
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

PAULO RIBENBOIM

FFF. Fibonacci: di Fiore in Fiore

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 5-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2002), n.2, p. 329–353.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2002_8_5A_2_329_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

ℱℱℱ. Fibonacci: di Fiore in Fiore.

PAULO RIBENBOIM (*)

Riassunto. – *In occasione della commemorazione dell'800-esimo anniversario della pubblicazione del Liber Abaci, desidero richiamare l'attenzione del lettore su alcuni dei fatti che preferisco riguardanti numeri di Fibonacci. Tali fatti includono la presenza di quadrati, di multipli di quadrati e di numeri potenti tra i numeri di Fibonacci, la rappresentazione di numeri reali e la costruzione di numeri trascendenti mediante numeri di Fibonacci, la possibilità di costruire una serie zeta ed un dominio a fattorizzazione unica associati ai numeri di Fibonacci.*

1. – Introduzione.

È nelle assolate giornate primaverili che si fanno le passeggiate più piacevoli, camminando fra i campi e raccogliendo i fiori selvatici che crescono qua e là e rendono la campagna così meravigliosa. Per i frequentatori più assidui, che scopriranno i posti dove crescono i fiori più belli, i campi non serberanno più segreti.

Ci sono altri tipi di passeggiate cui indulgono i matematici, in cui si va su e giù fra i numeri interi in cerca di «fiori», cioè numeri dalle proprietà particolarmente interessanti. Molti sono i modi di passeggiare fra i numeri. Si può certamente visitarli tutti ad uno ad uno e, in questo modo, trovare tutti i fiori, ma questa strategia è stancante e poco efficiente. È più efficace muoversi secondo altri ritmi di passo e tracciare una sorta di «guida» ai fiori. Si consideri ad esempio la

(*) Traduzione dall'originale inglese di Andrea Mori.

passeggiata a passo costante sui numeri in una successione aritmetica: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$. DIRICHLET scoprì che se a e d sono privi di fattori comuni troveremo nel corso della passeggiata tanti numeri primi quanti ne vogliamo.

Altri metodi per passeggiare lungo i numeri non comportano passi di lunghezza costante. Alcuni tipi di passeggiate sono dette *successioni ricorsive* perchè la lunghezza di ogni passo dipende da quelle dei passi precedenti. La *successione ricorsiva binaria* con parametri non nulli P e Q è definita dalla formula

$$U_n = PU_{n-1} - QU_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

e dai termini iniziali U_0, U_1 assegnati arbitrariamente. Lo studio dei tipi di numeri (primi, quadrati, potenze di grado elevato, eccetera) che compaiono in queste successioni ha interesse aritmetico.

Nella sua opera *Liber Abaci*, pubblicata nell'anno 1202, Leonardo PISANO, altrimenti noto col nome di FIBONACCI, propose un problema sull'aritmetica dello schema riproduttivo dei conigli. Nella soluzione, al susseguirsi delle generazioni, il numero di individui nella popolazione forma la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, Questi numeri F_n sono detti *numeri di Fibonacci*, e sono definiti da una successione ricorsiva binaria con parametri $P = 1$ e $Q = -1$, precisamente

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

per ogni $n \geq 2$.

I numeri di Fibonacci sono stati oggetto dell'irrefrenabile curiosità dei matematici che hanno scoperto un'infinità di identità e di proprietà aritmetiche ed algebriche soddisfatte da questi numeri. Si osserva che lo studio dei numeri di Fibonacci si accompagna naturalmente a quello dei *numeri di Lucas* L_n , definiti da un'altra successione ricorsiva binaria con parametri $P = 1$ e $Q = -1$ e precisamente

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

per ogni $n \geq 2$. I primi numeri di Lucas sono quindi $L_0 = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$.

In questo lavoro a carattere espositivo non cercherò di illustrare tutti i risultati noti sui numeri di Fibonacci, ma ne selezionerò alcuni

dei miei favoriti. Per semplificare la lettura, inizierò con un elenco di fatti elementari preliminari. Poi, discuterò i quadrati, i multipli di quadrati, le potenze di esponente maggiore ed i numeri potenti che compaiono nella successione di Fibonacci e nella successione di Lucas. Gli argomenti successivi riguardano la rappresentazione dei numeri reali come successioni costruite dai numeri di Fibonacci e la costruzione di successioni di numeri trascendenti. Introduurrò anche una serie zeta ed un dominio a fattorizzazione unica associato ai numeri di Fibonacci.

2. – Preliminari.

Per comodità del lettore, elenchiamo alcuni fatti fondamentali che presentiamo senza dimostrazione;

(2.1) La *sezione aurea* è il numero

$$\gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.616 \dots$$

ed il suo coniugato è

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0.616 \dots$$

Dunque $\gamma + \delta = 1$, $\gamma\delta = -1$, $\gamma - \delta = \sqrt{5}$ e γ e δ sono le radici di $X^2 - X - 1$.

(2.2) Le formule di BINET: per ogni $n \geq 0$,

$$F_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\sqrt{5}}, \quad L_n = \gamma^n + \delta^n.$$

(2.3) La relazione quadratica fondamentale tra i numeri di Fibonacci e Lucas è

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

(2.4) Le soluzioni in interi positivi delle equazioni $x^2 - 5y^2 = 4$ e $x^2 - 5y^2 = -4$ sono, rispettivamente, le coppie $(x, y) = (L_{2n}, F_{2n})$ per ogni $n \geq 1$ e $(x, y) = (L_{2n-1}, F_{2n-1})$ per ogni $n \geq 1$.

(2.5) Le successioni di Lucas e Fibonacci possono essere estese agli indici negativi mantenendo la validità della ricorsività: per $n < 0$ definiamo

$$F_n = -(-1)^n F_{-n} \quad \text{e} \quad L_n = (-1)^n L_{-n}.$$

Allora le relazioni $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ valgono per ogni n (positivo o no).

Delle numerose identità algebriche ne citiamo qualcuna che vale qualunque siano gli interi m ed n :

$$(2.6) \quad 2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m.$$

$$(2.7) \quad 2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n.$$

$$(2.8) \quad F_{m+n} = F_m L_n - (-1)^n F_{m-n}.$$

$$(2.9) \quad L_{m+n} = L_m L_n - (-1)^n L_{m-n}.$$

$$(2.10) \quad F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} - (-1)^n.$$

$$(2.11) \quad L_n^2 = L_{n-1} L_{n+1} + 5(-1)^n.$$

$$(2.12) \quad F_{m+n} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1}.$$

$$(2.13) \quad L_{m+n} = F_{n+1} L_m + F_n L_{m-1}.$$

$$(2.14) \quad F_{2n} = F_n L_n.$$

$$(2.15) \quad L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n = 5F_n^2 + 2(-1)^n.$$

$$(2.16) \quad F_{3n} = F_n(5F_n^2 + 3(-1)^n) = F_n(L_n^2 - (-1)^n).$$

$$(2.17) \quad L_{3n} = L_n(L_n^2 - 3(-1)^n) = L_n(5F_n^2 + (-1)^n).$$

Dopo le identità algebriche, spostiamo l'attenzione alle proprietà aritmetiche. Iniziamo con una proprietà di divisibilità tra numeri di Fibonacci e di Lucas.

