

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ALBERTO BRESSAN

## Sistemi iperbolici di leggi di conservazione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-B (2000),  
n.3, p. 635–656.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2000\\_8\\_3B\\_3\\_635\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_3_635_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Sistemi iperbolici di leggi di conservazione.

ALBERTO BRESSAN (\*)

**Summary.** – *This survey paper provides a brief introduction to the mathematical theory of hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension. After reviewing some basic concepts, we describe the fundamental theorem of Glimm on the global existence of BV solutions. We then outline the more recent results on uniqueness and stability of entropy weak solutions. Finally, some major open problems and research directions are discussed in the last section.*

### 1. – Introduzione.

Un sistema di leggi di conservazione in una variabile spaziale si scrive nella forma

$$(1.1) \quad u_t + f(u)_x = 0,$$

dove  $u$  prende valori in  $\mathbb{R}^n$ , mentre  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$  è funzione sufficientemente regolare, definita su un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Integrando la (1.1) su di un qualunque intervallo  $[a, b]$  si ottiene

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) dx &= \int_a^b u_t(t, x) dx \\ &= - \int_a^b f(u(t, x))_x dx \\ &= f(u(t, a)) - f(u(t, b)) \\ &= [\text{flusso entrante in } a] - [\text{flusso uscente in } b]. \end{aligned}$$

Ciò mostra che l'integrale della  $u$  su di un intervallo fissato varia solo in conseguenza del flusso attraverso la frontiera. Per questo motivo, le componenti del vettore  $u = (u_1, \dots, u_n)$  si dicono *quantità conservate*, mentre quelle di  $f = (f_1, \dots, f_n)$  sono chiamati *flussi*.

Sistemi di equazioni del tipo (1.1) presentano grande interesse per le appli-

(\*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

cazioni. Infatti, varie leggi fondamentali della fisica matematica si scrivono in forma di conservazione. L'esempio tipico è fornito dal sistema di equazioni che governano la dinamica di un gas non viscoso. Tali equazioni rappresentano la conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto.

Per soluzioni regolari, la (1.1) è equivalente al sistema quasilineare

$$(1.3) \quad u_t + A(u) u_x = 0,$$

ove  $A(u) = Df(u)$  indica la matrice Jacobiana delle derivate parziali prime di  $f$ . Il sistema (1.1) si dice *strettamente iperbolico* se per ogni  $u$  la matrice  $A(u)$  ha autovalori reali e distinti:  $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ . In questo caso, è possibile scegliere basi di autovettori destri  $\{r_1, \dots, r_n\}$  e sinistri  $\{l_1, \dots, l_n\}$  normalizzati in modo che

$$(1.4) \quad |r_i(u)| \equiv 1, \quad l_i(u) \cdot r_j(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Due ulteriori definizioni, introdotte da P. Lax, saranno utili in seguito. Esse riguardano la derivata direzionale di un autovalore  $\lambda_j$  nella direzione del corrispondente autovettore  $r_j$ .

Il  $j$ -esimo campo caratteristico si dice *genuinamente non lineare* se, con opportuna orientazione dell'autovettore, si ha

$$(D\lambda_j) \cdot r_j > 0 \quad \text{per ogni } u \in \Omega,$$

e si dice invece *linearmente degenerare* se

$$(D\lambda_j) \cdot r_j = 0 \quad \text{per ogni } u \in \Omega.$$

Per interpretare le condizioni precedenti, si considerino le curve integrali del campo  $r_j$ , descritte da  $du/ds = r_j(u)$ . Nel caso genuinamente non lineare, l'autovalore  $\lambda_j$  è monotono crescente lungo ciascuna di queste curve. Al contrario, nel caso linearmente degenerare, l'autovalore  $\lambda_j$  è costante su ciascuna curva. Un'importante caratteristica dei sistemi iperbolici non lineari è la perdita di regolarità delle soluzioni, che può avvenire in tempo finito [24]. Questo fenomeno lo si può vedere già nel caso scalare.

ESEMPPIO 1. – Si consideri l'equazione di Burgers non viscosa

$$(1.5) \quad u_t + (u^2/2)_x = 0$$

con condizione iniziale

$$u(0, x) = \bar{u}(x) \doteq \frac{1}{1+x^2}.$$

Per tempi  $t > 0$  piccoli, la soluzione si può costruire con il metodo delle caratte-

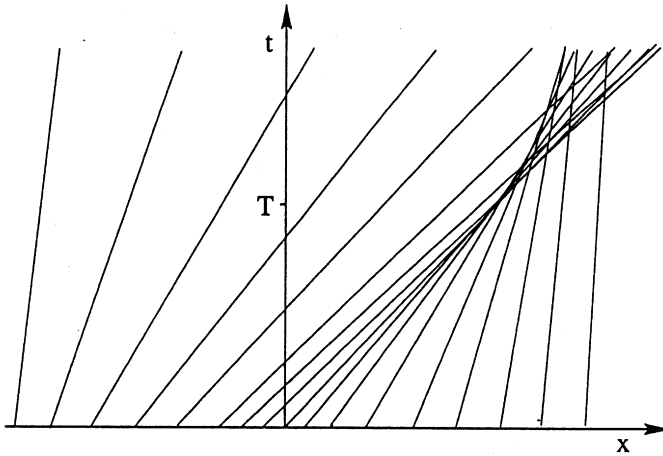


Figura 1

ristiche. Fintanto che la soluzione rimane regolare, la (1.5) equivale a

$$(1.6) \quad u_t + uu_x = 0.$$

In altre parole, la derivata direzionale della funzione  $u = u(t, x)$  nella direzione del vettore  $(1, u)$  è nulla. La  $u$  è quindi costante lungo ciascuna linea caratteristica nel piano  $t$ - $x$ :

$$t \mapsto \left( t, x + t\bar{u}(x) \right) = \left( t, x + \frac{t}{1+x^2} \right)$$

per  $t < T \doteq 8/\sqrt{27}$ , queste rette caratteristiche non si intersecano (fig. 1). La soluzione del problema di Cauchy è quindi definita implicitamente da

$$(1.7) \quad u \left( t, x + \frac{t}{1+x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'altra parte, per  $t > T$ , alcune di queste rette iniziano ad intersecarsi. Di conseguenza, la mappa

$$x \mapsto x + \frac{t}{1+x^2}$$

non è iniettiva e la (1.7) non può più essere usata per costruire una soluzione del problema di Cauchy.

Un altro punto di vista è il seguente (fig. 2). Al crescere del tempo  $t$ , i punti sul grafico della  $u(t, \cdot)$  si muovono orizzontalmente con velocità  $u$ , pari alla loro distanza dall'asse  $x$ . Poiché tale velocità non è costante, ciò determina una

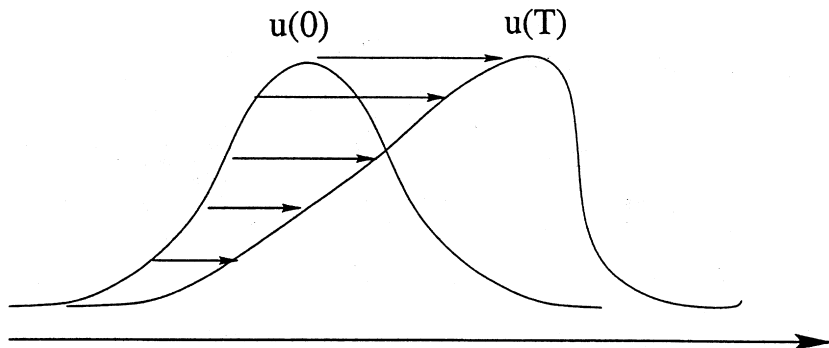


Figura 2

deformazione del profilo della soluzione. Quando  $t$  si avvicina al valore critico  $T \doteq 8/\sqrt{27}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left( \inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x) \right) = -\infty$$

e non esiste nessuna soluzione classica, i.e. di classe  $\mathcal{C}^1$ , per  $t > T$ .

