Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Morando

Alcune classi di operatori pseudo-differenziali L^p -continui e applicazioni alle equazioni a derivate parziali multi-quasi-ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 547–550.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_547_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 547-550

Alcune classi di operatori pseudo-differenziali L^p-continui e applicazioni alle equazioni a derivate parziali multi-quasi-ellittiche.

ALESSANDO MORANDO

Il soggetto di questa tesi è lo studio della continuità negli spazi L^p, con $p \in (1, \infty)$ qualsiasi, di alcune nuove classi di operatori pseudo-differenziali corrispondenti a certe equazioni a derivate parziali di tipo *multi-quasi-elittico* lineari e semi-lineari. In particolare, alcuni risultati concernenti la regolarità delle soluzioni di equazioni multi-quasi-ellittiche nell'ambito di spazi di Sobolev pesati, convenientemente modellati sulle equazioni stesse, vengono qui estesi dal caso L^2 (caso in cui essi discendono essenzialmente della L^2-continuità di operatori pseudo-differenziali con simboli nelle usuali classi di Hörmander $S^m_{\varrho,\delta}$, $0 < \delta < \varrho \leq 1$) al caso L^p con $1 < p < \infty$ arbitrario. È ben noto che gli operatori pseudo-differenziali di ordine 0 con simbolo nelle classi di Hörmander di tipo ϱ, δ non sono in generale L^p continui, per $p \neq 2$ e ϱ strettamente minore di 1. Questo ci indurrà alla considerazione di particolari classi simboliche in cui, alle usuali stime sulla decrescita all'infinito delle derivate dei simboli in termini di un' opportuna funzione peso suggerita dall'equazione, si aggiunge una particolare condizione (soddisfatta dagli operatori differenziali lineari) tale da implicare la L^p-continuità per i corrispondenti operatori di ordine 0.

La prima classe di equazione alle derivate parziali esaminata in questo lavoro è della forma

$$(1) \qquad \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a_\alpha(x) D^\alpha_x u = f(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{ insieme aperto};$$

con notazioni usuali, per $\alpha \in \mathbf{N}^n$ si pone $\partial^\alpha_x := \partial^{\alpha_1}_{x_1} \dots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$, $D^\alpha_x := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha_x$ e $|\alpha| := \alpha_1 + \dots \alpha_n$. La somma a primo membro di (1) è qui estesa a tutti i multi-indici α che appartengono ad un assegnato *poliedro completo* $\mathcal{P}$ di $\mathbf{R}^n$ nel senso di Gindikin-Volevich [2] (si veda in proposito anche [1]); ovvero $\mathcal{P}$ è l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti di $\mathbf{R}^n_+$, sulla cui geometria si formulano opportune ipotesi di regolarità sulle quali non entreremo qui nel merito. Ci limitamo a sottolineare che in un poliedro completo i *vertici*, il cui insieme verrà denotato co $V(\mathcal{P})$, sono sempre punti a cooordinate intere non negative e che l'origine è un vertice del poliedro. All'equazione (1) (o all'operatore lineare a derivate parziale $P(x, D) := \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a_\alpha(x) D^\alpha_x$ ad essa corrispondente) si associa la funzione peso

$$(2) \qquad \lambda_{\mathcal{P}}(\xi) = \sqrt{\sum_{\gamma \in V(\mathcal{P})} \xi^{2\gamma}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Il vantaggio che un tale peso offre, rispetto al peso ellittico usuale $\langle \xi \rangle :=$

$\sqrt{1+|\xi|^2}$, risiede nel fatto di dare risalto, attraverso i monomi ξ^γ, esattamene agli ordini di derivazione che intervengono nell'espressione $P(x, D)$ (o, meglio, agli ordini di derivazione «rilevanti» coincidenti con i vertici di $\mathcal{P}$). L'operatore $P(x, D)$ si dice *multi-quasi-ellittico* in Ω, se il suo simbolo $P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ verifica le seguenti stime dal basso:

$$\begin{aligned} &\forall K \subset \Omega \text{ insieme compatto}, \quad \exists \mathrm{C} = \mathrm{C_K},\ \mathrm{R} = \mathrm{R_K} > 0: \\ &|P(x, \xi)| > C\lambda_{\mathcal{P}}(\xi), \qquad |\xi| > R,\ x \in K. \end{aligned} \tag{3}$$

Nel quadro degli operatori differenziali lineari appena introdotti si dimostra il seguente

TEOREMA 1. – *Sia* $P(x, D) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ *multi-quasi-ellittico su un aperto* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *e sia* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $p(x, D)\, u = f(x)$, *con dato* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Allora* $u \in H^{1,\,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lo spazio $H^{1,\,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nell'enunciato rappresenta la versione localizzata, sopra un dominio aperto, di una scala di spazi di Sobolev $H^{s,\,p}_{\mathcal{P}}$, $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, definiti in modo naturale attraverso il peso $\lambda_{\mathcal{P}}$ come $H^{s,\,p}_{\mathcal{P}} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : \lambda_{\mathcal{P}}(D)^s u := \mathcal{F}^{-1}(\lambda_{\mathcal{P}}(\xi)^s \widehat{u}(\xi)) \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$; qui e nel seguito $\widehat{\ }$ denota la trasformata di Fourier e $\mathcal{F}^{-1}$ l'antitrasformata.