(2.18) Siano $1 \leq m < n$. Allora

a) F_m divide F_n se e soltanto se m divide n .

b) L_m divide L_n se e soltanto se m divide n ed il quoziente n/m è un intero dispari.

Le prossime proprietà riguardano il massimo comun divisore. Poniamo $d = \text{MCD}(m, n)$. Allora

(2.19)

$$\text{a)} \quad \text{MCD}(F_m, F_n) = F_d.$$

$$\text{b)} \quad \text{MCD}(L_m, L_n) = \begin{cases} L_d & \text{se } m/d \text{ e } n/d \text{ sono dispari} \\ 2 & \text{se } m/d \text{ o } n/d \text{ è pari e } 3 \nmid d. \\ 1 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

$$(2.20) \quad \text{MCD}(F_m, L_n) = \begin{cases} L_d & \text{se } m/d \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } m/d \text{ è dispari e } 3 \nmid d. \\ 1 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

(2.21) Per ogni $k, n \geq 1$, $F_{kn} = F_n Z$ dove $\text{MCD}(F_n, Z)$ divide k .

(2.22) Per ogni k dispari, $n \geq 1$, $L_{kn} = L_n W$ dove $\text{MCD}(L_n, W)$ divide k .

Consideriamo ora la fattorizzazione in primi dei numeri di Fibonacci e di Lucas.

(2.23) F_n è pari se e soltanto se $3 \mid n$. L_n è pari se e soltanto se $3 \nmid n$.

(2.24) Sia p un primo dispari. Allora esiste $n > 0$ tale che $p \mid F_n$. Sia $\varrho(p)$ il più piccolo intero $n > 0$ tale che $p \mid F_n$. Il numero $\varrho(p)$ è detto *grado di comparsa* o *punto d'entrata* di p . Allora $p \mid F_n$ se e soltanto se $\varrho(p) \mid n$.

Il teorema di LUCAS afferma che

(2.25) Sia p un primo dispari, $p \neq 5$. Allora $p \mid F_{p - (5/p)}$ dove $(5/p)$ è il simbolo di Legendre. È altresì chiaro che $F_5 = 5$ e quindi $\varrho(5) = 5$.

Osserviamo che nessun risultato similare vale per i numeri di Lucas. Per esempio 5 non divide L_n per ogni $n > 0$.

Diciamo che il primo p è un *fattore primitivo* di F_n se $q(p) = n$. I numeri di Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$ non hanno fattori primitivi. D'altra parte CARMICHAEL [Ca13] ha dimostrato:

(2.26) Se $n \neq 1, 2, 6, 12$ allora F_n ha un fattore primitivo.

Infatti, CARMICHAEL ha dimostrato un risultato più generale, valido per altre successioni oltre quella di Fibonacci, si veda anche l'articolo di HALTON [Ha66].

Concludiamo questa sezione citando alcuni risultati sulla magnitudine dei numeri di Fibonacci e di Lucas e dei loro quozienti.

(2.27) Per ogni $n \geq 1$:

$$\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} - 1 < F_n < \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + 1, \quad \text{dunque } F_n = \left[\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \right] \text{ o } \left[\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} \right] + 1,$$

$$\gamma^n - 1 < L_n < \gamma^n + 1 \quad \text{dunque } L_n = [\gamma^n] \text{ o } [\gamma^n] + 1.$$

(2.28) Valgono anche le disuguaglianze

$$\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} - 1 < F_n < \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + 1, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

e

$$\gamma^{n-1} < L_n < \gamma^{n+1} \quad \text{per ogni } n \geq 2$$

(2.29)

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_4}{F_3} < \dots < \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \dots < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \dots < \frac{F_5}{F_4} < \frac{F_3}{F_2}$$

e

$$\frac{L_3}{L_2} < \frac{L_5}{L_4} < \dots < \frac{L_{2n+1}}{L_{2n}} < \dots < \frac{L_{2n}}{L_{2n-1}} < \dots < \frac{L_4}{L_3} < \frac{L_2}{L_1}.$$

(2.30) Valgono i limiti seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \gamma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \gamma.$$

Ne segue che $F_{2n}/F_{2n-1} < \gamma < F_{2n+1}/F_{2n}$ e $L_{2n+1}/L_{2n} < \gamma < L_{2n}/L_{2n-1}$ per ogni $n \geq 1$.

3. – Quadrati e potenze.

Denotiamo col simbolo $\square$ un qualunque non specificato numero intero non nullo che sia un quadrato, o anche l'insieme di tali numeri. COHN [Co64] e WYLER [Wy64] hanno dimostrato indipendentemente che

$$(1) \quad \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = \square\} = \{1, 2, 12\}.$$

COHN ha anche dimostrato che

$$(2) \quad \begin{aligned} \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = 2\square\} &= \{3, 6\}, \\ \{n \geq 1 \text{ tali che } L_n = \square\} &= \{1, 3\}, \\ \{n \geq 1 \text{ tali che } L_n = 2\square\} &= \{6\}. \end{aligned}$$

Diamo ora una dimostrazione molto semplice di (1) e (2).

(3.1). DIMOSTRAZIONE DI (1). – È chiaro che $F_1 = F_2 = 1$, $F_{12} = 144$ sono quadrati e che se $n \leq 12$ e $n \neq 1, 2, 12$ allora $F_n \neq \square$. Sia dunque $n > 12$ e supponiamo $F_n = \square$. Allora F_n è un quadrato modulo 8 e pertanto $F_n \equiv 0, 1$ o $4 \pmod{8}$. La successione $F_n \pmod{8}$ è uguale a

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 0$$

e quindi ha periodo 12. Osservandola si vede che deve necessariamente aversi $n \equiv 0, 1, 2, 6$ o $11 \pmod{12}$.

Primo caso: n è dispari. Allora $n = 12g \pm 1$ con $g \geq 1$. Per l'identità (2.8), $F_{12g \pm 1} = F_{6g \pm 1} L_{6g} - (-1)^{6g} F_{\pm 1} = F_{6g \pm 1} L_{6g} - 1$.

Scriviamo $6g = 2 \cdot 3^j h$ con $j \geq 1$ and h non divisibile per 3. Poichè $2h \mid 6g$ e $6g/2h$ è dispari, allora $L_{2h} \mid L_{6g}$.

La successione dei numeri di Lucas modulo 8 è uguale a

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 2$$

e quindi ha periodo 12. Poichè 3 non divide $2h$, allora $L_{2h} \equiv 3 \pmod{4}$ e quindi esiste un primo $p \mid L_{2h}$ tale che $p \equiv 3 \pmod{4}$. Dall'ipotesi $F_n = \square$ e l'espressione sopra, segue $-1 \equiv \square \pmod{p}$ che è impossibile in quanto $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Secondo caso: n è pari. Ora $n = 6g$ oppure $n = 12g + 2$. Combinando i fatti (2.14) e (2.20), se $\square = F_{12g+2} = F_{6g+1}L_{6g+1}$ con $MCD(F_{6g+1}, L_{6g+1}) = 1$, allora $F_{6g+1} = \square$ che è impossibile per il primo caso.

