

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

AUGUSTO VISINTIN

## Transizioni di fase ed isteresi

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-B (2000),  
n.1, p. 31-77.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2000\\_8\\_3B\\_1\\_31\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3B_1_31_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Transizioni di fase ed isteresi.

AUGUSTO VISINTIN (\*)

L'attività di ricerca di chi scrive si è finora indirizzata principalmente verso l'esame dei modelli di transizione di fase, dei modelli di isteresi, e delle relative equazioni non lineari alle derivate parziali. Qui si illustrano brevemente tali problematiche, indicando alcuni degli elementi che le collegano tra di loro.

Il lavoro è organizzato come segue. I paragrafi 1, 2, 3 vertono sulle transizioni di fase: si introducono le formulazioni forte e debole del classico modello di Stefan, e si illustrano alcune generalizzazioni motivate fisicamente. Nei paragrafi 4, 5, 6 si definisce il concetto di operatore di isteresi, si forniscono alcuni esempi, e si discutono alcune equazioni alle derivate parziali in cui figurano tali operatori. Le due parti sono presentate in modo da consentirne una lettura indipendente.

### 1. – Il problema di Stefan.

Le transizioni di fase si presentano in numerosi fenomeni di interesse applicativo: processi di fusione, solidificazione, evaporazione, sublimazione, la crescita di singoli cristalli, la saldatura termica, il congelamento del suolo, il surgelamento dei cibi, ecc..

La transizione solido-liquido (e liquido-solido) è l'esempio canonico. Il corrispondente classico modello matematico, noto come *problema di Stefan*, rappresenta l'evoluzione delle fasi e della temperatura, tenendo conto solo dello scambio di calore latente e della diffusione termica. Dal momento che l'evoluzione dell'interfaccia tra le fasi non è nota a priori, si tratta di un *problema di frontiera libera*; quest'ultima problematica ha visto un notevole sviluppo negli ultimi decenni, grazie ad una proficua interazione tra matematici, fisici, ingegneri ed altri scienziati applicativi. Il quadro fisico considerato è estremamente semplificato, e quindi si presta a diverse generalizzazioni. La letteratura al riguardo è sterminata, e variamente ispirata da motivazioni fisiche e/o matematiche. Nondimeno molto resta ancora da fare, soprattutto per il

(\*) Conferenza tenuta a Napoli il 15 settembre 1999 in occasione del XVI Congresso U.M.I.

matematico disposto ad affrontare anche gli aspetti fisici del problema (conscio dei rischi anche accademici che l'interdisciplinarietà può comportare ...).

Questa presentazione è basata sulla monografia [19] e sull'articolo di rassegna [35] (apparso congiuntamente ai lavori [25, 27, 34]). In bibliografia sono indicate diverse altre opere a carattere introduttivo, tra cui le redazioni delle conferenze U.M.I. di Primicerio [31] e Fasano [24].

DEFINIZIONI PRELIMINARI. – Intendiamo studiare l'evoluzione termica di un sistema composto da un materiale omogeneo ed isotropo, suscettibile di presentarsi in due fasi, liquida e solida ad esempio. Denotiamo con  $\Omega$  un dominio limitato dello spazio tridimensionale euclideo occupato dal materiale e, fissata una costante  $T > 0$ , poniamo  $Q := \Omega \times ]0, T[$ . Useremo le seguenti notazioni, in cui quantità relative alla fase liquida e solida sono rispettivamente contrassegnate dagli indici 1 e 2:

$Q_i$ : sottoinsieme aperto di  $Q$  corrispondente alla fase  $i$ ,

$S := \partial Q_1 \cap \partial Q_2$ : varietà spazio-temporale tridimensionale (non necessariamente connessa) rappresentante l'evoluzione dell'interfaccia tra le fasi,

$S_t := S \cap (\Omega \times \{t\})$ : configurazione dell'interfaccia ad un generico istante  $t \in [0, T]$ ,

$u$ : energia interna per unità di volume,

$\theta$ : temperatura relativa (o semplicemente *temperatura*), ovvero differenza tra la temperatura assoluta  $\tau$  ed il valore di equilibrio  $\tau_E$  per una interfaccia piana,

$\vec{q}$ : flusso termico per unità di superficie,

$C_{V_i}(\theta) := \partial u / \partial \theta$ : capacità termica per unità di volume della fase  $i$ ,

$k_i(\theta)$ : conduttività termica della fase  $i$ ,

$L(\theta)$ : calore latente di transizione di fase per unità di volume, ovvero calore necessario per sciogliere un volume unitario di cristallo,

$g$ : calore per unità di volume prodotto o assorbito da una sorgente o pozzo termico distribuiti nello spazio.

BILANCIO DELL'ENERGIA. – Supponiamo che il solido inizialmente presente e quello formatosi durante il processo si presentino solo in forma cristallina, ovvero non contengano calore latente. Trascuriamo la convezione, ed assumiamo che entrambi le fasi siano incompressibili, in modo da poter supporre che il processo avvenga a volume costante<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> È più agevole mantenere costante la pressione piuttosto che il volume. Comunque ciò comporta solo alcune modifiche terminologiche; ad esempio in tal caso si parla di *entalpia* piuttosto che di energia interna.

In ciascuna fase il bilancio dell'energia fornisce l'equazione

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + g \quad \text{in } Q_i.$$

Grazie alla classica legge di Fourier,  $\vec{q} = -k_i(\theta) \nabla \theta$  in  $Q_i$ , otteniamo allora l'equazione del calore

$$(1.2) \quad C_{Vi}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot [k_i(\theta) \nabla \theta] = g \quad \text{in } Q_i \quad (i = 1, 2).$$

LA CONDIZIONE DI STEFAN. – Si suppone che la temperatura  $\theta$  sia continua attraverso  $S$ . Assumendo che  $S$  sia di classe  $C^1$ , denotiamo con  $\vec{\nu} \in \mathbf{R}^3$  un campo di modulo unitario normale a  $S_i$  ed orientato verso la fase solida, e con  $\vec{q}_1$  ( $\vec{q}_2$ , risp.) il flusso di calore per unità di superficie fornito dalla fase liquida (assorbito da quella solida, risp.) attraverso  $S_i$ .

Ad esempio si assuma che in un piccolo intervallo di tempo  $dt$  un elemento di interfaccia di area  $dS$  avanzi con velocità normale  $\mathbf{v}$  attraverso la fase solida. Tale processo di fusione trasforma il flusso termico netto assorbito per conduzione all'interfaccia in una quantità di calore latente proporzionale al volume spazzato da  $dS$  in  $dt$ . Pertanto  $(\vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} - \vec{q}_2 \cdot \vec{\nu}) dS = L(\theta) \mathbf{v} \cdot \vec{\nu} dS$ . La stessa uguaglianza vale anche in caso di solidificazione. La legge di Fourier fornisce quindi la classica *condizione di Stefan*

$$(1.3) \quad k_1(\theta) \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu} - k_2(\theta) \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu} = -L(\theta) \mathbf{v} \cdot \vec{\nu} \quad \text{su } S,$$

ove con  $\partial \theta_i / \partial \nu$  si denota la derivata normale di  $\theta$  relativa alla fase  $i$ .