Come già osservato, il caso rilevante del Teorema 1 è $p \neq 2$. La dimostrazione del teorema in questo caso poggia sull'introduzione di una conveniente algebra di operatori pseudo-differenziali $a(x, D)\, u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x, \xi)\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi$ con simboli $a(x, \xi)$ pesati in termini della funzione $\lambda_{\mathcal{P}}$. La scelta delle classi simboliche adeguate è suggerita dalle seguenti proprietà notevoli di cui gode il peso $\lambda_{\mathcal{P}}$.

a. $\exists C > 1 : \dfrac{1}{C}\langle\xi\rangle^{\mu_0} \leq \lambda_{\mathcal{P}}(\xi) \leq C\langle\xi\rangle^{\mu_1}$

b. $\forall \alpha, \gamma \in \mathbf{N}^n$, $\exists C = C_{\alpha,\gamma} > 0 : |\xi^\gamma D^{\alpha+\gamma} \lambda_{\mathcal{P}}(\xi)| \leq C \lambda_{\mathcal{P}}(\xi)^{1 - \frac{1}{\mu}|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n$

In a. e b. μ_0, μ_1 e μ sono costanti positive dipendenti esclusivamente dal poliedro $\mathcal{P}$ dette rispettivamente *ordine minimo, ordine massimo* e *ordine formale* di $\mathcal{P}$. Si notino in particolare le stime in b. sulla decrescita all'infinito delle derivate del peso $\lambda_{\mathcal{P}}$; accanto ad una condizione di decrescita che si misura globalmente in termini della funzione $\lambda_{\mathcal{P}}$ stessa (usuale nel calcolo simbolico), esse impongono una condizione aggiuntiva, in cui ad una derivazione del peso $\lambda_{\mathcal{P}}$ lungo ξ_j corrisponde una decrescita, lungo quella direzione, espressa in termini di $\dfrac{1}{|\xi_j|}$. Il comportamento del peso evidenziato da b. suggerisce di assumere le stesse condizioni di decrescita sui simboli degli operatori pseudo-differenziali. Seguendo un'idea di Taylor [3], introduciamo questa definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Per* $m \in \mathbf{R}$ *e* $0 < \varrho \leq \dfrac{1}{\mu}$ *assegnati,* $M^m_{\varrho,\mathcal{P}}(\Omega)$ *è la classe delle funzioni* $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ *tali che per ogni insieme compatto* $K \subset \Omega$, $\alpha, \beta \in$

$\mathbf{N}^n$ *e* $\gamma \in \{0, 1\}^n$ *esiste* $C = C_{\alpha, \beta, \gamma, K} > 0$ *per cui*:

$$|\xi^\gamma D_\xi^{\alpha+\gamma} D_x^\beta a(x, \xi)| \leq C\lambda_{\mathcal{P}}(\xi)^{m-\varrho|\alpha|}, \quad x \in K, \ \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

Nel caso in cui il peso $\lambda_{\mathcal{P}}(\xi)$ coincide con il peso elittico standard $\langle\xi\rangle$, le classi di simboli pesati $M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$ si riducono alle classi omogeneee $M^m_\varrho(\Omega)$ introdotte e studiate da Taylor in [3]; le classi $M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$ studiate nel presente lavoro costituiscono una versione pesata di quelle di Taylor adattata alle equazioni multi-quasi-ellittiche ivi studiate. Per quel che riguarda la condizione ausiliaria sulla decrescita delle derivate nelle variabili duali ξ imposta dalla presenza del monomio ξ^γ nelle stime (4), essa è motivata dall'esigenza di considerare delle classi di operatori pseudodifferenziali L^p-continui per valori di $1 < p < \infty$ diversi da 2. In merito alle classi simboliche $M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$ vale il seguente risultato di L^p-continuità.

TEOREMA 2. – *Se* $a(x, \xi) \in M^0_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$, $0 < \varrho \leq \dfrac{1}{\mu}$, *allora* $a(x, D): L^p_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *è un operatore lineare e continuo, per qualunque* $1 < p < \infty$.

La dimostrazione del Teorema 2 ripercorre, nei suoi passi fondamentali, quella della L^p-continuità di operatori pseudo-differenziali con simbolo nella classe di Hörmander $S^0_{1,0}$ (si vedano ad esempio [3], [5]); essa si appoggia essenzialmente su un teorema di Lizorkin-Marcinkiewicz concernente la L^p-continuità di una classe di moltiplicatori di Fourier, cioè operatori della forma $m(D)\,u(x) = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\,\widehat{u}(\xi))(x) = (\mathcal{F}^{-1} m * u)(x)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Il teorema di Lizorkin-Marcinkiewicz asserisce quanto segue.