Sia $F_{6g} = \square$. Scriviamo $6g = 2h2^i3^j$ con $i \geq 0$, $j \geq 1$ e $MCD(6, h) = 1$. Per (2.21), $F_{6g} = F_{2h}Z$ con $MCD(F_{2h}, Z) | 2^i3^j$. Poichè 3 non divide h , allora 2 non divide F_{2h} e poichè 2 non divide h , allora 3 non divide F_{2h} . Quindi $MCD(F_{2h}, Z) = 1$ e $F_{2h} = \square$. Ma se 3 non divide h , $2h \equiv 2 \pmod{12}$ e questo si era già dimostrato essere impossibile. ■

(3.2). DIMOSTRAZIONE DI (2). - $L_1 = 1$ e $L_3 = 4$ sono quadrati, ma $L_2 = 3$ non lo è. Assumiamo $n > 3$ e minimo tale che $L_n = \square$. Poichè L_n è un quadrato modulo 8 risulta $L_n \equiv 0, 1$ o $4 \pmod{8}$. Confrontando con la successione dei numeri di Lucas modulo 8 data nel corso della dimostrazione precedente si ottiene $n \equiv 1, 3$ o $9 \pmod{12}$.

Se $n = 12g + 1$, per l'identità (2.9), $L_{12g+1} = L_{6g+1}L_{6g} - (-1)^{6g}L_1 = L_{6g+1}L_{6g} - 1$. Scriviamo $6g = 2 \cdot 3^j h$ con $j \geq 1$ e 3 non divide h , cosicchè $2h | 6h$ e $6g/2h$ è dispari e, per (2.18), $L_{2h} | L_{6g}$. Ma 3 non divide $2h$, quindi $L_{2h} \equiv 3 \pmod{4}$ ed esiste un primo $p | L_{2h}$ tale che $p \equiv 3 \pmod{4}$. Dall'ipotesi $L_n = \square$ e la relazione precedente deduciamo che $-1 \equiv \square \pmod{p}$ che è impossibile perchè $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Se $n = 12g \pm 3 = 3(4g \pm 1)$ la relazione (2.17) implica che $\square = L_n = L_{4g \pm 1}(L_{4g \pm 1}^2 - 3(-1)^{4g \pm 1}) = L_{4g \pm 1}(L_{4g \pm 1}^2 + 3)$ e $d = MCD(L_{4g \pm 1}, L_{4g \pm 1}^2 + 3) | 3$. Osserviamo che se $3 | L_r$ allora $r \equiv 2$ o $6 \pmod{8}$. Quindi $d = 1$ e $L_{4g \pm 1} = \square$, $L_{4g \pm 1}^2 + 3 = \square$. Per minimalità di n , risulta $4g \pm 1 = 3$, cioè $n = 9$. D'altra parte L_9 non è un quadrato e questa contraddizione conclude la dimostrazione. ■

Per l'equivalenza enunciata in (2.4) i risultati di COHN e WYLER possono essere interpretati in termini di soluzioni di certe equazioni diofantee:

(3.3) Le uniche soluzioni in interi positivi delle equazioni elencate nella colonna sinistra della tabella seguente sono quelle della colon-

na destra:

$$x^2 - 5y^4 = 4 \quad (x, y) = (3, 1), (322, 12)$$

$$x^2 - 5y^4 = -4 \quad (x, y) = (1, 1)$$

$$x^2 - 20y^4 = 4 \quad (x, y) = (18, 2)$$

$$x^2 - 20y^4 = -4 \quad (x, y) = (4, 1)$$

$$x^4 - 5y^2 = 4 \quad \emptyset$$

$$x^4 - 5y^2 = -4 \quad (x, y) = (1, 1), (2, 2)$$

$$4x^4 - 5y^2 = 4 \quad (x, y) = (3, 8)$$

$$4x^4 - 5y^2 = -4 \quad \emptyset$$

Gli stessi metodi usati per dimostrare (1) e (2) permettono di ottenere

$$\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = 3\Box\} = \{4\}$$

$$\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = 5\Box\} = \{5\}$$

$$\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = 6\Box\} = \emptyset$$

Per ogni numero intero $A > 1$ privo di fattori quadrati, se $F_m = A\Box$ e $F_n = A\Box$, allora $F_m F_n = \Box$. In questa situazione diciamo che F_m e F_n sono *equivalenti a meno di quadrati*. Si tratta effettivamente di una relazione d'equivalenza, in quanto $F_m F_n = \Box$ e $F_n F_q = \Box$ implicano che $F_m F_q = \Box$. Le classi di equivalenza sono dette *classi quadratiche* di numeri di Fibonacci. Esse sono state completamente determinate nel mio articolo [Ri89]. Precisamente:

(3.4) Le classi quadratiche di numeri di Fibonacci consistono di un unico elemento, con l'eccezione delle classi $\{F_1, F_2, F_{12}\}$ e $\{F_3, F_6\}$. Quindi, per ogni numero intero $A > 2$ privo di fattori quadrati l'insieme $\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = A\Box\}$ o è vuoto o contiene un solo elemento. In particolare, se vale $F_n = F_{n_0}\Box$, allora $n = n_0$.

Allo stesso modo si definiscono l'equivalenza a meno di quadrati e le classi quadratiche di numeri di Lucas. Nell'articolo citato sopra si è provato anche che

(3.5) Le classi quadratiche di numeri di Lucas consistono di un unico elemento, con l'eccezione delle classi $\{L_1, L_3\}$ e $\{L_0, L_6\}$. Anche qui per ogni numero intero $A > 2$ privo di fattori quadrati l'insieme $\{n \geq 1 \text{ tali che } L_n = A\Box\}$ o è vuoto o contiene un solo elemento. In particolare, se vale $L_n = L_{n_0}\Box$, allora $n = n_0$.

Questi risultati possono essere interpretati in termini di equazioni diofantee.

(3.6) Sia $A > 2$ un numero intero privo di fattori quadrati, allora ciascuna delle equazioni diofantee

$$x^2 - 5A^2y^4 = \pm 4$$

ammette al più una soluzione in interi positivi, precisamente $y = F_n = A\Box$. Similarmente ciascuna delle equazioni diofantee

$$A^2x^4 - 5y^2 = \pm 4$$

ammette al più una soluzione in interi positivi, precisamente $x = L_n = A\Box$.

Nel mio articolo [Ri99] viene dato un algoritmo per determinare l'insieme $\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = A\Box\}$ dove $A > 1$ è un numero intero privo di fattori quadrati. Sappiamo già che

$$\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n \in \{\Box, 2\Box, 3\Box, 5\Box, 6\Box\}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Un teorema generale di SHOREY e STEWART [SS83], dimostrato indipendentemente anche da PETHÖ [Pe83] afferma in particolare che

(3.7) Per ogni numero intero $A > 1$ privo di fattori quadrati esiste un numero $N > 0$ effettivamente calcolabile e che dipende da A tale che se $F_n = A\Box$, allora $n \leq N$.