Una conseguenza importante di questa perdita di regolarità è che in generale le soluzioni globali nel tempo possono essere costruite solo in opportuni spazi di funzioni discontinue. A tale scopo, un ambito naturale è lo spazio  $BV$  delle funzioni a variazione totale limitata.

## 2. - Soluzioni deboli.

Nel caso di funzioni discontinue, il sistema quasilineare (1.3) perde di significato. Infatti, in un punto  $x$  dove  $u$  ha un salto, la funzione  $A(u)$  sarà in generale discontinua, mentre la  $u_x$ , interpretata in senso distribuzionale, determina una massa di Dirac. Il prodotto fra distribuzioni  $A(u) \cdot u_x$  non è quindi ben definito. D'altra parte, il sistema (1.1), essendo in forma di conservazione, mantiene significato in senso distribuzionale. Una funzione localmente integrabile  $u = u(t, x)$  si dirà soluzione se, per ogni  $\phi \in \mathcal{C}_c^1$  continuamente differenziabile a supporto compatto, risulta

$$(2.1) \quad \iint \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dx dt = 0.$$

Nel seguito, dato il problema di Cauchy

$$(2.2) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}(x)$$

con  $\bar{u} \in \mathbf{L}_{loc}^1$ , chiameremo *soluzione debole* di (2.2) una funzione  $u = u(t, x)$  de-

finita su  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}$  che soddisfi le seguenti condizioni. La mappa  $t \mapsto u(t, \cdot)$  è continua a valori in  $L^1_{\text{loc}}$  e verifica la condizione iniziale  $u(0) = \bar{u}$ ; inoltre vale la (2.1) per ogni  $\phi \in C_c^1$  con supporto contenuto nel semipiano ove  $t > 0$ .

ESEMPIO 2. – Si consideri la funzione costante a tratti con un unico salto:

$$(2.3) \quad U(t, x) \doteq \begin{cases} u^- & \text{se } x < \lambda t, \\ u^+ & \text{se } x > \lambda t. \end{cases}$$

In questo caso, un'applicazione del teorema della divergenza mostra che la  $U$  è soluzione in senso distribuzionale della (1.1) se e solo se gli stati  $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$  e la velocità  $\lambda$  del salto soddisfano le equazioni di Rankine-Hugoniot

$$(2.4) \quad \lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-).$$

Su motivazioni dettate dalla gas-dinamica, una soluzione del tipo (2.3) viene indicata come un'onda di shock.

Seguendo [20, 39], diremo che una funzione  $u = u(t, x)$  presenta un salto approssimato nel punto  $(\tau, \xi)$  se esistono  $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$  ed una velocità  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che

$$(2.5) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varrho^2} \int_{\tau-\varrho}^{\tau+\varrho} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} |u(t, x) - U(t-\tau, x-\xi)| dx dt = 0,$$

ove  $U$  è la funzione definita in (2.3). Ciò significa che in un intorno del punto  $(\tau, \xi)$  la funzione  $u$  può essere bene approssimata mediante la  $U$ . Per punti di salto approssimato vale il risultato seguente.

TEOREMA 1. – Sia  $u$  soluzione del sistema di leggi di conservazione (1.1). Se in un punto  $(\tau, \xi)$  vale il limite (2.5), allora  $u^-, u^+$  e  $\lambda$  soddisfano le condizioni di Rankine-Hugoniot (2.4).

Nell'ambito delle soluzioni classiche, i.e. di classe  $C^1$ , è possibile dimostrare che il problema di Cauchy ha al più una sola soluzione. Non è così nel caso delle soluzioni deboli, che possono essere anche infinite in presenza di discontinuità.

ESEMPIO 3. – Si consideri il problema scalare

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per ogni numero reale  $\alpha \in [0, 1]$ , si verifica facilmente che la funzione

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < at/2 \\ \alpha & \text{se } at/2 \leq x < (1 + \alpha)t/2 \\ 1 & \text{se } x \geq (1 + \alpha)t/2 \end{cases}$$

è una soluzione debole. Infatti, tale funzione è costante a tratti. Inoltre, le condizioni (2.4) di Rankine-Hugoniot

$$\lambda(u^+ - u^-) = \frac{(u^+)^2}{2} - \frac{(u^-)^2}{2}$$

sono soddisfatte lungo le due linee di salto  $x_1(t) = at/2$ ,  $x_2(t) = (1 + \alpha)t/2$ , per ogni scelta di  $\alpha$ . Alla luce del precedente esempio, è evidentemente necessario imporre ulteriori condizioni sulle soluzioni deboli, per selezionare possibilmente un'unica soluzione, dipendente con continuità dal dato iniziale. Varie condizioni sono state introdotte in letteratura [17, 26, 35, 39], in parte motivate anche da considerazioni fisiche relative alla dissipazione di entropia o ad approssimazioni viscosi. Riportiamo qui le condizioni proposte da Lax [26], che sono particolarmente utili nel caso di sistemi in cui ciascun campo è genuinamente non lineare oppure linearmente degenere. In via preliminare, osserviamo che, se  $u$  ha un salto approssimato in un punto  $(\tau, \xi)$ , allora per il Teorema 1 i corrispondenti stati  $u^-$ ,  $u^+$  e la velocità  $\lambda$  in (2.3), (2.5) soddisfano le relazioni di Rankine-Hugoniot. Usando il teorema fondamentale del calcolo, la (2.4) si riscrive nella forma

$$(2.6) \quad \lambda(u^+ - u^-) = \int_0^1 Df(\theta u^+ + (1 - \theta) u^-) \cdot (u^+ - u^-) d\theta = A(u^-, u^+) \cdot (u^+ - u^-).$$

La matrice

$$(2.7) \quad A(u^-, u^+) \doteq \int_0^1 Df(\theta u^+ + (1 - \theta) u^-) d\theta$$

rappresenta qui il valor medio dello Jacobiano di  $f$  lungo il segmento che congiunge  $u^-$  con  $u^+$ . La (2.6) mostra che, in ogni punto di salto, la differenza fra gli stati destro e sinistro  $u^+ - u^-$  è un autovettore della matrice  $A(u^+, u^-)$ , mentre la velocità del salto deve coincidere con il corrispondente autovalore:  $\lambda = \lambda_i(u^-, u^+)$  per qualche  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Chiamando  $\lambda_i(u)$  l' $i$ -esimo autovalore della matrice  $A(u) = Df(u)$ , la *condizione di ammissibilità di Lax* richie-



de che

$$(2.8) \quad \lambda_i(u^+) \leq \lambda \leq \lambda_i(u^-).$$

Intuitivamente, per uno shock della  $i$ -esima famiglia ciò significa che la velocità  $\lambda$  con cui viaggia lo shock deve essere maggiore della velocità  $\lambda_i(u^+)$  delle onde immediatamente davanti allo shock, e minore della velocità  $\lambda_i(u^-)$  delle onde dietro allo shock.

### 3. – Il problema di Cauchy.

I sistemi di leggi di conservazione contengono equazioni fortemente non lineari, con soluzioni a valori vettoriali possibilmente discontinue. Per questi motivi, la maggior parte delle tecniche classiche dell'analisi funzionale non sono applicabili in questo contesto. In generale, la soluzione non si può ottenere come punto fisso di qualche trasformazione continua, o come minimo di un opportuno funzionale. Principi di massimo, teoremi di confronto fra soluzioni, così come la teoria dei semigruppì di contrazione non lineari [13], sono applicabili solo al caso di una singola legge di conservazione scalare [25]. Di conseguenza, la soluzione del problema di Cauchy deve essere costruita «a mano», definendo una successione di soluzioni approssimate e mostrandone la convergenza grazie ad un criterio di compattezza. Il principale risultato sull'esistenza globale di soluzioni deboli è il seguente teorema dimostrato da J. Glimm [21].