EQUILIBRIO TERMODINAMICO LOCALE. – Sebbene l'equazione del calore rappresenti una situazione di non equilibrio, qui assumiamo condizioni di equilibrio termodinamico *locale*, ovvero richiediamo che in un intorno di ogni punto il sistema sia prossimo all'equilibrio. Questo ci permette di applicare le relazioni costitutive proprie degli stati di equilibrio.

Per il momento trascuriamo effetti di tensione superficiale; minimizzando l'energia libera del sistema si può ricavare la seguente condizione sull'interfaccia:

$$(1.4) \quad \theta = 0 \quad \text{su } S.$$

In (1.3) possiamo quindi sostituire  $L(\theta)$  con  $L(0)$  e  $k_i(\theta)$  con  $k_i(0)$  ( $i = 1, 2$ ).

L'evoluzione della interfaccia solido-liquido non è nota a priori. Questa mancanza di informazione è compensata dalle presenza di *due* condizioni quantitative su  $S$ , (1.3) e (1.4). Il valore iniziale di  $\theta$  e la configurazione iniziale delle fasi de-

vono essere fornite, insieme ad opportune condizioni per  $\theta$  sulla frontiera fissa  $\Gamma = \partial\Omega$ . Ad esempio, data una partizione  $\{\Gamma', \Gamma''\}$  di  $\Gamma$ , si può prescrivere  $\theta$  su  $\Gamma' \times ]0, T[$  e  $\partial\theta/\partial\nu$  su  $\Gamma'' \times ]0, T[$ . A titolo di esempio consideriamo il seguente problema modello, sotto ipotesi naturali di regolarità sui dati.

**PROBLEMA 1.1.** – (*Formulazione Forte del Problema di Stefan Tridimensionale a Due Fasi*) Si trovino  $\theta \in C^0(\bar{Q})$  ed una partizione  $\{Q_1, Q_2, S\}$  of  $Q$  tali che:

- (i)  $Q_1$  e  $Q_2$  sono insiemi aperti;
- (ii)  $S$  è una varietà tridimensionale di classe  $C^1$ , ed  $S_t := S \cap (\Omega \times \{t\})$  è una varietà bidimensionale (non necessariamente connessa ed eventualmente vuota) per ogni  $t \in ]0, T[$ ;
- (iii)  $\theta$  è di classe  $C^2$  rispetto ad  $x$  e di classe  $C^1$  rispetto a  $t$  in  $Q_1$  ed in  $Q_2$ , e  $\partial\theta/\partial\nu$  esiste da ambo i lati di  $S_t$  per ogni  $t \in ]0, T[$ ;
- (iv) le equazioni (1.2), (1.3), (1.4) sono soddisfatte;
- (v)  $\partial\theta/\partial\nu$  (esiste ed) è prescritta su  $\Gamma'' \times ]0, T[$ ;
- (vi)  $\theta$  è prescritta su  $\Omega \times \{0\}$  e su  $\Gamma' \times ]0, T[$ ;
- (vii) l'interfaccia iniziale  $S_0$  è prescritta.

Con terminologia poco felice ma invalsa nell'uso, si parla di problema di Stefan ad una fase quando la temperatura è identicamente nulla in una delle due fasi.

Il Problema 1.1 può essere formulato anche in presenza di regioni *sottoraffreddate* o *superriscaldare*, rispettivamente caratterizzate da liquido a  $\theta < 0$  e solido a  $\theta > 0$ . Grazie al principio del minimo e del massimo, assumendo ovvie condizioni sul segno della temperatura iniziale ed al bordo si può escludere la formazione di tali stati *metastabili*.

**PROBLEMA DI STEFAN UNIDIMENSIONALE.** – Sia ora  $\Omega := ]a, b[$ ,  $a < s^0 < b$ , e si assuma che  $]a, s^0[$  ( $]s^0, b[$ , risp.) rappresenti la fase solida (liquida, risp.) a  $t = 0$ . Se si esclude la formazione di nuove fasi, l'interfaccia  $S$  coincide con il grafico di una funzione  $s : ]0, T[ \rightarrow ]a, b[$  tale che  $s(0) = s^0$ . Pertanto  $x > s(t)$  in  $Q_1$  e  $x < s(t)$  in  $Q_2$ . Si assuma anche che

$$\begin{aligned}
 & C_{V_i} \in C^0(\mathbf{R}), \quad k_i \in C^1(\mathbf{R}), \quad C_{V_i}, k_i > 0 \quad (i = 1, 2), \\
 (1.5) \quad & g \in C^0(\bar{Q}), \quad \theta_a, \theta_b \in C^0([0, T]), \quad \theta_a \leq 0, \quad \theta_b \geq 0, \\
 & \theta^0 \in C^0([a, b]), \quad \theta^0 \leq 0 \quad \text{in } ]a, s^0[, \quad \theta^0 \geq 0 \quad \text{in } ]s^0, b[.
 \end{aligned}$$

Le equazioni precedenti abbinate con naturali condizioni iniziali ed al bordo forniscono il seguente problema, cf. Fig. 1.

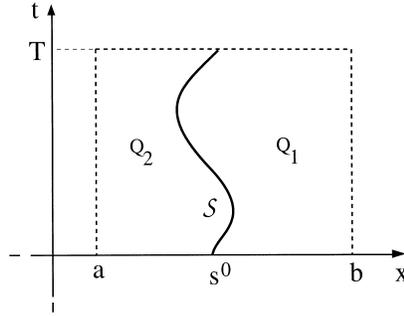


Figure 1. – Problema di Stefan unidimensionale.

PROBLEMA 1.2. – (Formulazione Forte del Problema di Stefan Unidimensionale a Due Fasi) Si trovino  $\theta \in C^0(\bar{Q})$  e  $s \in C^0([0, T]) \cap C^1(]0, T[)$  tali che, posto

$$Q_1 := \{(x, t) \in Q : x > s(t)\}, \quad Q_2 := \{(x, t) \in Q : x < s(t)\},$$

sia  $\partial\theta/\partial t, \partial^2\theta/\partial x^2 \in C^0(Q_i)$  ( $i = 1, 2$ ), i limiti  $[k_i(\theta) \partial\theta/\partial x](s(t) \pm 0, t)$  esistano per ogni  $t \in ]0, T[$ , e

$$(1.6) \quad C_{Vi}(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) = g \quad \text{in } Q_i \quad (i = 1, 2),$$

$$(1.7) \quad \left( k_1(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) (s(t) + 0, t) - \left( k_2(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) (s(t) - 0, t) = -L(\theta) \frac{ds}{dt}(t)$$

per  $0 < t < T$ ,

$$(1.8) \quad \theta(s(t), t) = 0 \quad \text{per } 0 < t < T,$$

$$(1.9) \quad \theta(a, t) = \theta_a(t), \quad \theta(b, t) = \theta_b(t) \quad \text{per } 0 < t < T,$$

$$(1.10) \quad s(0) = s^0, \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x) \quad \text{per } a < x < b.$$

A causa del segno dei dati al bordo, la formazione di stati metastabili è qui esclusa.

