Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Dalbono

Risultati di molteplicità per problemi ai limiti superlineari e asintoticamente lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 475–478.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_475_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 475-478

Risultati di molteplicità per problemi ai limiti superlineari e asintoticamente lineari.

FRANCESCA DALBONO

La tesi è incentrata principalmente sullo studio di esistenza e molteplicità di soluzioni (con prescritte proprietà nodali) per un problema di Dirichlet avente la forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} &u''(t) + G(t, u(t)) = 0 \\ &u(0) = 0 = u(\pi), \end{aligned}$$

dove $G: [0, \pi] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è una funzione L^1-Carathéodory.

I risultati di molteplicità esposti nei primi capitoli della tesi sono ottenuti considerando una nonlinearità G di tipo asintoticamente lineare. In tale contesto vengono studiati sia il caso scalare ($m = 1$) che il caso vettoriale (in cui per semplicità si pone $m = 2$).

Il Capitolo finale è dedicato allo studio di esistenza di infinite soluzioni radiali, aventi un comportamento singolare nell'origine, per un'equazione differenziale alle derivate parziali, di tipo ellittico, caratterizzata dalla presenza dell'operatore p-laplaciano. Il problema scalare considerato soddisfa ipotesi di superlinearità. Un metodo di shooting garantisce la molteplicità di soluzioni per tale problema.

Mancando ipotesi di regolarità sulla funzione G, il caso asintoticamente lineare è stato invece studiato seguendo un approccio di tipo topologico. I teoremi di continuazione utilizzati discendono dal classico «Théorème Fondamental» di Leray e Schauder [4], in cui viene studiata la seguente equazione di punto fisso, dipendente da un parametro

$$(2) \qquad u = \mathcal{F}(u, \lambda),$$

dove $\mathcal{F}: X \times [0, 1] \to X$ è una funzione completamente continua e X è uno spazio di Banach. Sia Σ l'insieme delle soluzioni (eventualmente vuoto) di (2), definito da

$$\Sigma = \{(u, \lambda) \in X \times [0, 1] : u = \mathcal{F}(u, \lambda)\}.$$

Per ogni $\Omega \subseteq X \times [0, 1]$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si definisca inoltre $\Omega_\lambda := \{u \in X : (u, \lambda) \in \Omega\}$. Vale allora il «Théorème Fondamental», di cui ricordiamo l'enunciato.

TEOREMA 1. – *Supponiamo che esista un aperto $\Omega \subseteq X \times [0, 1]$ tale che*

$$\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset \qquad (\textit{stima a priori});$$

$$\deg(\mathrm{Id} - \mathcal{F}(\cdot, 0), \Omega_0, 0) \neq 0 \qquad (\textit{condizione di grado}).$$

Allora, Σ contiene un continuo (insieme chiuso e connesso) $\mathcal{C}$ lungo il quale λ assume tutti i valori in $[0, 1]$.

Per applicare il Teorema di Leray e Schauder (o le relative varianti) è opportuno introdurre la dipendenza dal parametro $\lambda \in [0, 1]$ nell'equazione data. Per questo motivo, trattando il caso vettoriale, si è immerso, tramite opportuna omotopia, il problema dato in una famiglia di problemi di Dirichlet dipendenti da un parametro λ associati ad un'equazione del tipo $u'' + G(t, u; \lambda) = 0$. In tal modo, un teorema di continuazione astratto può trasformare attraverso l'omotopia il sistema iniziale «debolmente accoppiato» in un problema autonomo disaccoppiato. Quest'ultimo viene quindi studiato attraverso una tecnica di mappa-tempo.

Nello studio del caso scalare, si è invece utilizzato un nuovo risultato di continuazione valido per problemi di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ dipendenti da un paramentro.

Dopo aver introdotto il parametro e aver scritto la famiglia di problemi nella forma (2), affinché siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 1 (o di una sua variante) risulta di fondamentale importanza sviluppare *stime a priori* sulle possibili soluzioni.

Uno strumento cruciale in tale direzione è il cosiddetto «Lemma dell'Elastico», che, in particolare, fornisce stime sulla norma C^1 delle soluzioni dell'equazione data.

Desiderando ottenere informazioni sulla molteplicità delle soluzioni di (1), si rivela opportuno introdurre una funzione *continua* $\mathbf{k} : \Sigma \to \mathbb{N}$ correlata (nel caso scalare) al *numero di zeri* oppure il concetto di *numero di rotazione* di una funzione u al tempo t, il quale non è altro che la «funzione angolare» che conta il numero dei semigiri del vettore $\overrightarrow{((0, 0), (u, u'))}$, quando s si muove da 0 a t. La molteplicità è garantita da stime sul numero di zeri o sul numero di rotazioni di soluzioni di determinati problemi di Cauchy.