**TEOREMA 2.** – *Si consideri il problema di Cauchy (2.2), con  $f$  regolare, definita in un intorno dell'origine in  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che il sistema sia strettamente iperbolico e che ogni campo caratteristico sia genuinamente non lineare oppure linearmente degenere. Allora esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni dato iniziale  $\bar{u} \in \mathbf{L}^1$  con  $\text{Var. Tot. } \{\bar{u}\} \leq \delta$ , il problema (2.2) ammette una soluzione debole definita per  $t \in [0, \infty[$ .*

L'ingrediente fondamentale per comprendere la soluzione del problema di Cauchy è il cosiddetto *problema di Riemann*, avente la forma

$$(3.1) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} u^+ & \text{se } x > 0, \\ u^- & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi che in questo caso il dato iniziale è costante a tratti, con un unico salto nell'origine. Per sistemi in cui ogni campo caratteristico è genuinamente non lineare o linearmente degenere, la soluzione generale del problema di Riemann è stata costruita da Lax [26]. Essa ha la forma  $u(t, x) = \psi(x/t)$ , essendo costante lungo ciascuna semiretta uscente dall'origine. In generale

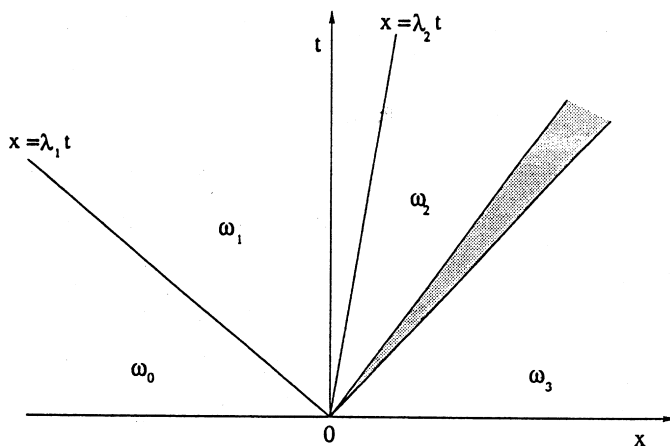


Figura 3

(fig. 3), tale soluzione contiene  $n + 1$  valori costanti  $u^- = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n = u^+$ . Due stati adiacenti  $\omega_{i-1}, \omega_i$  sono connessi o da un semplice salto, i.e. da uno shock soddisfacente le equazioni di Rankine-Hugoniot, oppure da un'onda centrata di rarefazione. In quest'ultimo caso c'è una regione in cui i valori della  $u$  variano con continuità fra  $\omega_{i-1}$  e  $\omega_i$ , ed il gradiente  $u_x$  è parallelo all'autovettore  $r_i(u)$ .

Una soluzione approssimata per il più generale problema di Cauchy può essere costruita incollando assieme varie soluzioni di problemi di Riemann. Come preliminare, osserviamo che non è restrittivo supporre che tutte le velocità delle onde, i.e. gli autovalori delle matrici  $A(u) = Df(u)$ , siano comprese all'interno dell'intervallo  $[0, 1]$ . Se infatti  $|\lambda_i(u)| \leq \hat{\lambda}$  per una costante  $\hat{\lambda}$  ed ogni  $u \in \Omega, i = 1, \dots, n$ , la trasformazione lineare di coordinate  $t' = 2\hat{\lambda}t, x' = x + \hat{\lambda}t$  trasforma il sistema (1.3) in uno equivalente, con autovalori compresi in  $[0, 1]$ .

L'algoritmo di Glimm per costruire una soluzione approssimata del problema (2.2) utilizza una griglia nel piano  $t$ - $x$  di passo  $\Delta t = \Delta x$ , con nodi nei punti

$$P_{jk} = (t_j, x_k) \doteq (j\Delta t, k\Delta x) \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

ed una successione di numeri reali  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  uniformemente distribuita nell'intervallo  $[0, 1]$ . Ciò significa che, per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ , la percentuale di punti  $\theta_i, 1 \leq i \leq N$  che cade nell'intervallo  $[0, \lambda]$  tende proprio a  $\lambda$  quando

$N \rightarrow \infty$ . Più precisamente:

$$(3.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{j; 1 \leq j \leq N, \theta_j \in [0, \lambda]\}}{N} = \lambda \quad \text{per ogni } \lambda \in [0, 1].$$

Con  $\#I$  indichiamo qui la cardinalità di un insieme  $I$ . Al tempo  $t = 0$  l'algoritmo inizia prendendo un'approssimazione costante a tratti della condizione iniziale  $\bar{u}$ , costante lungo ciascun intervallo del tipo  $]x_{k-1}, x_k[$ . Per tempi  $t > 0$  piccoli, la soluzione viene ottenuta risolvendo i singoli problemi di Riemann corrispondenti ai salti della funzione  $u(0, \cdot)$ , nei punti  $x_k$ . Poiché le onde hanno velocità di propagazione compresa in  $[0, 1]$ , onde provenienti da diversi problemi di Riemann rimangono ben separate fino all'istante  $t_1 = \Delta t$ . La soluzione può quindi essere prolungata su tutto l'intervallo temporale  $[0, \Delta t[$ . Per tempi superiori, onde diverse inizierebbero ad interagire, e la soluzione diventerebbe molto complicata. Per evitare ciò, si ricorre ad una procedura di restarting. All'istante  $t_1 = \Delta t$  la  $u(t_1, \cdot)$  viene approssimata mediante una nuova funzione costante a tratti, con salti nei nodi  $x_k = k\Delta x$ . La soluzione si può ora costruire sul nuovo intervallo temporale  $[\Delta t, 2\Delta t[$  incollando assieme le varie soluzioni dei problemi di Riemann determinati dai salti nei punti  $x_k$ . All'istante  $t_2 = 2\Delta t$ , la soluzione così ottenuta viene nuovamente approssimata da una funzione costante a tratti, etc...

Un aspetto chiave della costruzione è la tecnica di restarting. Volendo approssimare una generica funzione  $BV$  mediante una funzione costante a tratti con salti nei punti  $x_k \doteq k\Delta x$ , sembra naturale sostituire la  $u$  con il suo valor medio preso su ciascun intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$ . Questo procedimento dà luogo al metodo numerico di approssimazione di Godunov. Purtroppo, la convergenza di tali approssimazioni si è rivelata estremamente difficile da studiare, ed è tuttora un problema aperto. Nell'algoritmo di Glimm, il restarting è invece basato su una tecnica di campionamento. Al tempo  $t_1$ , si considera il primo numero  $\theta_1$  della successione. Su ciascun intervallo,  $[x_{k-1}, x_k]$ , il valore della funzione  $u(t_1, \cdot)$  nel punto intermedio  $x = \theta_1 x_k + (1 - \theta_1)x_{k-1}$  diventa il nuovo valore della funzione  $u$  su tutto l'intervallo. In generale, all'istante  $t_j$ , su ciascun intervallo,  $[x_{k-1}, x_k]$ , il vecchio valore della funzione  $u(t_j, \cdot)$  nel punto intermedio  $x = \theta_j x_k + (1 - \theta_j)x_{k-1}$  diventa il nuovo valore della funzione  $u$  su tutto l'intervallo. Una soluzione approssimata costruita da questo algoritmo è illustrata nella figura 4. Gli asterischi indicano i punti ove la funzione viene campionata, supponendo  $\theta_1 = 1/2$ ,  $\theta_2 = 1/3$ .

Le analisi di J. Glimm [21] e di T. P. Liu [29] hanno dimostrato che

1. Se la condizione iniziale  $\bar{u}$  ha variazione totale piccola, per ogni  $t > 0$  la variazione totale della soluzione approssimata  $u(t, \cdot)$  rimane piccola.