NOTA STORICA CIRCA IL PROBLEMA UNIDIMENSIONALE. – Il classico modello delle transizioni di fase deve il suo nome al fisico austriaco Josef Stefan, che nel 1889 propose il problema unidimensionale per descrivere la fusione delle calotte polari [104]. Tuttavia l'archeologia delle transizioni di fase retrodata il modello al 1831, attribuendolo a Lamé e Clayperon [91]. In quest'ultimo lavoro il problema è in effetti enunciato con chiarezza, e viene proposta

la classe di soluzioni autosimilari, ritrovate successivamente da Franz Neumann almeno trent'anni prima dei lavori di Stefan [166; p. 182].

Nel 1947, Rubinstein [99] dimostrò l'esistenza e l'unicità della soluzione per tempi piccoli per il problema di Stefan unidimensionale a due fasi, riformulando il problema mediante un sistema di equazioni integrali. Sembra che questo sia stato il primo risultato di esistenza di una soluzione del problema di Stefan in una classe funzionale.

Altre formulazioni del problema di Stefan unidimensionale furono quindi proposte da diversi autori: G. W. Evans [70], Sestini [102] (pioniere della ricerca sul problema di Stefan in Italia), Friedman [79], Kolodner [90], Jiang [86], ecc. Si dimostrò la buona posizione del problema mediante vari procedimenti, unitamente a risultati di approssimazione, di regolarità, informazioni sull'andamento asintotico, ed altre proprietà; ad esempio si vedano Cannon e Hill [62], Friedman [80; Chap. 8], [81], [82], [83], Fasano e Primicerio [71], [72], Schaeffer [101], Fasano, Primicerio e Kamin [77], e Rubinstein, Fasano e Primicerio [100]. Diverse generalizzazioni del problema furono pure studiate, sempre nel caso unidimensionale; ad esempio si veda Fasano e Primicerio [72] per un risultato alquanto generale.

## 2. – Formulazione debole.

In generale il Problema 1.1 è mal posto in un intervallo temporale prescritto. La sua soluzione può non essere unica: ad esempio, se alla temperatura è imposto un valore negativo su una parte della frontiera fissa in contatto con la fase liquida, tale modello consente sia il superraffreddamento del liquido che la nucleazione di una fase solida<sup>(2)</sup>.

Sotto ipotesi naturali si può dimostrare che una soluzione esiste per tempi piccoli. Tuttavia la soluzione del Problema 1.1 può venir meno in tempo finito, in quanto la regolarità richiesta per l'evoluzione dell'interfaccia non è compatibile con le discontinuità che potrebbero svilupparsi nell'evoluzione della stessa.

REGIONE MUSHY E MODELLO A DUE SCALE In vista dell'introduzione di una formulazione debole, definiamo la *funzione di fase*

$$(2.1) \quad \chi := 1 \quad \text{in } Q_1, \quad \chi := -1 \quad \text{in } Q_2.$$

Lasciamo quindi cadere la condizione che le fasi siano separate da una superficie  $S$ , e consentiamo a  $\chi$  di assumere valori intermedi tra  $-1$  e  $1$ .

Ciò può essere interpretato secondo il seguente *modello a due scale*. Si assume che su una scala di lunghezze *mesoscopica* (ovvero, una scala intermedia tra

<sup>(2)</sup> Per *nucleazione* si intende la formazione di una componente connessa di solido (liquido, risp.) all'interno di una fase liquida (solida, risp.).

quella degli esperimenti di laboratorio e quella dei fenomeni molecolari) in ogni punto si possa presentare solo la fase liquida o solo quella solida, ovvero  $\chi = \pm 1$ . Comunque non si esclude che su scala macroscopica possano formarsi anche dei fini miscugli solido-liquido. Un insieme in cui ciò accada è detto *regione mushy*, ed è caratterizzato da  $-1 < \chi < 1$ ; questo corrisponde ad una concentrazione di liquido pari a  $(1/2)(\chi + 1) \in ]0, 1[$ . Ad esempio ciò può verificarsi in presenza di una sorgente termica distribuita spazialmente. Naturalmente può anche darsi il caso di una regione mushy preesistente all'istante iniziale.

EQUAZIONE NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI. – Definiamo  $C_V(\theta, \chi)$  e  $k(\theta, \chi)$  come segue:

$$(2.2) \quad \begin{cases} C_V(\theta, \chi) := C_{V1}(\theta) \frac{1+\chi}{2} + C_{V2}(\theta) \frac{1-\chi}{2}, \\ k(\theta, \chi) := k_1(\theta) \frac{1+\chi}{2} + k_2(\theta) \frac{1-\chi}{2} \quad \forall \theta \in \mathbf{R}, \forall \chi \in [-1, 1]. \end{cases}$$

(È irrilevante come queste funzioni sono definite per  $-1 < \chi < 1$ , poiché le regioni mushy sono isoterme, e quindi non possono essere sede di un flusso termico.)

PROPOSITION 2. – 1. – *Si definisca  $\chi$  come in (2.1). Se  $\theta$  è continuo attraverso  $S$ , allora il sistema (1.2), (1.3) implica l'equazione*

$$(2.3) \quad C_V(\theta, \chi) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{L(\theta)}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \nabla \cdot [k(\theta, \chi) \nabla \theta] = g \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q).$$

*In ipotesi di regolarità vale anche il viceversa.*

In termini intuitivi, sull'interfaccia la misura del tipo di Dirac dovuta alla discontinuità di  $\chi$  e quella dovuta alla discontinuità del flusso di calore si compensano.

BILANCIO GLOBALE DELL'ENERGIA. – Piuttosto che riportare la dimostrazione del risultato precedente, preferiamo derivare la formulazione debole (2.3) direttamente da principi fisici. Pertanto prescindiamo dalla formulazione forte, non assumiamo alcuna regolarità per la frontiera libera  $S$ , e consentiamo addirittura la presenza di una regione mushy.

