Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Danilo Bruno

Meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana anolonoma: un approccio Gauge-invariante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 439–442.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 439-442

Meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana anolonoma: un approccio Gauge-invariante.

DANILO BRUNO

1. – Premesse e motivazioni.

La tesi di dottorato, cui la presente nota fa riferimento, è incentrata sullo studio degli aspetti geometrici della teoria dei sistemi dinamici aventi un numero finito di gradi di libertà e soggetti a vincoli cinetici bilateri, intesi come una sottovarietà differenziabile $\mathcal{B}$ immersa nello spazio degli atti di moto.

Il lavoro fa capo al filone di ricerca iniziato in [1] e proseguito in [2], nei quali i sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi sono stati studiati all'interno di un ambiente geometrico indipendente dalla scelta del sistema di riferimento, sfruttando la teoria dei jet-bundles. La descrizione della loro evoluzione è stata ottenuta per mezzo di un'opportuna rivisitazione del principio di Gauss della minima costrizione, riscrivendo il medesimo in termini di un processo di proiezione dell'evoluzione libera sulla sottovarietà dei vincoli.

Inoltre, è stato utilizzato l'approccio alla meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana olonoma introdotto in [3]. In questo lavoro gli aspetti di Gauge della meccanica Lagrangiana, che consistono nella possibilità di aggiungere alla Lagrangiana la derivata totale rispetto al tempo di una funzione definita sullo spazio delle configurazioni senza cambiare l'evoluzione, vengono inglobati nel formalismo. Questo è stato ottenuto introducendo un opportuno fibrato principale, detto il *fibrato degli scalari affini*, e studiando le proprietà geometriche delle sue prime jet-extension. Il risultato di questa procedura consiste in un nuovo ambiente di lavoro, formato da una collezione di fibrati principali, noti come *fibrati Lagrangiani*, al cui interno il concetto di funzione Lagrangiana viene sostituito con quello di *sezione Lagrangiana*: quest'ultima è la sezione di un opportuno fibrato principale, ed è definita in modo tale che ogni trasformazione di Gauge possa essere interpretata da un punto di vista passivo come un cambio di banalizzazione.

La struttura geometrica così introdotta è molto ricca. In particolare è possibile definire sui fibrati Lagrangiani un attributo geometrico intrinseco, noto come *tensore fondamentale*, per mezzo del quale la sezione Lagrangiana è trasformata nella 1-forma di Poincaré-Cartan, in termini della quale le equazioni di evoluzione possono essere scritte univocamente. Essa inoltre individua la trasformazione di Legendre e risulta essere l'unica depositaria dell'informazione dinamica.

Il lavoro di tesi cui questa nota fa riferimento si propone di estendere il formalismo sopra descritto al caso anolonomo.

2. – L'approccio intrinseco alla dinamica Lagrangiana anolonoma.

L'approccio Lagrangiano ai sistemi meccanici conservativi soggetti a vincoli cinetici non presenta particolari difficoltà. Infatti, è stato dimostrato in [1] come l'evoluzione di tali sistemi possa essere ottenuta a partire da una Lagrangiana $L = T + U$, in cui T e U rappresentano rispettivamente l'energia cinetica del sistema ed il potenziale delle forze conservative. Essendo tale Lagrangiana definita sullo spazio degli atti di moto, il tensore fondamentale permette di associarle univocamente una 1-forma di Poincaré-Cartan. Il pull-back di quest'ultima sulla sottovarietà dei vincoli può essere utilizzata per determinare l'evoluzione del sistema vincolato: l'intera procedura conduce alla scrittura delle equazioni di evoluzione di Lagrange-Chetaev, che sono compatibili con il principio di Gauss.