Per lo studio del caso simmetrico e scalare realizzato nel Capitolo 3 della tesi, diventa importante ai fini della molteplicità introdurre il concetto di *autovalore con peso*. Infatti, tenendo in considerazione i classici Teoremi di confronto di Sturm, è possibile stabilire una relazione tra autovalori con peso e numeri di rotazione di problemi lineari ausiliari; da tale relazione discenderanno le stime richieste sul numero di rotazioni. In particolare, si considerano problemi lineari della forma

$$\begin{aligned} &u''(t) + \lambda \quad \varphi(t)\, u(t) = 0 \\ &u(0) = 0 = u(\pi) \end{aligned} \tag{3}$$

dove $\varphi \in L^1$ soddisfa la condizione di segno $\varphi \succ 0$ (i.e. $\varphi(t) \geqslant 0$ per q.o. $t \in [0, \pi]$ e $\varphi > 0$ su un sottoinsieme di $[0, \pi]$ di misura non nulla). Dalla teoria di Sturm segue che il problema (3) ammette la seguente successione di autovalori

$$0 < \lambda_1(\varphi) < \lambda_2(\varphi) < \ldots < \lambda_j(\varphi) < \ldots$$

con $\lim_{j \to +\infty} \lambda_j(\varphi) = +\infty$. L'autofunzione corrispondente a $\lambda_j(\varphi)$ ha esattamente $(j-1)$ zeri in $(0, \pi)$. Possiamo quindi enunciare il primo risultato di molteplicità dimostrato nella tesi, relativo al caso scalare.

TEOREMA 2. – *Supponiamo che G soddisfi le seguenti condizioni di asintotica linearità* (A) *esistono quattro funzioni a_∞, b_∞, a_0, $b_0 \in L^1$ con $0 \prec a_\infty \leqslant b_\infty$ e*

$0 < a_0 \leqslant b_0$ *tali che*

$$a_\infty(t) \leqslant \liminf_{|x| \to +\infty} \frac{G(t,x)}{x} \leqslant \limsup_{|x| \to +\infty} \frac{G(t,x)}{x} \leqslant b_\infty(t)$$

$$a_0(t) \leqslant \liminf_{x \to 0} \frac{G(t,x)}{x} \leqslant \limsup_{x \to 0} \frac{G(t,x)}{x} \leqslant b_0(t)$$

uniformemente q.o. in $t \in [0,\pi]$. *Supponiamo che esistano* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ *tali che*

$$\lambda_n(a_0) < 1 < \lambda_m(b_\infty) \quad o \quad \lambda_n(a_\infty) < 1 < \lambda_m(b_0). \tag{4}$$

Allora, per ogni $h \in \mathbb{N}$ *con* $m \leqslant h \leqslant n$ *il problema* (1) *ha almeno due soluzioni* u_h *e* v_h *con* $u_h'(0) > 0$ *e* $v_h'(0) < 0$ *aventi esattamente* $(h-1)$ *zeri in* $(0, \pi)$.

Si noti che nel caso in cui a_∞, b_∞, a_0, b_0 sono costanti positive, la condizione (4) è equivalente a $\sqrt{b_\infty} < m \leqslant n < \sqrt{a_0}$ o $\sqrt{b_0} < m \leqslant n < \sqrt{a_\infty}$, dato che, sotto tali ipotesi, è possibile scrivere l'espressione esplicita del j-esimo autovalore. Infatti, $\lambda_j(c) = \frac{j^2}{c}$ per $c > 0$. Dunque l'ipotesi (4) sancisce l'esistenza di un «gap» tra il comportamento della nonlinearità in zero e quello all'infinito. Il numero di soluzioni aumenta incrementando tale «gap».

Lavorando con pesi continui, si è potuto generalizzare il risultato del Teorema 2 ad un contesto asimmetrico caratterizzato dalla presenza di pesi indefiniti (cfr. Capitolo 4 della tesi). La presenza di asimmetria richiede l'introduzione del concetto di autovalore con due pesi. In particolare, date due funzioni continue φ, ψ tali che $\varphi^+(t)\,\psi^+(t) \not\equiv 0$ in $(0, \pi)$, per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \{<, >\}$, si può denotare con $\lambda_j^\nu(\varphi, \psi) > 0$ il valore per il quale il problema semi-lineare

$$u''(t) + \lambda(\varphi(t)\, u^+(t) - \psi(t)\, u^-(t)) = 0, \quad u(0) = 0 = u(\pi), \quad u'(0)\ \nu\ 0$$

ammette una soluzione avente esattamente $(j-1)$ zeri in $(0, \pi)$. Si noti che la scelta di lavorare in ambito di continuità è dovuta al fatto che in tale contesto è stata sviluppata in letteratura (cfr. [1]) una teoria di Sturm la quale, tra l'altro, stabilisce una relazione tra autovalori con due pesi e numeri di rotazione.

Nel Capitolo 5 della tesi è stato inoltre trattato il caso in cui G in (1) è una funzione vettoriale e asimmetrica. Riportiamo un corollario del risultato, ottenuto restringendosi al caso simmetrico.