Si noti che la stima per N prodotta nella dimostrazione del teorema è di gran lunga maggiore del vero indice massimale n_0 per cui $F_{n_0} = A\Box$.

(3.8) L'algoritmo funziona come segue.

1. Sia H l'insieme dei fattori primi di A . Se $H \subseteq \{2, 3\}$ la risposta è già nota, cosicché assumiamo che H contiene un primo $p \geq 5$. Costruiamo l'insieme H_1 aggiungendo ad H tutti i divisori primi di

$\varrho(p)$ per ogni $p \in H$. Poichè $\varrho(5) = 5$ e $\varrho(p) \mid p \pm 1$ per il Teorema di Lucas, i primi più grandi in H e H_1 coincidono. Ripetiamo la costruzione a partire da H_1 per ottenere H_2 . Ad un certo punto risulterà $H_i = H_{i+1}$ per un certo i e poniamo $\overline{H} = H_i$. Scriviamo $\overline{H} - \{2, 3\} = \{p_1, \dots, p_k\}$ con $5 \leq p_1 < \dots < p_k$. Si noti che $k \geq 1$ per ipotesi.

2. Se $2, 3 \notin \overline{H}$ sia $N_o = \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = \square\} = \{1, 2, 12\}$ e $N_1 = \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = p_1 \square\}$. Se $2 \in \overline{H}$ o $3 \in \overline{H}$ sia

$$N_o = \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n \in \{\square, 2\square, 3\square, 6\square\}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

e

$$N_1 = \{n \geq 1 \text{ tali che } F_n \in \{p_1 \square, 2p_1 \square, 3p_1 \square, 6p_1 \square\}\}.$$

Sia $n_1 = \varrho(p_1)$. Per l'algoritmo dell'articolo citato sopra, $N_1 \subseteq n_1 N_o \cup n_1^2 N_o \cup n_1^3 N_o \cup \dots$. L'uso di una tavola, o di qualunque altro mezzo conveniente, rende semplice determinare gli insiemi $N_1 \cap n_1 N_o$, $N_1 \cap n_1^2 N_o$, Inoltre, per il Teorema di SHOREY e STEWART esiste $j \geq 1$ tale che $N_1 \cap n_1^j N_o = \emptyset$. Allora è possibile mostrare che

$$N_1 \subseteq n_1 N_o \cup \dots \cup n_1^{j-1} N_o.$$

3. Sia $\overline{N}_1 = N_o \cup N_1$ e sia N_2 l'insieme degli interi $n \geq 1$ tali che $F_n = p_2 B \square$ dove $B \geq 1$ è privo di fattori quadrati e se q è un divisore primo di B , allora $q \in \overline{H}$ e $q \leq p_1$. Se $n_2 = \varrho(p_2)$, allora $N_2 \subseteq n_2 \overline{N}_1 \cup n_2^2 \overline{N}_1 \cup \dots$.

4. Seguendo la medesima procedura si determinano insiemi $N_3, \dots, N_k$. Risulta $\{n \geq 1 \text{ tali che } F_n = A \square\} \subseteq N_k$.

Vale la pena illustrare l'algoritmo con un esempio numerico.

(3.9). ESEMPIO. – Assumiamo di possedere una tavola di numeri di Fibonacci F_n per $n \leq 50$. Determineremo gli interi $n \geq 1$ (se esistono) tali che $F_n = 209 \square$.

Poichè $209 = 11 \cdot 19$, $H = \{11, 19\}$; Notato che $\varrho(11) = 10$, $\varrho(19) = 18$ aggiungendo ad H i divisori primi di questi numeri otteniamo l'insieme $\overline{H} = \{2, 3, 5, 11, 19\}$ che non può essere ulteriormente ingrandito con questa procedura. Dobbiamo porre $N_o = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e siccome $p_1 = 5$ con $\varrho(5) = 5$ si ha $N_1 = \{n \geq 1$

tali che $F_n \in \{5\Box, 10\Box, 15\Box, 30\Box\}$. Come indicato dall'algoritmo, $N_1 \subseteq 5N_o \cup 25N_o \cup \dots$. Si ha $5N_o = \{5, 10, 15, 20, 30, 60\}$. Consultando le tavole, ci si accorge che $5 \in N_1$ e $10, 15, 20$ e 30 non stanno in N_1 . Per quanto riguarda 60 , per la (2.21), $F_{60} = F_{10}Z$ con $MCD(F_{10}, Z) \mid 6$, ma 2 e 3 non dividono F_{10} . Così, $60 \in N_1$ implicherebbe che $F_{10} = 55 = B\Box$ con $B \mid 60$, che è chiaramente falso. È altrettanto semplice verificare che $N_1 \cap 25N_o = \emptyset$, e dunque $N_1 = \{5\}$, $\bar{N}_1 = N_o \cup N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$.

Per il passo successivo, $p_2 = 11$ con $\varrho(p_2) = 10$. L'insieme N_2 è costituito dagli $n \geq 1$ tali che $F_n = 11B\Box$ con $B \geq 1$ privo di fattori quadrati e con i fattori primi in $\bar{H}$. Allora $N_2 \subseteq 10\bar{N}_1 \cup 100\bar{N}_1 \cup \dots$. Considerazioni simili alle precedenti mostrano che già $N_2 \cap 10\bar{N}_1 = \emptyset$. Quindi $N_2 = \emptyset$ e $\bar{N}_2 = \bar{N}_1 \cap N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$.

Nel passo finale $p_3 = 19$ con $\varrho(19) = 18$. L'insieme N_3 è costituito dagli $n \geq 1$ tali che $F_n = 19B\Box$ con $B \geq 1$ privo di fattori quadrati e con i fattori primi in $\bar{H}$. Allora $N_2 \subseteq 18\bar{N}_2 \cup 18^2\bar{N}_2 \cup \dots$. Ancora una volta si verifica che $N_3 \cap 18\bar{N}_2 = \emptyset$ e quindi $N_3 = \emptyset$. Pertanto, per ogni $n \geq 1$, $F_n \neq 209\Box$.

(3.10) Proponiamo che il lettore mostri che $F_n = 3001\Box$ se e soltanto se $n = 25$.

Indichiamo ora dei risultati sui numeri di Fibonacci e Lucas che sono cubi. LONDON e FINKELSTEIN [LF69] e, poi, LAGARIAS e WEISSEL [LW81] hanno provato che:

(3.11) F_n è un cubo se e soltanto se $n = 1, 6$.

(3.12) L_n è un cubo se e soltanto se $n = 1$.

Non è mai stato trovato alcun numero di Fibonacci della forma a^k con $a > 1$, $k \geq 5$. È stato mostrato (ma per quanto ne so mai pubblicato) che l'equazione $x^2 - 5y^{10} = \pm 4$ non ha soluzioni intere con $y > 1$. Cioè, F_n non è mai una quinta potenza (diversa da 1).

Il già citato Teorema di SHOREY e STEWART implica che se $A \geq 1$, esiste $N > 1$, calcolabile effettivamente, tale che se $F_n = Ax^k$ o $L_n = Ax^k$ con $x > 1$ e $k > 2$, allora $n, k \leq N$.