TEOREMA 3. – *Se la funzione* $m(\xi)$ *è definita e continua in* $\mathbf{R}^n$ *con derivate continue* $\partial^\gamma m(\xi)$ *per ogni* $\gamma \in \{0,1\}^n$ *e se esiste una costante* $B > 0$ *tale che*

$$|\xi^\gamma \partial^\gamma m(\xi)| \leq B, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \ \gamma \in \{0, 1\}^n, \tag{5}$$

allora $m(D): L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)$ *è lineare e continuo per ogni* $1 < p < \infty$.

Questo teorema riveste, nel contesto delle classi $M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$, il ruolo giocato dal Teorema di Mikhlin-Hörmander nel quadro delle classi $S^0_{1,0}$. Si noti che le stime (5) impongono alle derivate di $m(\xi)$ la stessa modalità di decrescita all'infinito soddisfatta dal peso $\lambda_{\mathcal{P}}$ e assunta sui simboli $a(x, \xi) \in M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$ in (4). In conseguenza del Teorema 2 e delle proprietà essenziali del calcolo pseudo-differenziale, si deduce facilmente che se $a(x, \xi) \in M^m_{\varrho, \mathcal{P}}(\Omega)$ allora $a(x, D): H^{s+m, p}_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to H^{s, p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è un operatore lineare e continuo per qualsiasi $s \in \mathbf{R}$ e $1 < p < \infty$. Attraverso una costruzione classica, si verifica poi che un operatore differenziale multi-quasi ellittico $P(x, D) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ ammette una parametrix nell'algebra degli operatori che abbiamo introdotto; esiste cioè un operatore $Q(x, D)$, con simbolo $Q(x, \xi) \in M^{-1}_{\frac{1}{\mu}, \mathcal{P}}(\Omega)$, tale che $Q(x, D)\,P(x, D) = I + R$ e $P(x, D)\,Q(x, D) = I + S$, essendo I la mappa identità e R, $S: \mathcal{E}'(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ lineari e continui. Il risultato del Teorema 1 segue allora da queste proprietà.

Un risultato di regolarità analogo al Teorema 1 si è ricavato anche nel contesto di una particolare classe di equazioni a derivate parziali lineari a coefficienti polinomiali del tipo $\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}} x^\alpha D_x^\beta u = f(x)$, dove $\mathcal{P}$ è un poliedro completo dello spazio $\mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}$. Diremo che una tale equazione è multi-quasi-ellittica se il simbolo $P(x,\xi)$ dell'operatore differenziale $P(x,D) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{P}} x^\alpha D^\beta$ soddisfa la stima dal basso $|P(x,\xi)| > C\lambda_{\mathcal{P}}(x,\xi)$, per $|x| + |\xi| > R$, con opportune costanti $C, R > 0$. Benchè l'analisi precedentemente illustrata si possa applicare anche a questo caso, il ruolo simmetrico giocato dalle variabili x, ξ in queste equazioni suggerisce di inquadrarne lo studio nel contesto di classi simboliche globali di tipo Shubin, nello spirito di quelle introdotte in [1], sulle quali si impone una condizione del tipo prescritto dal Teorema di Lizorkin-Marcinkiewicz.

L'ultima parte della tesi riguarda lo studio di un'analoga problematica di regolarità in spazi di Sobolev pesati, per di una classe di equazioni semi-lineari del tipo

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{P}} a_\alpha(x) D^\alpha = F(x, D^\beta u, f)_{\beta\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}(\mathcal{P})}; \tag{6}$$

$\mathcal{P}$ è nuovamente un poliedro completo di $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ è l'insieme delle facce del poliedro non appartenenti agli iperpiani coordinati ed $F(x,\zeta)$ è una funzione non lineare assegnata, di classe C^∞ rispetto ad x e intera analitica rispetto al vettore complesso ζ. In questo caso, il problema viene affrontato attraverso lo studio di una classe di simboli $a(x,\xi)$ a regolarità limitata, nel senso di [4], a valori negli spazi di Sobolev pesati $H^{s,p}_{\mathcal{P}}$ rispetto alla variabile x. Imponendo sui simboli una condizione del tipo Lizorkin-Marcinkiewicz e ricorrendo ad una versione vettoriale del Teorema 3, per i corrispondenti operatori pseudo-differenziali si dimostra un teorema di continuità negli spazi di Sobolev pesati. Assumendo allora che la parte lineare $P(x,D) = \sum_{\alpha\in\mathcal{P}} a_\alpha(x) D^\alpha$ dell'equazione (6) sia multi-quasi-ellittica, si ottiene un risultato di regolarità analogo al Teorema 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boggiatto P., Buzano E., Rodino L., *Global Hypoellipticity and Spectral Theory*, Akademie Verlag (1996).
[2] Gindikin S.G., Volevich L.R., *The method of Newton's Ployhedron in the Theory of Partial Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers Group (1992).
[3] Taylor M.E., *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press (1981).
[4] Taylor M.E., *Pseudodifferential Operators and Non Linear Partial Differential Equations*, Birkäuser (1991).
[5] Wong M.W., *An introduction to pseudo-differential operators*, World Scientific Publishing Co. (1999).

Dipartimento di Matematica, Università di Torino; e-mail: morando@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca; Prof. Luigi Rodino, Università di Torino