COROLLARIO 1. – *Supponiamo che* G *sia continua e che per ogni* $i \in \{1, 2\}$ *soddisfi* (A_i) *esistono* $N > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{B}_i \neq 0$, $\mathrm{A}_i \neq 0$ *tali che*

$$|x_i| > N \ \Rightarrow\ 0 \leqslant \frac{G_i(t,x)}{x_i} \leqslant \mathcal{B}_i^2 \quad \forall t \in [0,\pi],\ \forall x_j \in \mathbb{R}\ \textit{con}\ j \neq i$$

$$0 \neq |x_i| < \delta \Rightarrow A_i^2 \leqslant \frac{G_i(t,x)}{x_i} \qquad \forall t \in [0,\pi],\ \forall x_j \in \mathbb{R}\ \textit{con}\ j \neq i.$$

(F_i) *esiste una funzione continua* $\widetilde{G}_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $\widetilde{G}_i(0) = 0$ *tale che*

$$|G_i(t,x)| \leqslant \widetilde{G}_i(x_i) \quad \forall t \in [0,\pi],\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo inoltre che esistano $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *tali che*

$$\mathcal{B}_i < m_i < A_i \qquad \forall\, i \in \{1, 2\}.$$

Allora, esistono $h_1, h_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathbb{N}$ *tali che per ogni* $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ *con* $h_i \leqslant n_i \leqslant \mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2)$ *il problema* (1) *ha almeno quattro soluzioni la cui i-esima componente ha esattamente* $(n_i - 1)$ *zeri in* $(0, \pi)$.

Al fine di poter applicare un opportuno teorema astratto di continuazione che garantisca molteplicità di soluzioni è necessario esibire alcune stime sul numero di zeri di *ciascuna componente* di tutte le (possibili) soluzioni di (1). Mancando una condizione che limiti superiormente la funzione $\dfrac{G_i(t, x)}{x_i}$ quando $|x_i| < \delta$, la procedura di stima risulta molto più laboriosa. Per ricavare le stime necessarie si è perciò utilizzato un metodo analogo a quello sviluppato in [3].

Come già accennato in precedenza, l'ultimo capitolo della tesi (Capitolo 6) affronta un problema di tipo superlineare attraverso l'impiego di metodi di shooting. Il risultato principale conseguito consiste nel seguente teorema

TEOREMA 3. – *Siano* $0 < p - 1 < \delta$, $N > p$ *e* $\delta < \dfrac{N(p-1)+p}{N-p}$. *Allora, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *il problema*

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}|u|^{\delta-1}u, \quad r \in (0, 1), \quad u(1) = 0.$$

ha almeno due soluzioni singolari u_n, v_n *che hanno esattamente* n *zeri in* $(0, 1)$ *e soddisfano, rispettivamente,* $\lim_{r \to 0^+} u_n(r) = +\infty$ *e* $\lim_{r \to 0^+} v_n(r) = -\infty$.

Il precedente problema è affrontato considerando il problema di Cauchy

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + r^{N-1}|u|^{\delta-1}u = 0, \quad u(\varepsilon) = 0, \quad |u'(\varepsilon)| = \varepsilon^{-\frac{\delta+1}{\delta+1-p}}\beta \tag{5}$$

e provando che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $\varepsilon \in (0, 1)$ e $\beta > 0$ tali che ogni soluzione $u_{\varepsilon, \beta}$ di (5) è singolare nell'origine, non cambia segno in $(0, \varepsilon)$, ha esattamente $(n-1)$ zeri in $(\varepsilon, 1)$ e $u_{\varepsilon, \beta}(1) = 0$. A questo scopo, viene studiato separatamente il comportamento delle soluzioni in $[0, \varepsilon]$ e in $[\varepsilon, 1]$. Per ottenere il risultato di esistenza in $[0, \varepsilon]$ si usano teoremi di confronto di Sturm e la classificazione del comportamento delle soluzioni di $-\Delta_p u = |u|^{\delta-1}u$ presente in letteratura (cfr. [2]). Stime su un opportuno numero di rotazione associato a $u_{\varepsilon, \beta}$ conducono al risultato di molteplicità in $[\varepsilon, 1]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALIF M. e GOSSEZ J.-P., *On the Fučik spectrum with indefinite weights,* Differential Integral Equations, **14** (2001), 1511-1530.

[2] BIDAUT-VÉRON M.F., *Local e global behavior of solutions of quasilinear equations of Emden-Fowler type,* Arch. Rational Mech. Anal., **107** (1989), 293-324.

[3] FABRY C. e HABETS P., *Periodic solutions of second order differential equations with superlinear asymmetric nonlinearities,* Arch. Math., **60** (1993), 266-276.

[4] LERAY J. e SCHAUDER J., *Topologie et équations fonctionnelles,* Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup., **51** (1934), 45-78.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino; e-mail: dalbono@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Anna Capietto, Università degli Studi di Torino