrato nel seguito, evidenziano alcuni aspetti di questa incompletezza.

Il concetto di induzione additiva è profondamente legato a quello di *restrizione*, ed una conseguenza di ciò è la seguente ben nota «reciprocità». Sia D una rappresentazione irriducibile di G, e T una rappresentazione del sottogruppo H; allora *D è indotta (additivamente) da T se e solo se T compare come addendo diretto in $D\downarrow_H$ e* $\deg D = |G:H| \deg T$ *($|G:H|$ denota qui l'indice* di H in G). Poiché l'induzione tensoriale può interpretarsi come «controparte moltiplicativa» dell'induzione additiva, è ragionevole formulare un enunciato parallelo, come segue.

CONGETTURA. – *Sia D una rappresentazione fedele, quasi-primitiva e tensor-indecomponibile di G, e sia P una rappresentazione proiettiva del sottogruppo H. Allora D è tensor-indotta da P se e solo se P compare come fattore tensoriale in $D\downarrow_H$ e* $\deg D = (\deg P)^{|G:H|}$.

In forma più debole: *D è tensor-indotta da una rappresentazione proiettiva di H se e solo se $D\downarrow_H$ ha un fattore tensoriale di grado* $(\deg D)^{1/|G:H|}$ (ma D non è tensor-indotta necessariamente da *quel* fattore).

L'enunciato precedente, dovuto a L. G. Kovács, trae la sua motivazione originale dalla ricerca di una «caratterizzazione interna» per l'induzione tensoriale (si veda a tale proposito anche [5], in cui viene sviluppato un aspetto computazionale della questione) e dalla necessità di chiarire il rapporto fra induzione tensoriale e restrizione. Inoltre, come si dimostra nella tesi, anche la versione debole della Congettura (nei casi in cui essa è confermata) offre un buon test per stabilire se D sia tensor-indotta, ed in questo un ruolo fondamentale è svolto dal Teorema 1.

L'approccio alla Congettura che viene seguito nella tesi consiste in una catena di riduzioni successive. Innanzi tutto, il Teorema 2 permette di tradurre il nostro problema in un problema additivo, riguardante la form-induzione di moduli simplettici; a questo livello è già possibile costruire due controesempi, che smentiscono definitivamente la versione forte della Congettura, ed anche quella debole in una situazione in cui $|G:H|$ è 2 (entrambi i controesempi coinvolgono gruppi risolubili).

Poi, attraverso un'analisi della relazione fra moduli e forme bilineari, vengono dimostrati risultati che tendono a confermare la versione debole della Congettura, ovviamente con l'ipotesi aggiuntiva che $|G:H|$ sia dispari. In particolare si provano i seguenti teoremi.

TEOREMA 3. – *Sia D una rappresentazione fedele, quasi-primitiva e tensor-indecomponibile di un gruppo G con sottogruppo di Fitting non centrale, e sia H un sottogruppo di G. Supponiamo inoltre che H sia un sottogruppo* normale *di G, e che $|G:H|$ sia dispari. Allora D è tensor-indotta da una rappresentazione proiettiva di H se e solo se $D\downarrow_H$ ha un fattore tensoriale di grado* $(\deg D)^{1/|G:H|}$.

TEOREMA 4. – *Sia D una rappresentazione fedele, quasi-primitiva e tensor-indecomponibile di un gruppo risolubile G, e sia H un sottogruppo di G. Supponiamo inoltre che $|G:H|$ sia* un primo *dispari. Allora D è tensor-indotta da una rappresentazione proiettiva di H se e solo se $D\downarrow_H$ ha un fattore tensoriale di grado* $(\deg D)^{1/|G:H|}$.

Un ruolo chiave nella dimostrazione del Teorema 4 (che è il risultato principale ottenuto nella tesi) è svolto da un teorema riguardante la struttura di moduli indotti da sottogruppi massimali, il cui enunciato è eccessivamente tecnico per essere qui riportato.

In conclusione, almeno nella classe dei gruppi risolubili, la validità della Congettura è completamente chiarita per sottogruppi normali, o per sottogruppi non necessariamente normali purché aventi indice un primo dispari. Resta un problema aperto stabilire se la Congettura sia valida per sottogruppi non normali, il cui indice sia dispari ma non un primo.

BIBLIOGRAFIA

[1] T.R. BERGER, *Hall-Higman type theorems V*, Pacific J. Math, **73** (1977), 1-62.

[2] C.W. CURTIS, I. REINER, *Methods of representation theory I*, Wiley, New York, (1981.

[3] P.A. FERGUSON, A. TURULL, *Prime characters and factorizations of quasi-primitive characters,* Math. Z., **190** (1985), 583-604.

[4] L.G. KOVÁCS, *On tensor induction of group representations,* J. Aust. Math. Soc. Ser. A, **49** (1990), 486-501.

[5] C.R. LEEDHAM-GREEN, E.A. O'BRIEN, *Recognising tensor-induced matrix groups,* J. Algebra, **253** (2002), 14-30.

Dipartimento di Matematica «U. Dini», Università degli Studi di Firenze
e-mail: pacifici@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Firenze) - Ciclo XV
Direttori di ricerca: Prof. C. Casolo, Università degli studi di Firenze
Prof. L. G. Kovács, Australian National University