Supponiamo che la densità di energia interna  $u$  sia una funzione differenziabile nota delle variabili di stato  $\theta$  e  $\chi$ ,  $u = \hat{u}(\theta, \chi)$ , caratteristica del materiale. Pertanto  $u(x, t) = \hat{u}(\theta(x, t), \chi(x, t))$  in  $Q$ . Ponendo  $C_V := \partial \hat{u} / \partial \theta$  e  $L := 2 \partial \hat{u} / \partial \chi$

(il fattore 2 è dovuto al fatto che  $\chi = \pm 1$ ), per ogni processo a volume costante si ha

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = C_V(\theta, \chi) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{L(\theta, \chi)}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \text{in } \mathcal{O}'(Q).$$

In presenza di interfacce, la legge di bilancio dell'energia varrà solo nel senso delle distribuzioni:

$$(2.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = g \quad \text{in } \mathcal{O}'(Q).$$

Queste equazioni e la legge di conduzione di Fourier forniscono (qui con  $L(\theta, \chi)$  al posto di  $L(\theta)$ ).

RELAZIONE FASE-TEMPERATURA. – In assenza di sorgenti termiche interne (ovvero per  $g \equiv 0$ ), assumendo ovvie condizioni di segno per i dati iniziali ed al bordo, per il principio del massimo (1.2) e (1.4) forniscono la nota condizione di equilibrio tra fase e temperatura:  $\theta \geq 0$  in  $Q_1$ ,  $\theta \leq 0$  in  $Q_2$ . Ponendo

$$(2.6) \quad \text{sign}(v) := \{-1\} \text{ se } v < 0, \text{ sign}(0) := [-1, 1], \text{ sign}(v) := \{1\} \text{ se } v > 0,$$

si ha quindi

$$(2.7) \quad \chi \in \text{sign}(\theta) \quad \text{in } Q.$$

Pertanto *sottoraffreddamento* e *superriscaldamento* sono qui esclusi, e nuove fasi possono essere nucleate.

Il sistema (2.3), (2.7) deve essere accoppiato con una condizione iniziale per  $u$  ed opportune condizioni al bordo per  $\theta$ . Ciò costituisce la *formulazione debole* del problema di Stefan in più dimensioni spaziali.

RIFORMULAZIONE DEL PROBLEMA. – A causa della (2.7), le transizioni di fase possono avvenire solo a temperatura nulla. Quindi nella (2.3) possiamo sostituire  $L(\theta)$  con  $L(0)$ , e la *trasformazione di Kirchhoff*

$$(2.8) \quad \varphi(\xi) := \int_0^\xi C_V(\eta, \text{sign}(\eta)) d\eta, \quad \psi(\xi) := \int_0^\xi k(\eta, \text{sign}(\eta)) d\eta \quad \forall \xi \in \mathbf{R}$$

permette di riscrivere la (2.3) stessa nella forma

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\theta) + \frac{L(0)}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \Delta \psi(\theta) = g \quad \text{in } \mathcal{O}'(Q).$$

Si noti che la  $\varphi$  e la  $\psi$  sono invertibili, poiché  $C_V > 0$  e  $k > 0$ , e  $\text{sign}(\theta) =$

$\text{sign}(\psi(\theta))$ . Posto  $\tilde{\theta} := \psi(\theta)$ , il sistema (2.7), (2.9) è allora equivalente a

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{\theta} = g & \text{in } \mathcal{D}'(Q), \\ \tilde{u} \in \alpha(\tilde{\theta}) := \varphi(\psi^{-1}(\tilde{\theta})) + \frac{L(0)}{2} \text{sign}(\tilde{\theta}) & \text{in } Q. \end{cases}$$

Tale sistema sarà quindi abbinato ad una condizione iniziale per  $\tilde{u}$  ed una condizione al bordo per  $\tilde{\theta}$ . (Nel seguito la tilda verrà omissa.)

PROBLEMA DI HELE-SHAW. – Se la capacità termica  $C_V$  è molto piccola, in ciascuna fase si può sostituire l'equazione del calore con la corrispondente equazione quasi stazionaria

$$(2.11) \quad -\nabla \cdot [k(\theta, \chi) \nabla \theta] = g \quad \text{in } Q_i \quad (i = 1, 2).$$

Nella formulazione debole (2.3) è allora sostituita da

$$(2.12) \quad \frac{L(\theta)}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \nabla \cdot [k(\theta, \chi) \nabla \theta] = g \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q).$$

Come condizione iniziale qui occorre prescrivere  $\chi(\cdot, 0)$  in  $\Omega$ .

In due dimensioni di spazio questo problema rappresenta l'evoluzione di una *cella di Hele-Shaw*; questa consiste in due piatti paralleli ravvicinati, che delimitano una regione parzialmente riempita con un fluido viscoso. Se si inietta altro fluido nella cella mediante una siringa, il fluido ovviamente si espande; l'evoluzione della pressione può essere allora rappresentata dalla (2.12). Lo stesso modello può descrivere il processo industriale di deposizione elettrolitica, con cui un corpo metallico è eroso o formato all'anodo di una cella elettrolitica.

CONFRONTO TRA FORMULAZIONI FORTE E DEBOLE. – Malgrado la terminologia, in generale la formulazione forte del problema di Stefan (P.S.F.) e quella debole (P.S.D.) non rappresentano lo stesso modello fisico. In particolare nella prima si assume che le fasi siano separate da un'interfaccia regolare, mentre per la seconda non si suppone nemmeno l'esistenza di tale interfaccia. Le due formulazioni (ma a questo punto si può ben parlare di due *problemi*) differiscono anche nella caratterizzazione delle fasi: nel P.S.F. le fasi sono individuate *globalmente* dall'interfaccia, mentre nel P.S.D. esse sono caratterizzate *puntualmente* dal segno della temperatura.

La soluzione del P.S.F. può esibire sottoraffreddamento e superriscaldamento, ma non regioni mushy; per contro il P.S.D. è compatibile con regioni mushy, ma non con stati metastabili; cf. Tavola 1. Il P.S.F. può essere derivato dal P.S.D. se la metastabilità è esclusa; sotto ipotesi di regolarità ed in assenza

di regione mushy, vale anche il vivversa. Questo pone almeno due questioni circa l'eventuale generalizzazione delle formulazioni precedenti:

(i) si può rendere conto di regioni mushy nel P.S.F.?

(ii) è possibile includere sottoraffreddamento e superriscaldamento nel P.S.D.?

La prima questione conduce alla formulazione di un problema a tre fasi: solido, liquido e regione mushy. La seconda questione è cruciale per diverse estensioni fisicamente motivate del modello di Stefan.