2. Facendo tendere a zero il passo della griglia  $\Delta t = \Delta x$ , e usando sempre la stessa successione  $(\theta_j)_{j \geq 1}$ , si ottiene una successione di soluzioni ap-

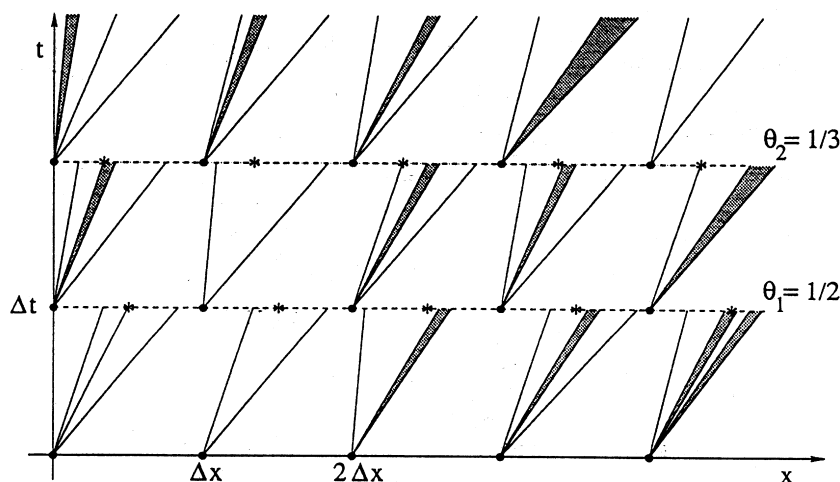


Figura 4

prossimate. Per il teorema di compattezza di Helly, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad una funzione limite  $u = u(t, x)$ , in  $L^1_{loc}$ .

3. Se i numeri  $\theta_j$  sono equidistribuiti in  $[0, 1]$ , i.e. se vale la (3.2), allora la funzione limite  $u$  è una soluzione debole del problema di Cauchy (2.2).

L'importanza della condizione (3.2) si vede bene nel seguente esempio.

ESEMPIO 4. – Si consideri un problema di Riemann del tipo (3.1). Supponiamo che la soluzione esatta sia proprio la funzione  $U$  definita in (2.3), costituita da un unico shock con velocità  $\lambda \in [0, 1]$ . Consideriamo un'approssimazione di Glimm di tale soluzione (fig. 5). Per costruzione, ad ogni istante  $t_j \doteq j\Delta t$ , la posizione dello shock nella soluzione approssimata deve coincidere con uno dei nodi della griglia. Passando da  $t_{j-1}$  a  $t_j$ , la posizione dello shock resta invariata se  $\theta_j \in ]\lambda, 1]$ , mentre si sposta in avanti di  $\Delta x$  nel caso  $\theta_j \in [0, \lambda]$ . Detta  $x(t)$  la posizione dello shock nella soluzione approssimata, si ha quindi

$$(3.3) \quad x(t_j) = \begin{cases} x(t_{j-1}) & \text{se } \theta_j \in ]\lambda, 1], \\ x(t_{j-1}) + \Delta x & \text{se } \theta_j \in [0, \lambda]. \end{cases}$$

Fissiamo ora un tempo  $T > 0$ , e prendiamo  $\Delta t \doteq T/N$ . Dalla (3.3) segue che

$$(3.4) \quad x(T) = \#\{j; 1 \leq j \leq N, \theta_j \in [0, \lambda]\} \cdot \Delta t = \frac{\#\{j; 1 \leq j \leq N, \theta_j \in [0, \lambda]\}}{N} \cdot T.$$

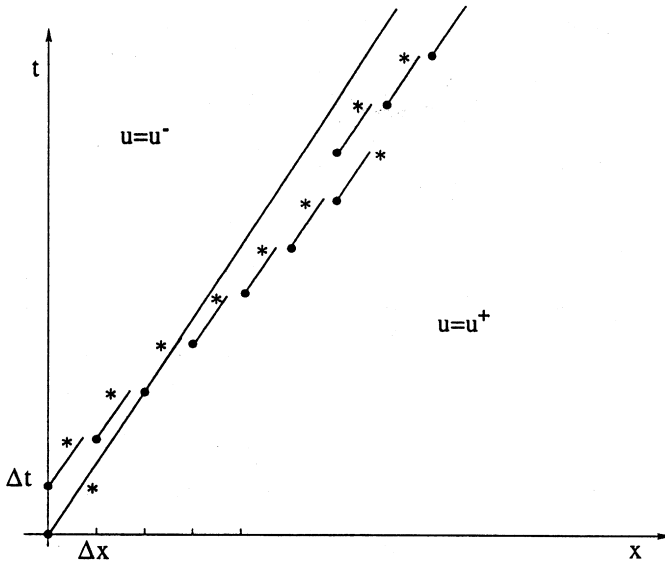


Figura 5

È ora chiaro che la condizione (3.2) sulla uniforme distribuzione della successione  $(\theta_j)_{j \geq 1}$  è precisamente ciò che serve per garantire che la posizione dello shock  $x(T)$  nella soluzione approssimata converga alla posizione esatta  $\lambda T$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$  ossia  $N \rightarrow \infty$ .

Una metodo alternativo per costruire soluzioni approssimate, dapprima introdotto da C. Dafermos [14] per equazioni scalari e poi esteso da vari autori nel caso di sistemi [1, 4, 16, 36], è la cosiddetta tecnica di *front tracking* (fig. 6). Si inizia con un'approssimazione costante a tratti della condizione iniziale. In ogni punto di salto, il corrispondente problema di Riemann viene risolto in modo approssimato mediante una funzione ancora costante a tratti, con un numero finito di salti nel piano  $t-x$ . La soluzione viene prolungata fino al primo istante  $t_1$  in cui due o più linee di salto interagiscono fra loro. A questo punto si risolve il nuovo problema di Riemann determinato dall'interazione, e si prolunga la soluzione fino ad un istante  $t_2$  quando ha luogo una seconda interazione, ecc...

Questa procedura determina quindi una soluzione approssimata costante a tratti nel piano  $t-x$ , con salti lungo una famiglia finita di rette. Si osservi che nell'algoritmo di Glimm la posizione dei salti è fissata a priori, dovendo coincidere con i nodi della griglia. Nel front tracking invece la posizione dei salti cerca di adattarsi alla particolare soluzione che si va costruendo, «tracciando» i vari fronti d'onda. Da qui il nome dell'algoritmo. Grazie ad alcuni accorgi-

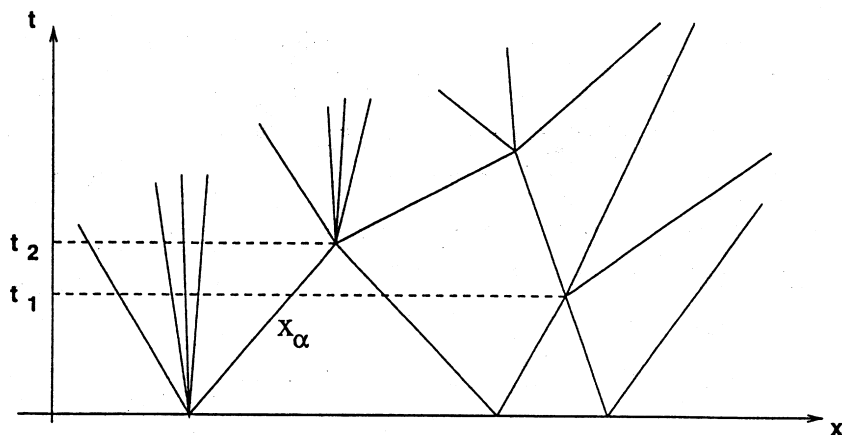


Figura 6

menti tecnici, il numero di fronti d'onda rimane limitato. Le stime uniformi sulla variazione totale delle soluzioni approssimate utilizzano le stesse idee introdotte da Glimm. Usando un teorema di compattezza, si riesce quindi ad estrarre una successione che converge in  $L^1_{loc}$  ad una soluzione debole del problema di Cauchy.