4. – Numeri potenti.

Sia p un numero primo. Per ogni numero intero n sia $k \geq 0$ l'unico intero tale che $p^k \mid n$ ma p^{k+1} non divide n . L'intero k si denota $k = v_p(n)$ ed è detto il *valore p -adico* di n . Quindi la fattorizzazione di $|n|$ può essere scritta come

$$|n| = \prod_p p^{v_p(n)}$$

dove il prodotto è esteso a tutti i primi e $v_p(n) = 0$ con l'eccezione dei primi che dividono n .

(4.1) Per definizione il *radicale* di n è

$$\text{rad}(n) = \prod_{p \mid n} p.$$

(4.2) Un intero n è detto *potente* se $v_p(n) \neq 1$ per ogni primo p . Dunque se n è potente, allora $\text{rad}(n)^2 \leq |n|$. Ovviamente, ogni potenza propria è un numero potente. Non è noto se esistano numeri di Fibonacci o numeri di Lucas che non siano potenze proprie ma che siano numeri potenti.

A questo proposito, includo un risultato che segue dalla cosiddetta

(4.3). CONGETTURA ABC. – Per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $K > 0$ (che dipende da ε) tale che se A, B e C sono interi non nulli e coprimi qualunque tali che $A + B + C = 0$ allora $\max\{|A|, |B|, |C|\} < KR^{1+\varepsilon}$ dove $R = \text{rad}(ABC)$.

La congettura ABC è stata formulata da MASSER [Ma85] e in forma differente da OESTERLÈ [Oe88]. Ha molte implicazioni interessanti: si vedano, ad esempio i miei lavori [Ri01a], [Ri01b] ed ELKIES [El91].

Il risultato seguente sembra essere già ben noto agli esperti. Una dimostrazione incompleta per i numeri di Fibonacci è stata pubblicata da MOLLIN [Mo96] (si veda anche RIBENBOIM e WALSH [RW97]):

(4.4) La congettura ABC implica che esistono solo un numero finito di numeri di Fibonacci e Lucas che sono numeri potenti.

DIMOSTRAZIONE. – Diamo una dimostrazione solo per i numeri di Fibonacci, la dimostrazione per i numeri di Lucas è simile. Dalla relazione quadratica fondamentale (2.3) segue la disuguaglianza $L_n^2 \leq 9F_n^2$ cioè $L_n \leq 3F_n$ valida per ogni n .

Poniamo $d = MCD(L_n^2, 5F_n^2, 4)$. Per (2.20), $d = 1$ se 3 non divide n e $d = 4$ se $3 \mid n$. Applicando la congettura ABC con $\varepsilon = 1/4$, esiste un $K > 0$ tale che

$$\frac{5F_n^2}{d} \leq KR^{1+\varepsilon}$$

con $R = \text{rad} \left(\frac{L_n^2}{d} \cdot \frac{5F_n^2}{d} \cdot \frac{4}{d} \right) \leq \text{rad}(L_n^2) \text{rad}(5F_n^2) 2$. Se F_n è un numero potente, $\text{rad}(F_n^2) \leq F_n^{1/2}$. Dunque

$$R \leq L_n \cdot 5F_n^{1/2} \cdot 2 \leq 30F_n^{3/2}$$

e quindi esiste $K' > 0$ tale che

$$F_n^2 \leq K' F_n^{\frac{3}{2}(1+\frac{1}{4})},$$

cioè $F_n^{1/8} \leq K'$. Siccome K' dipende solo da ε , questo dimostra che se F_n è un numero potente, allora è limitato. Questo basta perchè la successione di Fibonacci è strettamente crescente. ■

Di fatto un risultato più preciso è ottenibile in modo altrettanto semplice.

(4.5) Per ogni intero $n \neq 0$ la *parte potente* di n è, per definizione, $n^* = \prod_{p \in T} p^{v_p(n)}$ dove T è l'insieme dei primi p tali che $v_p(n) \geq 2$.

Dunque $n = n^* n'$, con $MCD(n^*, n') = 1$, n^* un numero potente e n' privo di fattori quadrati. Nell'articolo di RIBENBOIM e WALSH [RW99], un corollario di un teorema piuttosto generale afferma che

(4.6) assumendo la congettura ABC, per ogni $\varepsilon > 0$ c'è solo un numero finito di numeri di Fibonacci F_n e di numeri di Lucas L_n tali che $F_n^* > F_n^\varepsilon$ e $L_n^* > L_n^\varepsilon$ rispettivamente.

Il risultato è confermato dalle tavole esistenti di numeri di Fibonacci e Lucas, ma non è mai stato dimostrato senza assumere la verità della congettura ABC.

5. – Rappresentazione di numeri reali.

Classicamente, esistono molti modi per rappresentare numeri reali positivi come somma di serie di numeri di tipo opportuno. Per esempio

(5.1) Ogni numero reale x tale che $0 < x < 1$ può essere scritto in modo unico nella forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_j}}$$

con $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$.

(5.2) Ogni numero reale positivo x può essere scritto nella forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_{i_j}}$$

dove $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ è la successione crescente di tutti i numeri primi.

In questa sezione indicheremo un modo di rappresentare i numeri reali positivi come serie i cui termini sono costruiti con i numeri di Fibonacci. Poniamo $I_0 = 0$ e per ogni $m \geq 1$,

$$I_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{1/m}}$$

(5.3) Si ha $I_0 < I_1 < I_2 < \dots$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \infty$.

DIMOSTRAZIONE. – Per la prima disuguaglianza destra in (2.28)

$$I_m < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{\gamma^{n-1}} \right)^{1/m} = (\sqrt{5})^{1/m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma^{1/m}} \right)^{n-1} = (\sqrt{5})^{1/m} \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma^{1/m}}} < \infty.$$

Poiché $1/F_n^{1/(m-1)} < 1/F_n^{1/m}$ per ogni $n \geq 1$, ne segue che $I_{m-1} < I_m$. Infine, per la prima disuguaglianza sinistra in (2.28)

$$I_m > \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{\gamma^{n+1}} \right)^{1/m} = (\sqrt{5})^{1/m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma^{1/m}} \right)^{n+1} = (\sqrt{5})^{1/m} \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma^{1/m}}}$$

e quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \infty$. ■

Proveremo ora l'esistenza della rappresentazione a cui si era accennato sopra.

(5.4) Sia $x > 0$ un numero reale, e sia $m \geq 0$ tale che $I_{m-1} < x \leq I_m$. Allora esiste una successione infinita $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tale che

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n_i}^{1/m}}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Che un m siffatto esista segue subito dal punto precedente. Per semplificare la notazione, poniamo $s_n = F_n^{-1/m}$, così che $s_1 > s_2 > s_3 > \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = I_m$.