TAVOLA 1. *Confronto schematico tra le formulazioni forte e debole del problema di Stefan.*

	Formulazione forte	Formulazione debole
Bilancio dell'energia	Equazione del calore Condizione di Stefan su $S$	Equazione di $\mathcal{D}'(Q)$
Condiz. di equilibrio locale	$\theta = 0$ su $S$	$\chi \in \text{sign}(\theta)$ in $Q$
Caratterizzazione delle fasi	Globale, via $S$	Locale, via $\text{sign}(\theta)$
Regioni mushy	Escluse	Permesse
Stati metastabili	Permessi	Esclusi
Aspetti analitici	Problema di frontiera libera	P.D.E. degenerare

La scelta tra P.S.F. e P.S.D. dipende dal comportamento del materiale per quanto riguarda la nucleazione della fase solida. Schematicamente si può distinguere quanto segue. Se la nucleazione non richiede un apprezzabile superaffreddamento, allora si può formare una regione mushy, come descritto dal P.S.D.. D'altra parte, se la nucleazione avviene solo in seguito ad un certo superaffreddamento, allora la temperatura evolve secondo quanto prescritto dal P.S.F., fino a che non si abbia nucleazione. I due modelli rappresentano dei comportamenti estremi, e sono dettati da esigenze matematiche più che da considerazioni fisiche. Una rappresentazione più adeguata è ancora da venire, e non dovrebbe prescindere da un esame degli aspetti fisici della nucleazione.

NOTA STORICA CIRCA LA FORMULAZIONE DEBOLE. – La formulazione debole del problema di Stefan a due fasi fu proposta e studiata da Kamenomostskaya [87] e Oleïnik [96] intorno al 1960, e poi ripresa da Friedman [81], [82] e da altri. Si pose allora il problema della regolarità della soluzione debole in più dimensioni di spazio, dell'esistenza di una interfaccia tra le fasi e della sua regolarità.

Risultati sulla regolarità della frontiera libera furono ottenuti da Friedman e Kinderlehrer [84] e da Caffarelli [58], [59] usando la formulazione in termini di

disequazione variazionale illustrata nella prossima sezione. Kinderlehrer e Nirenberg [88], [89] dimostrarono che, sotto opportune ipotesi, la soluzione debole è anche forte. La continuità della temperatura fu poi dimostrata da Caffarelli e Friedman [61] per il problema ad una fase, e quindi da DiBenedetto [64], [65], Ziemer [108], Caffarelli e L. C. Evans [60] per quello a due fasi.

Nel 1979 Meirmanov [93], [94] dimostrò l'esistenza in piccolo della soluzione forte del problema a due fasi in più dimensioni spaziali. Le regioni mushy furono quindi studiate da Meirmanov [95], Primicerio [97], Showalter [103], ed altri. Berger e Rogers [56] dimostrarono che, in assenza di sorgenti distribuite, per il problema a coefficienti costanti non si ha formazione di regioni mushy. Sotto ipotesi naturali, Götz e Zaltzman [85] dimostrarono che le regioni mushy non si possono espandere. Altri risultati furono ottenuti da Fasano e Primicerio [73], [74], [75]; si veda ad esempio l'articolo di rassegna [23] di Fasano.

Studi più recenti sulla regolarità della soluzione del problema di Stefan e di problemi di evoluzione a frontiera libera più generali sono dovuti a DiBenedetto e Vespi [66], Athanassopoulos, Caffarelli e Salsa [50], [51], [52], ecc..

SULL'ANALISI DELLA FORMULAZIONE DEBOLE. – Assumiamo che

$$(2.13) \quad u^0 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^2(Q),$$

ed abbiniamo il sistema (2.10) alle seguenti condizioni iniziali ed al bordo

$$(2.14) \quad u = u^0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\}, \quad \theta = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times ]0, T[.$$

Nell'ambito degli spazi di Sobolev tale problema può essere formulato come segue.

PROBLEMA 2.1. – *Si trovino  $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  ed  $u \in L^2(Q)$  tali che*

$$(2.15) \quad \int_Q \int \left[ (u^0 - u) \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \theta \cdot \nabla v - fv \right] dx dt = 0$$

$$\forall v \in H^1(Q) \text{ tale che } v = 0 \text{ su } (\partial\Omega \times ]0, T[) \cup (\Omega \times \{0\}),$$

$$(2.16) \quad u \in \alpha(\theta) \quad \text{q.d. in } Q.$$

Poiché  $\alpha$  è un grafico massimale monotono, una teoria standard può essere applicata allo studio di questo problema; per es. cf. Brézis [164]. Ad esempio si può approssimare il problema con uno schema di discretizzazione temporale di tipo implicito. Ad ogni passo temporale il problema approssimato è equivalente alla minimizzazione di un funzionale coercivo, convesso e semicontinuo inferiormente, e pertanto ha soluzione. Moltiplicando l'equazione approssimata per la sua soluzione, si possono facilmente derivare stime a priori in spazi di Sobolev hilbertiani; tali maggiorazioni permettono di passare al limite per una sottosuc-

cessione, mediante tecniche di compattezza e monotonia. Risultati di regolarità possono essere ottenuti, ad esempio moltiplicando l'equazione approssimata per il rapporto incrementale nel tempo della soluzione.

A titolo di esempio, forniamo qui un enunciato semplificato.

**THEOREM 2.2.** – *Si assuma che valga la (2.13) e che*

$$(2.17) \quad \exists L, M > 0 : \forall (\theta, u) \in \text{graph}(\alpha), |u| \leq L|\theta| + M,$$

$$(2.18) \quad B(u^0) \in L^1(\Omega) \quad (\text{posto } B' := \alpha^{-1}).$$

Allora il Problema 2.1 ha una ed una sola soluzione, e  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .

Se inoltre

$$(2.19) \quad \exists c > 0 : \forall (\theta_i, u_i) \in \text{graph}(\alpha) \quad (i=1, 2), \quad (u_1 - u_2)(\theta_1 - \theta_2) \geq c(\theta_1 - \theta_2)^2,$$

$$(2.20) \quad \alpha^{-1}(u^0) \in H_0^1(\Omega),$$

allora

$$(2.21) \quad \theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

**TECNICHE DI TIPO  $L^1$  e semigrupp.** – Moltiplicando l'equazione approssimata per il segno del rapporto incrementale nel tempo della soluzione, si possono anche derivare stime di tipo  $L^1$ . Principi del massimo e del minimo possono pure essere facilmente dimostrati.

Poiché  $\alpha$  è non lineare, l'operatore  $A : v \mapsto -\Delta \alpha^{-1}(v)$  non è monotono in  $L^2(\Omega)$ . Nondimeno all'equazione (2.3) si può applicare l'operatore  $-\Delta^{-1}$  (associato alla condizione di Dirichlet omogenea sul bordo), e quindi sfruttare la monotonia massimale di  $\alpha$ . Questo equivale a considerare  $A$  come un operatore monotono massimale tra  $H^{-1}(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$ , cf. Brézis [57], ovvero ad assumere  $H^{-1}(\Omega)$  come *spazio pivot*, cf. Lions [170; Sect. 2.3].