Si noti che, nell'algoritmo di Glimm, ad ogni passo temporale si introduce un errore dovuto al restarting. Sostituendo alla funzione  $u(t_j -)$  una nuova funzione costante a tratti  $u(t_j +)$ , si commette un errore misurato da

$$\|u(t_j +) - u(t_j -)\|_{L^1}.$$

Al tendere a zero del passo  $\Delta t = T/N$ , la somma totale di questi errori in generale non tende a zero. Nell'esempio 4, per ogni  $N$  si ha infatti

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|u(t_j +) - u(t_j -)\|_{L^1} &\geq \sum_{j=1}^N |u^+ - u^-| \cdot \Delta T \cdot \min \{(1 - \lambda), \lambda\} \\ &= |u^+ - u^-| \cdot T \cdot \min \{(1 - \lambda), \lambda\}. \end{aligned}$$

Questo mette in luce un aspetto importante dell'algoritmo di Glimm. La somma degli errori, in valore assoluto, non tende a zero. Pur tuttavia, per una legge dei grandi numeri, errori per eccesso e per difetto alla lunga si compensano e la soluzione approssimata converge a quella esatta. Nel caso di soluzioni approssimate costruite mediante front tracking, invece, è possibile mostrare che anche il valore assoluto degli errori tende a zero. Quest'ultimo algoritmo possiede quindi migliori proprietà di convergenza, e fornisce uno strumento più efficace nello studio teorico delle soluzioni.

#### 4. – Stabilità delle soluzioni.

La dimostrazione dell'esistenza di soluzioni deboli, descritta nella sezione precedente, è basata su un teorema di compattezza. Essa non può quindi fornire informazioni sulla loro unicità e dipendenza continua.

Per la singola legge di conservazione scalare, il fondamentale risultato di S. Kruzhkov [25] ha stabilito l'unicità e la dipendenza continua delle soluzioni deboli entropiche, anche in più variabili spaziali. D'altra parte, nel caso di sistemi di  $n$  leggi di conservazione, la buona posizione del problema di Cauchy, è rimasta per molti anni un problema aperto. La questione è stata affrontata dall'autore assieme a vari collaboratori [3, 7, 8], trattando via via casi di crescente generalità. Il passo fondamentale consiste nella costruzione di un semigruppato di soluzioni.

**TEOREMA 3.** – *Sia (1.1) un sistema strettamente iperbolico di leggi di conservazione, in cui ciascun campo caratteristico è genuinamente non lineare oppure linearmente degenerare. Allora esistono delle costanti  $\delta, L > 0$ , un dominio  $\Omega \subset L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  ed un semigruppato  $S : \Omega \times [0, \infty[ \rightarrow \Omega$  con le seguenti proprietà.*

- (i)  $S_0 \bar{u} = \bar{u}$ ,  $S_s S_t \bar{u} = S_{s+t} \bar{u}$ .
- (ii) *Ogni condizione iniziale  $\bar{u} \in L^1$  con  $\text{Var. Tot. } \{\bar{u}\} \leq \delta$  sta nel dominio  $\Omega$ .*
- (iii) *Ogni traiettoria  $t \mapsto S_t \bar{u}$  è soluzione debole entropica del corrispondente problema di Cauchy.*
- (iv) *Per ogni  $\bar{u}, \bar{v} \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ , si ha*

$$(4.1) \quad \|S_t \bar{u} - S_t \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1}.$$

Tale teorema è stato inizialmente dimostrato usando una tecnica di omotopia e linearizzazione. Siano  $u, v$  due soluzioni deboli entropiche del sistema (1.1). Per stimare come la distanza  $\|u(t) - v(t)\|_{L^1}$  varia nel tempo (fig. 7), si costruisce una famiglia ad un parametro di soluzioni  $u^\theta$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , che connette  $u$  con  $v$ . Ad ogni istante  $t$ , chiamiamo  $\gamma_t: \theta \mapsto u^\theta(t)$  la curva che congiunge  $u(t)$  con  $v(t)$ . La distanza in  $L^1$  fra  $u(t)$  e  $v(t)$  è ovviamente maggiorata dalla lunghezza della curva  $\gamma_t$ . A sua volta, tale lunghezza si può calcolare integrando la norma di un opportuno vettore tangente  $\nu$ . In questo modo, la dipendenza continua dai dati iniziali è ricondotta al problema di dare stime uniformi sull'ampiezza di una «variazione prima» della soluzione. In sostanza, ciò riconduce ad analizzare una famiglia di problemi linearizzati. Grazie a questa tecnica, si è riusciti a dimostrare la buona posizione del problema di Cauchy in [7] per sistemi di due equazioni, e successivamente in [8] per sistemi con un numero arbitrario di equazioni. Le dimostrazioni ottenute con questo metodo sono pe-

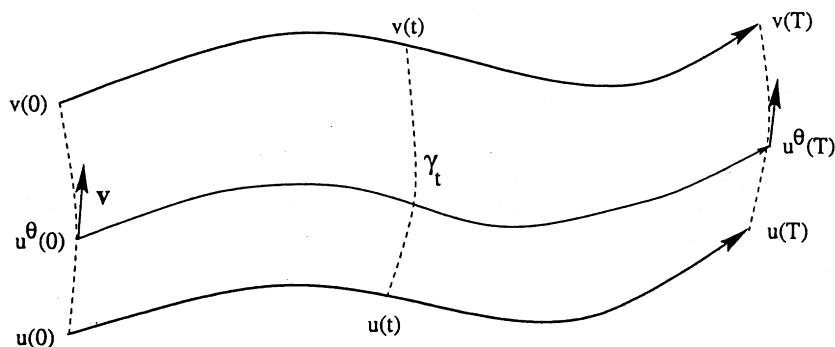


Figura 7

rò molto laboriose. Infatti, per poter descrivere l'evoluzione di una «variazione prima» di una soluzione mediante un'equazione linearizzata, è necessaria una certa regolarità minima. Più precisamente, occorre che la soluzione di riferimento sia Lipschitziana a tratti, con un numero finito di salti. D'altra parte, una generica soluzione di un sistema di leggi di conservazione è soltanto una funzione  $BV$ . Anche se il dato iniziale è molto regolare, sia la costante di Lipschitz sia il numero di salti possono diventare infiniti in tempo finito. Per ovviare a tali inconvenienti, è necessario lavorare non con soluzioni esatte, ma con vari tipi di soluzioni approssimate. Lo studio delle proprietà di tali approssimazioni e della loro convergenza appesantisce notevolmente l'aspetto tecnico delle dimostrazioni. Recentemente, un nuovo approccio al problema della buona posizione è stato introdotto da T. P. Liu e T. Yang [30, 31]. Esso consiste nel definire direttamente un funzionale di Lyapunov  $\Phi(u, v)$ , uniformemente equivalente alla distanza  $L^1$ , che sia decrescente lungo ogni coppia di soluzioni di (1.1). Più precisamente, la  $\Phi$  deve soddisfare

$$(4.2) \quad \frac{1}{C_1} \cdot \|v - u\|_{L^1} \leq \Phi(u, v) \leq C_1 \cdot \|v - u\|_{L^1}$$

per ogni coppia di funzioni  $u, v \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , ed inoltre

$$(4.3) \quad \frac{d}{dt} \Phi(u(t), v(t)) \leq 0$$

per ogni coppia di soluzioni deboli entropiche di (1.1), con variazione totale sufficientemente piccola. La versione definitiva di questa tecnica, valida per sistemi di  $n$  equazioni, si trova in [12]. Cercheremo di dare qui un'idea intuitiva di come si costruisce il funzionale  $\Phi$ , relativo a due funzioni  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  costanti a tratti. Iniziamo con alcune notazioni. Chiamiamo  $x_\alpha$  le posizioni dei salti in



$u$  o in  $v$ . Supponiamo che il salto in  $x_\alpha$  determini un'onda della famiglia  $k_\alpha \in \{1, \dots, n\}$ , di ampiezza  $\sigma_\alpha$ . Se  $u$  e  $v$  fossero soluzioni, tale discontinuità viaggerebbe quindi con velocità  $\dot{x}_\alpha \approx \lambda_{k_\alpha}$ , vicina al corrispondente autovalore della matrice Jacobiana  $A = Df$ . Seguendo Glimm [21], diciamo che due onde di  $u$ , poste in  $x_\alpha < x_\beta$  e di famiglie  $k_\alpha, k_\beta$ , sono *in avvicinamento* se  $k_\alpha > k_\beta$  oppure se  $k_\alpha = k_\beta$  ed almeno una delle due onde è uno shock di una famiglia genuinamente non lineare. Ciò rispecchia il semplice fatto che due onde si avvicinano se quella posta più indietro ha velocità maggiore dell'altra. La somma

$$(4.4) \quad Q(u) \doteq \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}(u)} |\sigma_\alpha| |\sigma_\beta|,$$

estesa all'insieme  $\mathcal{C}(u)$  di tutte le coppie di onde di  $u$  in avvicinamento, si dice *potenziale di interazione* di  $u$ .