Tuttavia, qualora l'interesse si allarghi ad una classe di sistemi anolonomi più vasta, sorgono alcune difficoltà. Infatti la Lagrangiana che conduce alle equazioni del moto corrette nel caso olonomo non porta in generale ad equazioni di Lagrange-Chetaev corrette, qualora siano imposti sul sistema vincoli anolonomi. Nel lavoro di tesi è mostrato un esempio di un sistema meccanico non conservativo, la cui evoluzione è tuttavia ottenibile nel caso olonomo a partire da una Lagrangiana non del tipo $T + U$. Il pull-back della forma di Poincaré-Cartan sulla sottovarietà dei vincoli non conduce ad equazioni del moto corrette, nel senso che queste ultime non sono la proiezione dell'evoluzione libera per mezzo del principio di Gauss.

Questo controesempio rende evidente il fatto che in generale la Lagrangiana *libera*, che genera l'evoluzione in assenza di vincoli cinetici, e quella *estrinseca*, che è definita su tutto lo spazio degli atti di moto e genera l'evoluzione del sistema vincolato, sono due oggetti diversi. Il caso meccanico conservativo è un'eccezione, in cui entrambi gli oggetti sono rappresentati dalla medesima Lagrangiana $T + U$. Quindi, la Lagrangiana estrinseca deve essere intesa di fatto come un attributo del sistema vincolato.

Per questo motivo è stato scelto di descrivere i sistemi anolonomi da un punto di vista totalmente intrinseco: dal momento che la loro evoluzione è descritta da attributi geometrici propri, diversi da quelli liberi, essi dovrebbero essere di fatto definiti solo sulla sottovarietà dei vincoli.

L'approccio intrinseco ha come punto di partenza la costruzione di un ambiente geometrico che includa gli attributi di Gauge. Questo viene effettuato attraverso il pull-back dei fibrati Lagrangiani sulla sottovarietà dei vincoli. L'ambiente geometrico che si ottiene consiste sempre in una collezione di fibrati principali, detti *fibrati Lagrangiani anolonomi*, al cui interno la funzione Lagrangiana intrinseca può essere sostituita dal concetto di *sezione Lagrangiana anolonoma*. Quest'ultima è quindi un oggetto totalmente intrinseco, dipendente solo dagli attributi del sistema vincolato. Lo scopo è quello di definire una 1-forma di Poincaré-Cartan, per mezzo della quale descrivere l'evoluzione del sistema vincolato e la trasformazione di Legendre. Tuttavia, nessun tensore fondamentale può essere

definito canonicamente sui fibrati Lagrangiani anolonomi. Di conseguenza, la sezione Lagrangiana non fornisce sufficienti informazioni per ricostruire la 1-forma di Poincaré-Cartan ed è pertanto impossibile scrivere le equazioni di evoluzione a partire dalla sua sola conoscenza.
Questo problema è superato introducendo il concetto di *coppia di Poincaré-Cartan*: essa consiste nella simultanea assegnazione della sezione Lagrangiana anolonoma e della 1-forma di Poincaré-Cartan, che supplisca l'informazione dinamica mancante. I due oggetti non possono però essere assegnati indipendentemente l'uno dall'altro, ma sono legati da condizioni di compatibilità differenziali. Questo da luogo ad uno schema in cui l'informazione dinamica non è assegnata in modo minimale, ma mediante un numero sovrabbondante di quantità.
Lo schema così ottenuto è perfettamente funzionale alla determinazione delle equazioni di evoluzione e della trasformazione di Legendre e permette lo sviluppo del formalismo Lagrangiano ed Hamiltoniano anolonomo da un punto di vista intrinseco.

L'approccio adottato permette inoltre di sviluppare uno schema geometrico in cui il formalismo Lagrangiano ed Hamiltoniano fanno interagire cinematica e dinamica in modo perfettamente simmetrico. Infatti, come le proprietà cinematiche del sistema vincolato sono prese in considerazione assegnando una sottovarietà $\mathcal{B}$ dello spazio degli atti di moto, così l'informazione dinamica contenuta nella coppia di Poincaré-Cartan può essere riassunta assegnando una opportuna sottovarietà dal versante Hamiltoniano. La simultanea assegnazione delle due superfici è necessaria e sufficiente per determinare l'evoluzione del sistema vincolato. Quest'ultima possibilità permette anche di superare le difficoltà derivanti dalla dipendenza degli oggetti geometrici che costituiscono la coppia di Poincaré-Cartan. Infatti le due superfici possono essere liberamente assegnate, mentre le condizioni di compatibilità sono tenute in considerazione dal formalismo, sotto forma di un diffeomorfismo fra le due superfici (cfr. [4]).