L'operatore  $A$  è anche *m-accretivo* in  $L^1(\Omega)$ . Questo permette di applicare la teoria dei *semigrupp di contrazioni non lineari*, per es. cf. Brézis [164] Barbu [161] e Bénéilan [162].

**TRASFORMAZIONE DI BAIOCCHI-DUVAUT-FREMOND.** – In diversi problemi parabolici l'integrazione temporale gioca un ruolo simile all'inversione dell'operatore di Laplace  $\Delta$ . Questo suggerisce di porre

$$(2.22) \quad z(x, t) := \int_0^t \theta(x, \tau) d\tau, \quad G(x, t) := \int_0^t g(x, \tau) d\tau + u(x, 0) \quad \forall (x, t) \in Q,$$

e di scrivere il sistema (2.3), (2.7) nella forma equivalente

$$(2.23) \quad \begin{cases} C_V \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{L}{2} \chi - k \Delta z = G \\ \chi \in \text{sign} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \end{cases} \quad \text{in } Q.$$

Poiché il grafico  $\text{sign}$  è il *sottodifferenziale* della funzione valore assoluto, questo sistema è anche equivalente alla seguente *disequazione variazionale*:

$$(2.24) \quad \int_Q \int \left[ \left( C_V \frac{\partial z}{\partial t} - k \Delta z - G \right) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - v \right) + \frac{L}{2} \left( \left| \frac{\partial z}{\partial t} \right| - |v| \right) \right] dx dt \leq 0$$

$$\forall v: Q \rightarrow \mathbf{R}.$$

Accoppiando questa disequazione con la condizione iniziale « $z = 0$  in  $\Omega$ » e con opportune condizioni al bordo, si ottengono risultati simili a quelli sopra citati.

Consideriamo ora il problema ad una fase, in cui la temperatura è identicamente nulla nella fase solida ad esempio. Se  $g \geq 0$  in  $Q$  ed i dati iniziali ed al bordo soddisfano ovvie condizioni di segno, la solidificazione è esclusa e si ha  $\partial z / \partial t = \theta > 0$  in  $Q_1$ ,  $\partial z / \partial t = \theta = 0$  in  $Q_2$ . Pertanto l'interfaccia evolve monotonicamente,  $z > 0$  in  $Q_1$  e  $z = 0$  in  $Q_2$ ; ovvero  $\chi \in \text{sign}(z)$  in  $Q$ . (2.23) è quindi equivalente al sistema

$$(2.25) \quad \begin{cases} C_V \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{L}{2} \chi - k \Delta z = G \\ \chi \in \text{sign}(z) \end{cases} \quad \text{in } Q,$$

che pure può essere scritto come una disequazione variazionale, e risulta ben posto negli spazi di Sobolev.

NOTA STORICA CIRCA LA TRASFORMAZIONE PER INTEGRAZIONE. – Questa trasformazione fu introdotta indipendentemente da Duvaut [68], [69] e Frémond [78]. Tale tecnica fu evidentemente ispirata dalla trasformazione per integrazione usata da Baiocchi [53] per risolvere un problema di frontiera libera rappresentante la filtrazione in un mezzo poroso, il celebre *problema della diga*; in proposito si veda anche Baiocchi e Capelo [54; Chap. 13].

### 3. – Generalizzazioni.

Come già osservato, fin qui abbiamo rappresentato le transizioni di fase in modo estremamente semplificato; in particolare abbiamo supposto che l'inter-

faccia fosse localmente in equilibrio termodinamico, ci siamo limitati a materiali puri, ed abbiamo trascurato la tensione superficiale. Rimuovendo queste restrizioni, la (1.4) viene ad essere sostituita da una condizione della forma

$$(3.1) \quad \theta = \theta_{\text{n.e.}} + \theta_{\text{imp.}} + \theta_{\text{s.t.}} \quad \text{su } S.$$

Il termine  $\theta_{\text{n.e.}}$  è legato al non equilibrio termodinamico dell'interfaccia, e dipende dalla velocità di transizione di fase;  $\theta_{\text{imp.}}$  è dovuto alla presenza di impurità, ovvero di componenti chimiche aggiuntive;  $\theta_{\text{s.t.}}$  rende conto della tensione superficiale, ed è proporzionale alla curvatura media dell'interfaccia. Discuteremo questi tre termini separatamente. Poiché la temperatura è continua, la (3.1) comporta sottoraffreddamento e/o superriscaldamento all'interno delle fasi; con questo viene meno la (2.7), e la formulazione debole del problema richiede radicali modifiche.

SOTTORAFFREDDAMENTO CINETICO E RILASSAMENTO DI FASE. – Contrariamente a quanto può far supporre la condizione di equilibrio (1.4), la transizione di fase è innescata da una deviazione della temperatura dell'interfaccia dal suo valore di equilibrio; come è facile comprendere, quanto maggiore è il sottoraffreddamento (superriscaldamento, risp.), tanto maggiore risulta la velocità di fusione (solidificazione, risp.). In tal modo si ha rilassamento verso l'equilibrio locale. Questo semplice principio può dar luogo a diverse forme di evoluzione delle fasi; qui ne illustreremo due esempi basilari.

(i) *Solidificazione direzionale* (o *sottoraffreddamento cinetico*). In un sistema unidimensionale sostituiamo la (1.8) con la *legge cinetica*

$$(3.2) \quad s'(t) + \gamma(\theta(s(t), t)) = 0;$$

cf. Fig. 2. La funzione  $\gamma$  dipende dal materiale, e si può assumere che sia continua e nulla in 0; in diversi casi essa è strettamente crescente.

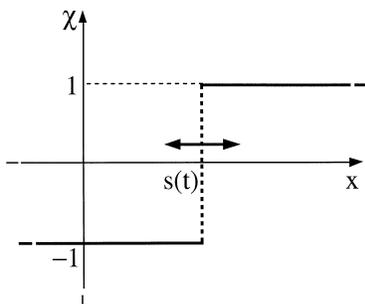


Figure 2. – Sottoraffreddamento cinetico per un sistema unidimensionale.

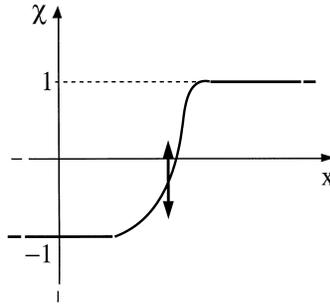


Figure 3. – Rilassamento di fase.