Poichè $x > 0$, esiste il più piccolo indice n_1 tale che $x > s_{n_1}$. Poi, esiste il più piccolo indice n_2 tale che $x - s_{n_1} > s_{n_2}$. Si osservi che, per ogni indice n ,

$$s_n^m = \frac{1}{F_n} = \frac{1}{F_{n-1} + F_{n-2}} > \frac{1}{2F_{n-1}} \geq \frac{1}{2^m F_{n-1}} = \left(\frac{s_{n-1}}{2} \right)^m,$$

e quindi $s_{n-1} < 2s_n$. Questo comporta che $n_2 > n_1$. Infatti, se fosse $n_2 \leq n_1$, risulterebbe $x > s_{n_1} + s_{n_2} \geq 2s_{n_1} > s_{n_1-1}$ in contraddizione con la minimalità di n_1 .

Proseguendo come sopra, esiste il più piccolo indice n_3 tale che $x - s_{n_1} - s_{n_2} > s_{n_3}$ e necessariamente $n_3 > n_2 > n_1$. Iterando la procedura, concludiamo che $x \geq y = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n_i}$. Se fosse $x > y$, esisterebbe un più piccolo indice k tale che $x - y > s_k$. Scegliamo N tale che $n_N < k \leq n_{N+1}$. Allora $x - \sum_{i=1}^N s_{n_i} > x - y > s_k$ e per la minimalità di k , $k =$

n_{N+1} . Ma è anche $x - \sum_{i=1}^{N+1} s_{n_i} > x - y > s_k$ e quindi $k = n_{N+1} \leq n_{N+2}$ che è assurdo. Quindi $x = y$ e questo conclude la dimostrazione. ■

Per ulteriori risultati su questo argomento, si veda [Ri89].

6. – Numeri irrazionali e trascendenti.

Il modo in cui un numero reale è approssimabile mediante numeri razionali determina se il numero è irrazionale o persino trascendente.

(6.1) Siano α e ν numeri reali con $\nu \geq 1$. Diciamo che α è *approssimabile con ordine ν da numeri razionali* se esiste un numero reale $C > 0$ tale che esistono infiniti numeri razionali $\frac{a}{b}$ con $b \geq 1$ e $MCD(\alpha, b) = 1$ tali che

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^\nu}.$$

I numeri razionali sono approssimabili con ordine 1 da numeri razionali, ma non con ordine $1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi, α è sicuramente irrazionale se è approssimabile con ordine $1 + \varepsilon$ da numeri razionali per un $\varepsilon > 0$. Per un importante teorema di ROTH (si veda, per esempio, il mio libro [Ri00]) si ha:

(6.2) Se α è approssimabile con ordine $\nu > 2$ da numeri razionali, allora α è un numero trascendente.

Poniamo, come nella sezione 5, $I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/F_n$. ANDRE-JEAN-NIN [AJ91] ha dimostrato che

(6.3) I_1 è un numero irrazionale.

In [Kn64], KNUTH ha costruito una successione infinita di numeri trascendenti ottenuti dai numeri di Fibonacci per mezzo di certe frazioni continue infinite.

Introduciamo la notazione e ricordiamo alcuni fatti di cui avremo

bisogno nella dimostrazione. Se $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono numeri reali positivi, sia

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n] = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\alpha_n}}}}.$$

Se $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono interi, allora $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ è un numero razionale. All'inverso, si vede facilmente che se $\frac{c}{d} \neq 0$ è un numero razionale con $d \neq 1$ e $MCD(c, d) = 1$, allora

$$\frac{c}{d} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

con $n \geq 0$ e $a_0, a_1, \dots, a_n$ interi opportuni tali che $a_i \geq 1$ per $i = 1, \dots, n$ e $a_n \neq 1$. L'espressione $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ è detta *l'espansione in frazione continua* di $\frac{c}{d}$.

Definiremo ora le frazioni continue infinite. Siano $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono numeri reali tali che $\alpha_i \geq 1$ per ogni $i \geq 1$. Definiamo numeri p_n, q_n per $n \geq -2$ come segue:

$$p_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = -2 \\ 1 & \text{se } n = -1 \\ \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

e

$$q_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = -2 \\ 0 & \text{se } n = -1 \\ \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{se } n \geq 0 \end{cases}.$$

In particolare $p_0 = \alpha_0, p_1 = \alpha_0 \alpha_1 + 1$ e $q_0 = 1, q_1 = \alpha_1$. Osserviamo subito che $q_n \geq q_{n-1} + 1$ per $n \geq 2$. Per ogni $n \geq 0$ poniamo $r_n = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Le relazioni del punto seguente si dimostrano facilmente per induzione.

(6.4)

1. $r_n = p_n/q_n$ per ogni $n \geq 0$;
2. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ per $n \geq 1$;
3. $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n \alpha_n$ per $n \geq 2$;
4. $r_n - r_{n-2} = (-1)^n \frac{\alpha_n}{q_n q_{n-2}}$ per $n \geq 2$.

(6.5) Ci sono disuguaglianze $r_0 < r_2 < r_4 < \dots < r_5 < r_3 < r_1$ e c'è un'uguaglianza di limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1}.$$

Quest'ultimo fatto permette di definire la frazione continua infinita

$$[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots] = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1}.$$

Con le frazioni continue infinite si ottengono numeri irrazionali.

(6.6) Siano $a_0, a_1, a_2, \dots$ interi con $a_i \geq 1$ per $i \geq 1$. Allora $\alpha = [\alpha_0, a_1, a_2, \dots]$ è un numero irrazionale.

(6.7) Come esempio, dimostriamo che

$$[1, 1, 1, \dots] = \gamma.$$

DIMOSTRAZIONE. — Dalla scrittura esplicita di $\alpha = [1, 1, 1, \dots]$ come frazione continua si ottiene immediatamente $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, cioè $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Le radici di $X^2 - X - 1$ sono γ e δ . Siccome $\alpha > 0$, è $\alpha = \gamma$. ■

Se $\alpha = [\alpha_0, a_1, a_2, \dots]$ il rapporto $r_n = p_n/q_n = [\alpha_0, a_1, \dots, a_n]$ è detto *n-esimo convergente* dell'espansione in frazione continua di α per ogni $n \geq 0$. Il prossimo risultato fornisce una misura di quanto i convergenti di α approssimano α .

(6.8) Per ogni $n \geq 0$,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Ora siamo pronti per dimostrare il teorema di KNUTH.

(6.9) Sia $a \geq 2$ un numero intero e sia $\xi_a = [0, 1, a^{F_1}, a^{F_2}, \dots]$. Allora ξ_a è approssimabile con ordine $1 + \gamma = 2.616 \dots > 2$. Quindi ξ_a è un numero trascendente.

DIMOSTRAZIONE. — Sia p_n/q_n l' n -esimo convergente di ξ_a per ogni $n \geq 0$. Allora $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ e $q_n = a^{F_{n-1}} q_{n-1} + q_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$. Mostriamo, per induzione, che $q_n = \frac{a^{F_{n+1}} - 1}{a - 1}$. La formula è vera per $n = 0$ e $n = 1$. Se $n \geq 2$, per la relazione precedente

$$q_n = a^{F_{n-1}} \frac{a^{F_n} - 1}{a - 1} + \frac{a^{F_{n-1}} - 1}{a - 1} = \frac{a^{F_{n+1}} - 1}{a - 1}$$

come si voleva.