3. – Aspetti costitutivi della dinamica anolonoma.

La parte finale del lavoro di tesi si occupa di capire il motivo per cui i sistemi meccanici conservativi possano essere descritti da un'unica Lagrangiana sia nel caso libero, sia in quello vincolato.

I sistemi meccanici sono caratterizzati dalle loro proprietà inerziali, riassunte nella funzione energia cinetica T. Per mezzo di quest'ultima è possibile definire un processo di proiezione della dinamica libera in quella vincolata, di fatto equivalente al principio di Gauss.

Tale attributo è stato memorizzato all'interno della geometria intrinseca, assegnando in maniera non canonica un *tensore fondamentale anolonomo*. È stato dimostrato che l'assegnazione di quest'ultimo è equivalente a quella del processo di proiezione medesimo e rappresenta fisicamente l'impronta lasciata sulla sottovarietà $\mathcal{B}$ dai dispositivi che esercitano i vincoli.

Questa osservazione apre la strada ad un approccio «costitutivo» alla meccanica anolonoma. Esso consiste nell'assegnare, accanto alla sottovarietà $\mathcal{B}$, il tensore fondamentale anolonomo: la prima descrive le proprietà cinematiche dei vincoli, mentre il secondo tiene conto dell'azione delle forze reattive. La conoscenza di queste ultime permette di fatto l'implementazione del principio di Gauss.

È stato dimostrato che in ogni sistema meccanico conservativo la Lagrangiana $T + U$ definisce univocamente un tensore fondamentale anolonomo per mezzo dell'energia cinetica T e risulta quindi essere automaticamente compatibile con il principio di Gauss. Per questo motivo essa descrive correttamente sia la dinamica libera che quella vincolata.

Infine, è stato mostrato come la presenza del tensore fondamentale anolonomo divida l'informazione dinamica portata dalla coppia di Poincaré-Cartan in due contributi distinti, consistenti in una sezione Lagrangiana ed una 1-forma di Chetaev, per mezzo delle quali la 1-forma di Poincaré-Cartan può essere ricostruita.

4. – Possibili sviluppi.

La novità introdotta dal presente lavoro consiste nell'aver abbandonato l'idea che l'evoluzione di un sistema anolonomo sia descritta a partire da una Lagrangiana definita su tutto lo spazio degli atti di moto, ma da una coppia di Poincaré-Cartan definita solo sulla sottovarietà $\mathcal{B}$. Questo potrebbe essere il punto di partenza per lo studio del problema lagrangiano anolonomo inverso: dato un sistema anolonomo di cui si conosce l'evoluzione, bisognerebbe trovare sotto quali condizioni esistono coppie di Poincaré-Cartan che ne riassumono le proprietà dinamiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. MASSA e E. PAGANI, *Classical Dynamics of non-holonomic systems: a geometric approach*, Ann. Inst. Henry Poincaré, Physique Théorique, **55** (1991), 511-544.

[2] E. MASSA e E. PAGANI, *A new look at Classical Mechanics of constrained systems*, Ann. Inst. Henry Poincaré, Physique Théorique, **66** (1997), 1-36.

[3] E. MASSA, E. PAGANI e P. LORENZONI, *On the gauge structure of Classical Mechanics*, Transport Theory and Statistical Physics, **29** (2000), 69-91.

[4] E. MASSA, S. VIGNOLO e D. BRUNO, *Lagrangian Mechanics of non-holonomic systems: an intrinsic approach*, J. Phys. A: Math. Gen., **35** (2002), 6713-6742

Dipartimento di Matematica, Università di Genova. E-mail: bruno@dima.unige.it
Dottorato in Matematica ed Applicazioni
(Sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Enrico Massa, Università di Genova