(ii) *Solidificazione equiasiale* (o *rilassamento di fase*). Senza vincoli sulla dimensione spaziale, sostituiamo la (2.7) con una condizione della forma

$$(3.3) \quad a \frac{\partial \chi}{\partial t} + \text{sign}^{-1}(\chi) \ni \gamma(\theta) \quad \text{in } Q,$$

ove  $a$  è una costante positivo; cf. Fig. 3. Questa inclusione è equivalente alla seguente disequazione variazionale:

$$(3.4) \quad \begin{cases} -1 \leq \chi \leq 1 & \text{in } Q, \\ \left( a \frac{\partial \chi}{\partial t} - \theta \right) (\chi - v) \leq 0 & \forall v \in [-1, 1], \text{ in } Q. \end{cases}$$

Se  $\gamma(\theta)$  ha lo stesso segno di  $\theta$ , allora per  $a \rightarrow 0$  la (3.2) e la (3.3) sono ridotte alle corrispondenti condizioni stazionarie (1.8) e (2.7).

Le denominazioni di *solidificazione direzionale* e *solidificazione equiasiale* sono mutate dalla metallurgia; quelle di *sottoraffreddamento cinetico* e *rilassamento di fase* sono più consuete tra i matematici. (Si fa riferimento al sottoraffreddamento perchè questo è di gran lunga più consueto e rilevante del superriscaldamento.)

Le equazioni (3.2) e (3.3) descrivono due ben diverse forme di evoluzione verso l'equilibrio termodinamico (locale). La (3.2) rappresenta il moto dell'interfaccia di separazione tra due fasi, mentre la (3.3) descrive la formazione ed evoluzione di regioni mushy. Esse sono rispettivamente associate alle formulazioni forte e debole del problema di Stefan.

Come si può ben immaginare, in generale le due modalità di transizione coesisteranno. Ad esempio in seguito alla colata di un metallo dapprima si ha nucleazione in prossimità delle pareti del contenitore, e delle colonne solide avanzano verso l'interno; questa solidificazione direzionale è accompagnata da nu-

cleazione della fase solida all'interno del liquido, e quindi da solidificazione equiassiale. I fronti così formati avanzano e coalescono, fino alla completa solidificazione.

Il processo di *vetrificazione* ben si inquadra nello schema qui delineato. Un vetro è un liquido sottoraffreddato che conserva gran parte del calore di transizione di fase. Il comportamento solido è causato dall'alta viscosità, che a sua volta è dovuta al sottoraffreddamento. Il processo può essere descritto da una legge della forma (3.2) o (3.3), con una funzione  $\gamma$  non monotona.

Per le referenze relative a questa problematica rinviamo a [19], [35].

Infine osserviamo che i problemi in cui la temperatura di transizione di fase è costante, ma che presentano regioni sottoraffreddate o superriscaldiate, possono avere soluzioni singolari. Casi limite per l'esistenza di soluzioni del problema unidimensionale sono stati evidenziati da Fasano e Primicerio [76], che hanno anche studiato la questione dell'insorgenza di singolarità e della eventuale prolungabilità delle soluzioni; in proposito si veda anche l'articolo di rassegna [25].

SISTEMI A PIÙ COMPONENTI. – Si consideri un materiale omogeneo costituito da due componenti; si supponga che, al di fuori di un intervallo critico di temperature, queste siano solubili una nell'altra in qualsiasi proporzione ed in entrambe le fasi. In questo caso la diffusione termica è accompagnata dalla diffusione delle due componenti, rappresentata dalla *legge di Fick* all'interno di ciascuna fase:

$$(3.5) \quad \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot [D_i(c) \nabla c] = 0 \quad \text{in } Q_i \ (i = 1, 2);$$

qui con  $c$  si è denotata la concentrazione di una delle due componenti, con  $D_i$  il coefficiente di diffusività della  $i$ -esima fase. Per la legge di conservazione della massa, sull'interfaccia si ha poi una condizione di salto per le concentrazioni:

$$(3.6) \quad D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial \nu} - D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial \nu} = (c_2 - c_1) \vec{v} \cdot \vec{\nu} \quad \text{su } S.$$

Questa condizione è analoga a quella di Stefan (1.3), poiché  $L$  è la differenza di energia interna tra le due fasi. Temperatura e valori limite delle concentrazioni sono poi legate da un'ulteriore condizione sull'interfaccia.

Per motivi di spazio non illustreremo oltre questo problema, che comunque è particolarmente rilevante per le applicazioni: infatti sono rari i casi pratici in cui il materiale non contenga impurità. Il problema risultante presenta alcune difficoltà analitiche, che possono essere ovviate riformulando il problema in base al secondo principio della termodinamica, ovvero muovendo dalla cosiddetta *termodinamica del non equilibrio*. Anche qui per le referenze rinviamo a [19], [35].

TENSIONE SUPERFICIALE. – Supponiamo che ad ogni istante  $t$  l'interfaccia  $S_t$  sia di classe  $C^2$ , denotiamo con  $\kappa$  la sua curvatura media (assunta positiva quando la solida è convessa), e sostituiamo la condizione (1.3) con la classica *legge di Gibbs-Thomson*:

$$(3.7) \quad \theta = - \frac{2\sigma\tau_E}{L} \kappa \quad \text{su } S;$$

qui  $\sigma$  è il coefficiente di tensione superficiale, supposto costante al pari della densità di calore latente  $L$ ; ricordiamo che  $\tau_E$  è la temperatura assoluta di equilibrio per una interfaccia piana.

Per l'acqua a pressione atmosferica a circa  $0^0\text{C}$ , si ha  $2\sigma\tau_E/L \approx 1.2 \times 10^{-5}$  cm K. Quindi il membro destro della (3.7) è significativo solo per raggi di curvatura dell'ordine di  $10^{-5}$  cm, ovvero su una scala *mesoscopica*. Nondimeno questo termine ha importanti effetti anche lontano dall'interfaccia tra solido e liquido; tra l'altro è responsabile del notevole sottoraffreddamento (persino dell'ordine delle centinaia di gradi!) che in opportune condizioni può essere necessario per la nucleazione solida.

Per ogni  $(x, t) \in S \cap (\Gamma \times ]0, T[)$ , denotiamo con  $\omega(x, t)$  l'angolo formato dalla normale a  $S_t$ , orientata verso la fase liquida  $\Omega_1(t)$ , con la normale esterna a  $\Omega$ . Imponiamo quindi la seguente condizione

$$(3.8) \quad \cos \omega = h \quad \text{su } S \cap (\Gamma \times ]0, T[),$$

ove  $h \in [-1, 1]$  dipende dal materiale con cui il sistema è in contatto. Le condizioni (3.7) e (3.8) sono ricavate minimizzando un'opportuna espressione dell'energia libera.