Per costruire il funzionale  $\Phi$ , iniziamo a decomporre la differenza  $v - u$  in componenti scalari  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A tale scopo, per ogni  $x$ , cerchiamo di connettere gli stati  $u(x)$  e  $v(x)$  mediante  $n$  di onde di shock. Più precisamente, determiniamo gli stati intermedi

$$\omega_0(x) = u(x), \quad \omega_1(x), \dots, \quad \omega_n(x) = v(x)$$

tali che ogni coppia di stati adiacenti  $\omega_{i-1}, \omega_i$  sia collegata da un'onda di shock della  $i$ -esima famiglia, soddisfacente le relazioni di Rankine-Hugoniot

$$(4.5) \quad \lambda_i(x)(\omega_i(x) - \omega_{i-1}(x)) = f(\omega_i(x)) - f(\omega_{i-1}(x)) \quad i = 1, \dots, n,$$

per un'opportuna velocità  $\lambda_i$ . Chiamiamo  $q_1(x), \dots, q_n(x)$  le ampiezze di tali shocks, che possiamo pensare come componenti scalari del vettore  $v(x) - u(x)$ . Esse sono univocamente determinate grazie al teorema delle funzioni implicite. A questo punto, la quantità

$$\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |q_i(x)| dx,$$

è equivalente alla distanza  $L^1$  fra  $u$  e  $v$ , ma non è in generale decrescente nel tempo, per soluzioni del sistema iperbolico. Per ottenere la ulteriore proprietà (4.3), introduciamo quindi una famiglia di pesi  $W_i \in [1, 2]$  e definiamo

$$(4.6) \quad \Phi(u, v) \doteq \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} W_i(x) |q_i(x)| dx.$$

I pesi  $W_i$  sono definiti ponendo

$$(4.7) \quad W_i(x) \doteq 1 + \kappa_1 \cdot [\text{ampiezza totale delle onde in } u \text{ e in } v \text{ che si avvicinano a } q_i(x)] \\ + \kappa_1 \kappa_2 \cdot [\text{potenziali di interazione di } u \text{ e di } v]$$

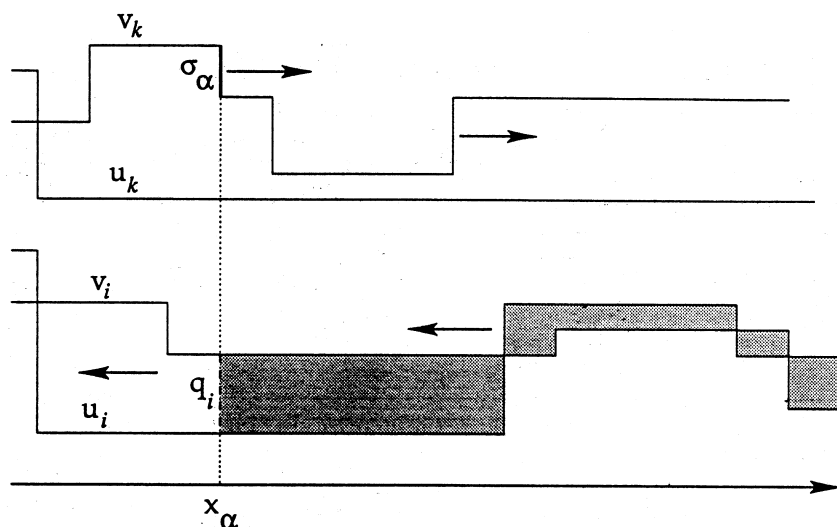


Figura 8

con  $\kappa_1, \kappa_2$  costanti opportunamente grandi. Cercheremo di dare una giustificazione intuitiva della decrescita del funzionale  $\Phi(u, v)$  con l'ausilio di due figure. Chiamiamo  $u_i, v_i$  le componenti scalari di  $u$  e  $v$ , definite in modo che risulti  $q_i(x) = v_i(x) - u_i(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Consideriamo un qualunque salto della funzione  $v$ , diciamo nel punto  $x_\alpha$ , costituito da un'onda di ampiezza  $\sigma_\alpha$ , nella  $k$ -esima famiglia. Per ogni  $i < k$ , il funzionale  $\Phi(u, v)$  contiene un termine del tipo (fig. 8)

$$A_{\alpha, i} \doteq \kappa_1 \cdot |\sigma_\alpha| \cdot [\text{area della regione fra } u_i \text{ e } v_i, \text{ alla destra del punto } x_\alpha].$$

Trascurando termini di secondaria importanza, l'evoluzione delle componenti  $u_k, v_k$  è approssimativamente descritta come una traslazione con velocità  $\lambda_k$ . Analogamente, si può pensare all'evoluzione delle componenti  $u_i, v_i$  come una traslazione con velocità  $\lambda_i$ . Per l'ipotesi di stretta iperbolicità, queste due velocità sono strettamente separate:  $\lambda_k - \lambda_i \geq c > 0$ . In prima approssimazione (trascurando termini di accoppiamento fra le diverse componenti) l'area compresa fra i grafici di  $u_i$  e  $v_i$ , alla destra del punto di salto  $x_\alpha$ , è quindi decrescente nel tempo. Ciò implica  $dA_{\alpha, i}/dt \leq 0$ .

È interessante inoltre esaminare i termini del tipo

$$A_{\alpha, k} \doteq \kappa_1 \cdot |\sigma_\alpha| \cdot [\text{area della regione fra } u_k \text{ e } v_k, \text{ alla destra del punto } x_\alpha],$$

anch'essi presenti nel funzionale  $\Phi$ . In questo caso  $k$  è la stessa famiglia a cui appartiene il fronte d'onda  $\sigma_\alpha$ . La decrescita della quantità  $A_{\alpha, k}$  è qui dovuta

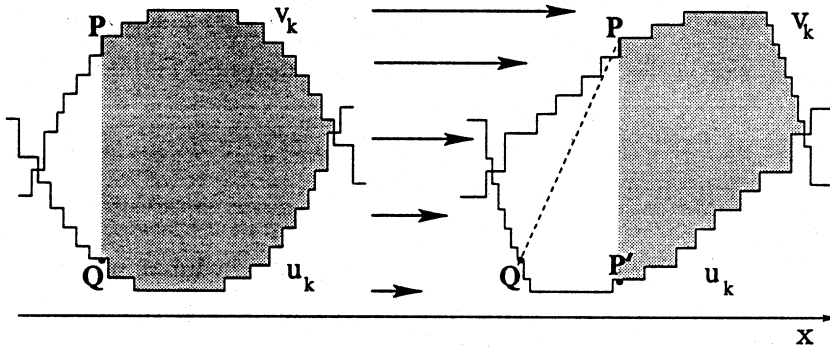


Figura 9

alla genuina nonlinearità. Trascurando termini di accoppiamento, l'evoluzione delle componenti scalari  $u_k, v_k$  è governata da una singola equazione di trasporto, in cui la velocità e funzione crescente dell'ordinata (fig. 9). Al trascorrere del tempo, i grafici delle funzioni  $u_k, v_k$  vengono deformati. In particolare, se inizialmente i punti  $P, Q$  sui grafici di  $v_k, u_k$  si trovano sulla stessa verticale, ciò non è più vero ad un istante successivo. In questo caso, mentre l'area della regione fra  $u_k$  e  $v_k$  alla destra del segmento  $PQ$  resta pressoché costante, la porzione di questa regione che rimane alla destra di una retta verticale per  $P$  (area ombreggiata nella fig. 9) risulta decrescente. Anche in questo caso si conclude che  $dA_{\alpha, k}/dt \leq 0$ .