Per la stima (6.8), $\left| \xi_a - \frac{p_n}{q_n} \right| < 1/q_n q_{n+1}$. Se mostriamo che per ogni $n \geq 3$ dispari si ha $q_{n+1} > q_n^\gamma$, allora la disuguaglianza

$$\left| \xi_a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\gamma}}$$

risulterà vera per ogni valore dispari $n \geq 3$, cioè ξ_a risulta approssimabile con ordine $1 + \gamma$ da numeri razionali.

Sia dunque $n \geq 3$ un intero dispari e mostriamo che $q_n^\gamma < q_{n+1}$. Equivalentemente, per quanto visto prima, occorre mostrare che

$$\left(\frac{a^{F_{n+1}} - 1}{a - 1} \right)^\gamma < \frac{a^{F_{n+2}} - 1}{a - 1},$$

cioè $(a^{F_{n+1}} - 1)^\gamma < (a - 1)^{\gamma-1} (a^{F_{n+2}} - 1)$. Siccome n è dispari, da (2.29) segue che $F_{n+1}\gamma < F_{n+2}$ e quindi $(a^{F_{n+1}} - 1)^\gamma = a^{F_{n+1}\gamma} (1 - a^{-F_{n+1}})^\gamma < a^{F_{n+1}\gamma} (1 - a^{-F_{n+1}}) < a^{F_{n+2}\gamma} (1 - a^{-F_{n+2}}) < (a^{F_{n+1}\gamma} - 1) \cdot (a - 1)^{\gamma-1}$ concludendo la dimostrazione. ■

7. – Una serie zeta.

Poniamo $H = \{F_n \text{ tali che } n \neq 1, 2, 6, 12\}$. Ricordiamo (vedi (2.26)) che ogni numero di Fibonacci in H possiede un fattore primitivo. Ne deduciamo:

(7.1) Siano $r \geq 0$, $s \geq 0$ e si scelgano indici $n_1 < \dots < n_r$ e $m_1 < \dots < m_s$ e numeri interi $e_i \geq 1$ per $i = 1, \dots, r$ e $f_j \geq 1$ per $j = 1, \dots, s$. Supponiamo che per ogni n_i e per ogni m_j , $F_{n_i}, F_{m_j} \in H$ e $F_{n_1}^{e_1} \dots F_{n_r}^{e_r} = F_{m_1}^{f_1} \dots F_{m_s}^{f_s}$. Allora $r = s$ e $n_i = m_i$, $e_i = f_i$ per ogni $i = 1, \dots, r = s$.

DIMOSTRAZIONE. – Se l'affermazione fosse falsa, dividendo la relazione assegnata per i fattori comuni ne otterremo una simile con $n_i \neq m_j$ per ogni (i, j) e $r \geq 1$, $s \geq 1$. Per fissare le idee diciamo $n_r > m_s$. Sia p un fattore primitivo di F_{n_r} . Allora $p \mid F_{m_1} \dots F_{m_s}$ ma questo è impossibile perchè $m_1 < \dots < m_s < n_r$. ■

Denotiamo $\langle H \rangle$ l'insieme dei numeri interi $h \geq 1$ della forma $h = F_{n_1}^{e_1} \dots F_{n_r}^{e_r}$ con $F_{n_i} \in H$, $e_i \geq 1$ e $r \geq 0$.

(7.2) La *serie zeta* associata ai numeri di Fibonacci è la serie

$$\zeta_F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_n^s}, \quad s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C},$$

dove $\langle H \rangle = \{h_1 = 1, h_2, \dots\}$ è ordinato come successione crescente.

Poichè $h_{n+1} \geq 2h_n$, per ogni $\sigma > 0$ la serie $\zeta_F(s)$ converge assolutamente ed uniformemente nel semipiano $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma$. Dunque, essa definisce una funzione continua, denotata ancora ζ_F nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > 0$.

È una notevole, ma facile, conseguenza dell'unicità della rappresentazione degli interi in $\langle H \rangle$ come prodotto di numeri di Fibonacci che

(7.3) $\zeta_F(s)$ ammette *prodotto euleriano*

$$\zeta_F(s) = \prod_{n \notin \{1, 2, 6, 12\}} \frac{1}{1 - F_n^{-s}}$$

valido per $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Lo studio di questo nuovo tipo di serie di Dirichlet deve essere ancora affrontato.

8. – Un dominio a fattorizzazione unica.

Manteniamo la notazione della sezione precedente. Sia K un campo qualunque e sia A l'insieme delle applicazioni $f: \langle H \rangle \rightarrow K$. Se $f, g \in A$ definiamo $f + g \in A$ ponendo $(f + g)(h) = f(h) + g(h)$ per ogni $h \in \langle H \rangle$. Questa operazione di somma in A è associativa e commutativa. La mappa costante nulla $0(h) = 0$ è tale che $f + 0 = f$ per ogni $f \in A$. Inoltre la funzione $-f \in A$ definita da $(-f)(h) = -f(h)$ è tale che $f + (-f) = 0$. Dunque $(A, +)$ è un gruppo abeliano.

Definiamo un'operazione di prodotto in A nel modo seguente. Per ogni $h \in \langle H \rangle$ l'insieme $Z_h = \{(h_1, h_2) \text{ tali che } h = h_1 h_2\}$ è finito. Per ogni $f, g \in A$ definiamo $(fg)(h) = \sum_{(h_1, h_2) \in Z_h} f(h_1) g(h_2)$. Questa operazione di moltiplicazione è commutativa ed anche associativa, come si verifica facilmente. Sia $e: \langle H \rangle \rightarrow K$ la funzione definita da $e(1) = 1$ e $e(h) = 0$ per ogni $h \neq 1$. Allora $ef = f$ per ogni $f \in A$. Inoltre $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ per ogni $f, g_1, g_2 \in A$. Dunque $(A, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità e .

Per ogni $f \in A, f \neq 0$, sia $v(f)$ il più piccolo intero $h \in \langle H \rangle$ tale che $f(h) \neq 0$. Si verifica facilmente dalla definizione del prodotto che $v(fg) = v(f) v(g)$ per ogni $f, g \in A$. Poniamo anche $v(0) = \infty$. Allora $f, g \neq 0$ implicano che $v(fg) = v(f) v(g) \neq \infty$ e quindi $fg \neq 0$. Questo dimostra che A è un dominio d'integrità.