## 5. - Unicità delle soluzioni deboli.

Una volta dimostrata l'esistenza di un semigruppato lipschitziano di soluzioni, un modo naturale per dimostrare l'unicità delle soluzioni consiste nel far vedere che qualunque soluzione debole, che soddisfi opportune condizioni di entropia e di regolarità, necessariamente coincide con la corrispondente traiettoria del semigruppato. Risultati in questa direzione sono stati ottenuti in [9, 10, 11]. Riportiamo qui le ipotesi usate in [11].

(C1) (*Equazioni di conservazione*) La funzione  $u = u(t, x)$  è soluzione debole del problema di Cauchy (2.2). Per ogni  $t \geq 0$ , la  $u(t, \cdot)$  rimane nel dominio  $\mathcal{Q}$  del semigruppato.

(C2) (*Condizioni di Entropia*) In ogni punto  $(\tau, \xi)$  dove  $u$  ha un salto approssimato, sono verificate le condizioni di entropia di Lax (2.8).

(C3) (*Condizione di Regolarità*) Esiste  $\delta_0 > 0$  tale che la funzione composta  $x \mapsto u(\gamma(x), x)$ , ha variazione totale limitata lungo ogni curva

$\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  tale che

$$|\gamma(x_1) - \gamma(x_2)| \leq \delta_0 |x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in [a, b].$$

**TEOREMA 4.** – *Sia  $u = u(t, x)$  una funzione soddisfacente le tre condizioni (C1)-(C3). Allora essa coincide con la corrispondente traiettoria del semigruppato:  $u(t, \cdot) = S_t \bar{u}$  per ogni  $t \geq 0$ .*

La dimostrazione utilizza una semplice formula per maggiorare l'errore in una soluzione approssimata [5]. Sia  $S : \mathcal{O} \times [0, \infty[ \mapsto \mathcal{O}$  un semigruppato uniformemente lipschitziano che soddisfa la (4.1). Per ogni funzione lipschitziana  $u : [0, T] \mapsto \mathcal{O}$  vale allora la stima

$$(5.1) \quad \|u(T) - S_T u(0)\|_{L^1} \leq L \cdot \int_0^T \left\{ \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|u(t+h) - S_h u(t)\|_{L^1}}{h} \right\} dt.$$

Pensando le traiettorie del semigruppato  $t \mapsto S_t \bar{u}$  come soluzioni esatte di (1.1) e la  $t \mapsto u(t, \cdot)$  come una qualsiasi soluzione approssimata, l'integrando al secondo membro della (5.1) può essere interpretato come un errore istantaneo. La (5.1) dice quindi che la distanza fra la traiettoria approssimata  $u$  e quella esatta all'istante  $T$  è maggiorata dall'integrale degli errori istantanei, amplificato di un fattore  $L$  pari alla costante di Lipschitz del semigruppato.

Per dimostrare il Teorema 4, si fa quindi vedere che, se valgono (C1)-(C3), allora la mappa  $t \mapsto u(t, \cdot)$  è lipschitziana a valori in  $L^1$ , e l'integrando in (5.1) è nullo per quasi ogni  $t$ . Vari risultati di unicità per soluzioni deboli di sistemi iperbolici erano precedentemente noti in letteratura [19, 28, 34]. Tuttavia, essi richiedevano ipotesi restrittive sulla regolarità delle soluzioni deboli, non necessariamente soddisfatte da generiche soluzioni in  $BV$ . D'altra parte, non è difficile dimostrare che ogni soluzione ottenuta come limite di approssimazioni di Glimm o di front tracking soddisfa tutte le condizioni (C1)-(C3). I lavori [9, 10, 11] forniscono quindi dei primi risultati di unicità validi nella stessa classe di funzioni in cui è noto un generale teorema di esistenza.

## 6. – Alcuni Problemi Aperti.

**1.** Lo studio delle soluzioni deboli per sistemi iperbolici di leggi di conservazione in più variabili spaziali ha grande interesse applicativo. Attualmente, per sistemi del tipo

$$(6.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} u + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0$$

non esiste nessun teorema generale sulla esistenza globale di soluzioni deboli,

comparabile al risultato di Glimm per  $m = 1$ . Infatti, nel caso di una dimensione spaziale, il controllo della variazione totale è ottenuto introducendo il potenziale di interazione (4.4), definito come somma di prodotti di onde in avvicinamento. Tale potenziale, essendo basato sul fatto che la retta unidimensionale è totalmente ordinata, non ammette alcuna estensione naturale al caso di più dimensioni. Inoltre, il risultato di J. Rauch [35] sembra indicare che lo spazio  $BV$  non è lo spazio adatto in cui cercare soluzioni nel caso multidimensionale. Non è quindi nemmeno chiaro in quale spazio funzionale convenga lavorare, cercando un qualche criterio di compattezza che garantisca l'esistenza di soluzioni. Per questi motivi, lo sviluppo di una teoria in più dimensioni spaziali rimane un difficile problema aperto.

2. Tornando ai sistemi in una dimensione spaziale, ha qui interesse studiare il comportamento di soluzioni con dati grandi. Per il teorema di Glimm, se inizialmente la variazione totale è sufficientemente piccola, essa rimane piccola per ogni  $t \geq 0$ . Al contrario, per dati iniziali grandi, sia la variazione totale della soluzione che la sua norma  $L^\infty$  possono esplodere in tempo finito. Un esempio in questa direzione è stato recentemente costruito da H. K. Jenssen [23], per un sistema  $3 \times 3$ . Questo sistema però non ha significato fisico; in particolare esso non ammette nessuna entropia convessa. Sarebbe quindi importante capire se il blow up può effettivamente accadere per soluzioni del sistema della gas-dinamica, o di altre equazioni della fisica matematica. Sarebbe inoltre interessante poter descrivere la forma asintotica del blow up, analogamente a quanto è già stato fatto per varie equazioni paraboliche nonlineari [22].

3. Un'ulteriore direzione di ricerca è rappresentata dai vari limiti singolari. Un sistema iperbolico viene spesso usato come modello semplificato per studiare un sistema più complesso, in presenza di un piccolo coefficiente di viscosità o di rilassamento. Per esempio, assieme al sistema (1.1) si può considerare il sistema parabolico

$$(6.2) \quad u_t + A(u) u_x = \varepsilon u_{xx},$$

con  $A = Df$ . Al tendere a zero del parametro di viscosità  $\varepsilon$ , ci si aspetta che le soluzioni del sistema (6.2) convergano alle soluzioni entropiche del sistema iperbolico (1.1). Questa congettura, per quanto naturale, è tuttora irrisolta nel caso generale di sistemi  $n \times n$ . La principale difficoltà consiste nel controllare le oscillazioni delle soluzioni di (6.2), i.e. nel dimostrare che la variazione totale delle soluzioni resta uniformemente limitata quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Attualmente, tali stime in  $BV$  sono disponibili solo per una classe particolare di sistemi [2].

Per sistemi  $2 \times 2$ , un noto risultato di R. DiPerna [19] mostra la convergenza di una successione di soluzioni di (6.2) ad una qualche soluzione debole di (1.1), utilizzando tecniche di compattezza compensata. Poiché la soluzione limite viene ottenuta solo in  $L^\infty$  (anziché in  $BV$ ), non si riesce tuttora a dare informazioni sul-

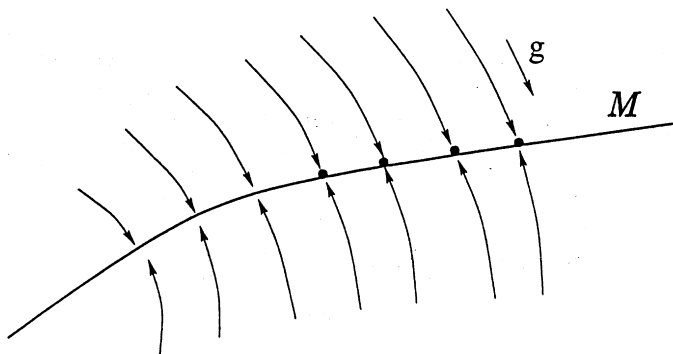


Figura 10

la sua unicità, o sulle sue proprietà qualitative. Molto studiati in anni recenti sono pure i cosiddetti problemi di rilassamento. Essi hanno la forma

$$(6.3) \quad U_t + AU_x = \frac{1}{\varepsilon} g(U)$$

ove  $A$  è una matrice  $N \times N$  a coefficienti costanti mentre  $g: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  è un campo vettoriale avente un manifold stabile  $\mathcal{M}$  di punti stazionari (fig. 10). In altre parole,  $g \equiv 0$  su  $\mathcal{M}$ , e per  $t \rightarrow \infty$ , tutte le soluzioni dell'equazione

$$\frac{dU}{dt} = g(U)$$

convergono ad una configurazione di equilibrio su  $\mathcal{M}$ .

In questo caso, quando  $\varepsilon$  è molto piccolo, ci si aspetta che le soluzioni di (6.3) rimangano in un piccolo intorno del manifold  $\mathcal{M}$ . Il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  dovrebbe quindi potersi descrivere mediante un sistema iperbolico (non lineare) in un numero minore di variabili, pari alla dimensione di  $\mathcal{M}$ .

Sistemi del tipo (6.3) sono particolarmente interessanti in quanto descrivono modelli cinetici di tipo Boltzmann, con particelle aventi un numero finito di possibili velocità. In questo caso, il vettore  $U = (U_1, \dots, U_N)$  rappresenta le densità delle varie particelle,  $g$  è un operatore di collisione mentre  $\mathcal{M}$  rappresenta il manifold di distribuzioni Maxwelliane. Per risultati in questa direzione si veda l'articolo di survey [33]. Ancora una volta, il principale ostacolo che si incontra in uno studio rigoroso della convergenza sta nella mancanza di stime BV sulle soluzioni, uniformemente valide quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Per un'introduzione alla teoria dei sistemi iperbolici di leggi di conservazione ed una dettagliata analisi dell'algoritmo di Glimm si veda [38]. Argomenti più avanzati, compresa la tecnica di compattezza compensata, si trovano in [37]. L'algoritmo di front tracking ed i recenti risultati sulla buona posizione

del problema di Cauchy in una dimensione spaziale sono descritti in [6]. Il recente libro di Dafermos [15] sviluppa i collegamenti fra la teoria analitica dei sistemi iperbolici e la meccanica dei continui. Alcuni risultati in più dimensioni spaziali sono discussi in [32, 37]. Per la soluzione numerica di leggi di conservazione si veda [27].

## REFERENCES

- [1] P. BAITI - H. K. JENSSSEN, *On the front tracking algorithm*, J. Math. Anal. Appl., **217** (1998), 395-404.
- [2] S. BIANCHINI - A. BRESSAN, *BV estimates for a class of viscous hyperbolic systems*, Indiana Univ. Math. J., in corso di stampa.
- [3] A. BRESSAN, *Contractive metrics for nonlinear hyperbolic systems*, Indiana Univ. Math. J., **37** (1988), 409-421.
- [4] A. BRESSAN, *Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking*, J. Math. Anal. Appl., **170** (1992), 414-432.
- [5] A. BRESSAN, *The unique limit of the Glimm scheme*, Arch. Rational Mech. Anal., **130** (1995), 205-230.
- [6] A. BRESSAN, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, 2000.
- [7] A. BRESSAN - R. M. COLOMBO, *The semigroup generated by  $2 \times 2$  conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **133** (1995), 1-75.
- [8] A. BRESSAN - G. CRASTA - B. PICCOLI, *Well posedness of the Cauchy problem for  $n \times n$  systems of conservation laws*, Amer. Math. Soc. Memoir, **694** (2000).
- [9] A. BRESSAN - P. GOATIN, *Oleinik type estimates and uniqueness for  $n \times n$  conservation laws*, J. Differential Equations, **156** (1999), 26-49.
- [10] A. BRESSAN - P. LEFLOCH, *Uniqueness of weak solutions to hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **140** (1997), 301-317.
- [11] A. BRESSAN - M. LEWICKA, *A uniqueness condition for hyperbolic systems of conservation laws*, Discr. Cont. Dynam. Syst., in corso di stampa.
- [12] A. BRESSAN, T. P. LIU - T. YANG,  *$L^1$  stability estimates for  $n \times n$  conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **149** (1999), 1-22.
- [13] M. CRANDALL, *The semigroup approach to first-order quasilinear equations in several space variables*, Israel J. Math., **12** (1972), 108-132.
- [14] C. DAFERMOS, *Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law*, J. Math. Anal. Appl., **38** (1972), 33-41.
- [15] C. DAFERMOS, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, 1999.
- [16] R. DIPERNA, *Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differential Equations, **20** (1976), 187-212.
- [17] R. DIPERNA, *Entropy and the uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws*, in *Nonlinear Evolution Equations* (M. Crandall Ed.), Academic Press, New York (1978), 1-16.
- [18] R. DIPERNA, *Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws*, Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 137-188.
- [19] R. DIPERNA, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., **82** (1983), 27-70.

- [20] L. C. EVANS - R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, C.R.C. Press, 1992.
- [21] J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 697-715.
- [22] M. HERRERO - J. VELAZQUEZ, *Generic behavior of one-dimensional blow-up patterns*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, **19** (1992), 381-450.
- [23] H. K. JENSEN, *Blowup for systems of conservation laws*, SIAM J. Math. Anal., in corso di stampa.
- [24] F. JOHN, *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 377-405.
- [25] S. KRUSHKOV, *First-order quasilinear equations with several space variables*, Math. USSR Sb., **10** (1970), 217-273.
- [26] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537-566.
- [27] R. LEVEQUE, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lecture Notes in Math., Birkhäuser, 1990.
- [28] T. P. LIU, *Uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem for general  $2 \times 2$  conservation laws*, J. Differential Equations, **20** (1976), 369-388.
- [29] T. P. LIU, *The deterministic version of the Glimm scheme*, Comm. Math. Phys., **57** (1977), 135-148.
- [30] T. P. LIU - T. YANG,  *$L^1$  stability of conservation laws with coinciding Hugoniot and characteristic curves*, Indiana Univ. Math. J., **48** (1999), 237-247.
- [31] T. P. LIU - T. YANG,  *$L^1$  stability for  $2 \times 2$  systems of hyperbolic conservation laws*, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 729-774.
- [32] A. MAJDA, *Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [33] R. NATALINI, *Recent results on hyperbolic relaxation problems*, in *Analysis of Systems of Conservation Laws* (H. Freisthüler Ed.), Chapman & Hall/CRC, 1998, pp. 128-198.
- [34] O. OLEINIK, *On the uniqueness of the generalized solution of the Cauchy problem for a nonlinear system of equations occurring in mechanics*, Usp. Mat. Nauk., **12**, (1957), 169-176.
- [35] J. RAUCH, *BV estimates fail for most quasilinear hyperbolic systems in dimension greater than one*, Comm. Math. Phys., **106** (1986), 481-484.
- [36] N. H. RISEBRO, *A front-tracking alternative to the random choice method*, Proc. Amer. Math. Soc., **117** (1993), 1125-1139.
- [37] D. SERRE, *Systèmes de Lois de Conservation*, Diderot Editeur, 1996.
- [38] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [39] A. I. VOLPERT, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sbornik, **2** (1967), 225-267.

S.I.S.S.A., Trieste 34014, Italy