Vogliamo confrontare A col dominio d'integrità $S = K[[X_1, X_2, \dots]]$. Esplicitamente, gli elementi di S sono della forma $\sum_{M \in \mathcal{M}} s_M M$, dove $\mathcal{M}$ è l'insieme di tutti i monomi nelle $X_1, X_2, \dots$, il coefficiente $s_M \in K$ e non si assume che $s_M \neq 0$ solo per un numero finito di monomi. L'anello S è solitamente detto l'anello delle serie di potenze formali generali nelle indeterminate $X_1, X_2, \dots$ a coefficienti in K . Osserviamo che per ogni sottoinsieme finito di indici $F \subset \{1, 2, \dots\}$, S contiene, come sottoanello, $S_F = K[[X_i]]_{i \in F}$, ma S è strettamente più grande di $\bigcup_F S_F$ (unione estesa alla famiglia dei sottoinsiemi F finiti). Per esempio $X_1 + X_2 + X_3 + \dots \in S$ ma non appartiene ad alcun S_F per F

finito. Come è noto, ciascun anello S_F è un dominio a fattorizzazione unica. CASHWELL e EVERETT [CE63] hanno dimostrato che

(8.1) L'anello $S = K[[X_1, X_2, \dots]]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Ora stabiliremo un isomorfismo di anelli tra A ed S . Per ogni $F_n \in H$ sia $\alpha(F_n) = X_m$ se F_n è il m -esimo elemento di H quando quest'ultimo insieme è ordinato secondo l'ordine crescente dei suoi elementi, $F_3 < F_4 < F_5 < F_7 < F_8 < \dots < F_{11} < F_{13} < \dots$. Per ogni $h = F_{n_1}^{e_1} \dots F_{n_r}^{e_r}$ poniamo $\alpha(h) = \alpha(F_{n_1})^{e_1} \dots \alpha(F_{n_r})^{e_r}$ che è un monomio in $X_1, X_2, \dots$. Il risultato cruciale (7.1) sull'unicità della decomposizione degli elementi di $\langle H \rangle$ garantisce che $\alpha(h)$ è ben definito. Per ogni $f \in A$ sia

$$\alpha(f) = \sum_{h \in \langle H \rangle} f(h) \alpha(h) \in S.$$

È facile verificare che se $f, g \in A$ allora $\alpha(f+g) = \alpha(f) + \alpha(g)$ e $\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$. Poi, se $\alpha(f) = 0$ allora $f = 0$ e ogni $s \in S$ è della forma $\alpha(f)$ per $f \in A$ opportuno. In conclusione, α stabilisce un isomorfismo tra l'anello A ed il dominio a fattorizzazione unica S . Pertanto:

(8.2) A è un dominio a fattorizzazione unica.

Sarebbe desiderabile trovare una dimostrazione della fattorialità di A che non ricorresse al fatto che S è un dominio a fattorizzazione unica.

BIBLIOGRAFIA

I due libri seguenti sono facilmente leggibili e scritti ad un livello elementare.

- [Ho69] V. E. HOGGATT, *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton-Mifflin, Boston (1969).
- [Vo63] N. N. VOROB'EV, *The Fibonacci numbers*, D. C. Heath, Boston (1963).

Gli articoli ed i volumi seguenti sono citati nel testo dell'articolo.

- [AJ91] R. ANDRE-JEANNIN, *A note on the irrationality of certain Lucas infinite series*, Fibonacci Q., **29** (1991), 132-136.
- [BMS88] J. BRILLHART - P. L. MONTGOMERY - R. D. SILVERMAN, *Tables of Fibonacci and Lucas factorizations*, Math. Comp., **50** (1983), 251-260.
- [Ca13] R. D. CARMICHAEL, *On the numerical factors of arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$* , Annals of Math. (2), **15** (1913), 30-70.
- [CE63] E. D. CASHWELL - C. J. EVERETT, *Formal power series*, Pacific J. Math., **13** (1963), 45-69.
- [Co64a] J. H. E. COHN, *On square Fibonacci numbers*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 537-540.
- [Co64b] J. H. E. COHN, *Square Fibonacci numbers, etc.*, Fibonacci Q., **2** (1964), 109-113.
- [Co65] J. H. E. COHN, *Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations*, Proc. Glasgow Math. Assoc., **7** (1965), 24-28.
- [El91] N. D. ELKIES, *(ABC) implies Mordell*, Intern. Math. Res. Notices, **7** (1991), 99-109.
- [Ha66] J. H. HALTON, *On the divisibility properties of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart., **4** (1966), 217-240.
- [Kn64] D. KNUTH, *Transcendental numbers based on the Fibonacci numbers*, Fibonacci Q., **2** (1964), 43-44.
- [LW81] J. C. LAGARIAS - D. P. WEISSEL, *Fibonacci and Lucas cubes*, Fibonacci Q., **19** (1981), 39-43.
- [LF69] H. LONDON - R. FINKELSTEIN, *On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers*, Fibonacci Q., **7** (1969), 476-481 e 487.
- [Lu78] E. LUCAS, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, American J. Math., **1** (1878), 184-240, 289-321.
- [Ma85] D. W. MASSER, *Open problems*, Proc. Symp. Anal. Number Theory (W. W. L. Chern editor), Imperial College, London (1985).
- [McR98] W. L. MC DANIEL - P. RIBENBOIM, *Square classes in Lucas sequences*, J. Number Theory, **73** (1998), 14-27.
- [Mo96] R. A. MOLLIN, *Masser's conjecture used to prove results about powerful numbers*, J. Math. Sci., **7** (1996), 29-32.

- [Oe88] J. OESTERLÉ, *Nouvelles approches du «théorème» de Fermat*, Sémin. Bourbaki 694, Astérisque, **161-162** (1988), 165-186.
- [Pe82] A. PETHÖ, *Perfect powers in second order linear recurrences*, J. Number Theory, **15** (1982), 5-13.
- [Pe83] A. PETHÖ, *Full cubes in the Fibonacci sequence*, Publ. Math. Debrecen, **30** (1983), 117-127.
- [Ri89] P. RIBENBOIM, *Representations of real numbers by means of Fibonacci numbers*, Enseign. Math., **31** (1989), 249-259.
- [Ri95] P. RIBENBOIM, *The Fibonacci numbers and the Arctic Ocean*, Symp. Gaussiana, Conf. A (M. Behara, R. Fritsch and R. G. Lintz editors) (1995), 41-83.
- [Ri96] P. RIBENBOIM, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York (1996).
- [Ri99] P. RIBENBOIM, *An algorithm to determine the points with integral coordinates in certain elliptic curves*, J. Number Theory, **74** (1999), 19-39.
- [Ri00] P. RIBENBOIM, *My Numbers, my Friends*, Springer-Verlag, New York (2000).
- [Ri01a] P. RIBENBOIM, *ABC candies*, J. Number Theory, **81** (2001), 47-60.
- [Ri01b] P. RIBENBOIM, *The (ABC) conjecture and the radical index of integers*, Acta Arith., **96** (2001), 389-404.
- [RMc96] P. RIBENBOIM - W. L. MC DANIEL, *The square terms in Lucas sequences*, J. Number Theory, **58** (1996), 104-123.
- [RW99] P. RIBENBOIM - P. G. WALSH, *The ABC conjecture and the powerful part of terms in binary recurring sequences*, J. Number Theory, **74** (1999), 134-147.
- [SS83] T. N. SHOREY - C. L. STEWART, *On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^ty + cy^2 = 1$ and pure powers in recurrence sequences*, Math. Scand., **52** (1983), 24-36.
- [Wy64] O. WYLER, *Squares in the Fibonacci series*, Amer. Math. Monthly, **7** (1964), 220-222.

Paulo Ribenboim, Queen's University, Kingston Ontario, Canada