PROBLEMA 1.1. – (*Problema di Stefan con Tensione Superficiale*) Si trovino  $\theta \in C^0(\bar{Q})$  ed una partizione  $\{Q_1, Q_2, S\}$  di  $Q$  tali che

- (i)  $Q_1$  e  $Q_2$  sono insiemi aperti;
- (ii)  $S$  è una varietà tridimensionale di classe  $C^2$ , e  $S_t := S \cap (\Omega \times \{t\})$  è una varietà bidimensionale (non necessariamente connessa ed eventualmente vuota) per ogni  $t \in ]0, T[$ ;
- (iii)  $\theta$  è di classe  $C^2$  rispetto ad  $x$  e di classe  $C^1$  rispetto a  $t$  in  $Q_1$  ed in  $Q_2$ , e  $\partial\theta/\partial\nu$  esiste da ambo i lati di  $S_t$  per ogni  $t \in ]0, T[$ ;
- (iv) le equazioni (1.2), (1.3), (3.7) e (3.8) sono soddisfatte;
- (v)  $\partial\theta/\partial\nu$  (esiste ed) è prescritta su  $\Gamma'' \times ]0, T[$ ;
- (vi)  $\theta$  è prescritta su  $\Omega \times \{0\}$  e su  $\Gamma' \times ]0, T[$ ;
- (vii) l'interfaccia iniziale  $S_0$  è prescritta.

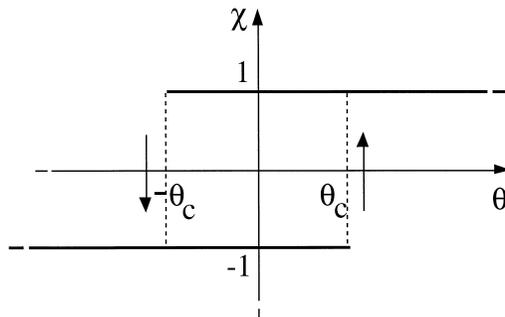


Figure 4. – Rappresentazione schematica del sottoraffreddamento e del superriscaldamento necessari per la nucleazione.

NUCLEAZIONE. – Per il momento trascuriamo la dipendenza da  $x$ , e poniamo  $\chi_{\pm}(t) := \chi(t \pm 0)$  per ogni  $t$ . Il fatto che la nucleazione solida (liquida, risp.) avvenga in seguito a sottoraffreddamento (superriscaldamento, risp.) è descritto schematicamente nella Fig. 4, ove per semplicità abbiamo supposto che le due soglie siano simmetriche. Questo comportamento può essere rappresentato mediante l'inclusione  $\chi_{+} \in \text{sign}(\theta + \alpha\chi_{-})$ , per ogni  $t$ , abbinata al vincolo  $|\chi| = 1$ . Questo modello può essere esteso inserendovi la dipendenza spaziale, e tenendo conto della tensione superficiale.

È evidente come la nucleazione sia un fenomeno di isteresi. Nel paragrafo 5 tratteremo da tale punto di vista un comportamento analogo a quello appena delineato; cf. Fig. 10 in particolare.

UN SISTEMA A SIMMETRIA RADIALE. – All'origine della multistabilità delineata nella Fig. 4 vi è la minimizzazione di un funzionale non convesso. Questo può essere compreso considerando un sistema a simmetria radiale, quale un liquido omogeneo ad una temperatura uniforme  $\theta < 0$  che occupa una palla  $\Omega$  di raggio  $\tilde{R}$ . La variazione di energia libera dovuta alla formazione di una palla solida di raggio  $R (\leq \tilde{R})$  concentrica ad  $\Omega$  può essere assunta della forma

$$(3.9) \quad F_{\theta}(R) = 4\pi\sigma R^2 + \frac{4\pi L\theta}{3\tau_E} R^3 \quad \forall R \in [0, \tilde{R}],$$

cf. Fig. 5. Si noti che  $F'_{\theta}(R_c) = 0$  per  $R_c := -2\sigma\tau_E/L\theta (> 0)$ .

La funzione  $F_{\theta}$  tende a decrescere. Se  $F_{\theta}(\tilde{R}) < 0$ , allora  $R = 0$  (corrispondente al sistema completamente liquido) rappresenta un punto di minimo relativo (non assoluto) per  $F_{\theta}$ , per ogni  $\theta < 0$ . Questo rende conto della possibilità di sottoraffreddare il liquido.

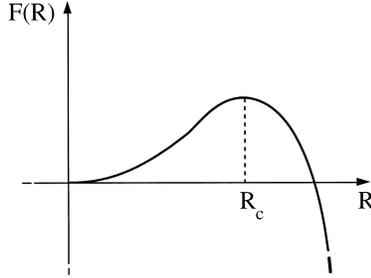


Figure 5. – Grafico della funzione  $F_\theta(R) := 4\pi\sigma R^2 + 4\pi L\theta R^3/3\tau_E$ , definita per  $R \geq 0$ .

A questo punto resta da spiegare come una certa temperatura possa intervenire la nucleazione. Questo in effetti è un fenomeno stocastico, dovuto alle fluttuazioni che possono portare il sistema a formare una palla solida di raggio  $R > R_c$ , la quale poi s'ingrandirà, fintantochè il calore liberato non avrà innalzato sufficientemente la temperatura. Pertanto una trattazione mesoscopica precisa della nucleazione può difficilmente prescindere da strumenti probabilistici.

D'altra parte, in base alla classica teoria di Volmer, Becker e Döring, esiste un piccolo intervallo di temperature  $]\theta_c - \varepsilon, \theta_c + \varepsilon[$  tale che la probabilità di nucleazione solida è molto bassa per  $\theta > \theta_c + \varepsilon$ , e molto alta per  $\theta < \theta_c - \varepsilon$ ; si vedano per es. Chalmers [3; Chap. 3], Christian [4; Chap. 10], Flemings [6; Chap. 9], Kurz e Fisher [7; Chap. 2], Woodruff [12; Chap. 2]. In prima approssimazione questo permette di assumere  $\theta_c$  come temperatura di nucleazione, e quindi di adottare un punto di vista deterministico.

Malgrado alcuni tentativi effettuati negli ultimi anni [105], [106], [107], il problema della formulazione di un modello mesoscopico delle transizioni di fase che renda conto della nucleazione e della diffusione del calore latente non si può ritenere risolto. In proposito si vedano anche [19], [35].

PROBLEMA DI STEFAN IPERBOLICO. – Per campi termici rapidamente variabili la legge di conduzione di Fourier  $\vec{q} = -k(\theta, \chi)\nabla\theta$  è sostituita dalla *legge di Maxwell-Cattaneo*

$$(3.10) \quad a \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -k(\theta, \chi) \nabla \theta \quad \text{in } Q,$$

ove  $a$  è una costante di rilassamento. In tal modo il sistema parabolico (2.10) è

sostituito da un sistema iperbolico quasi-lineare:

$$(3.11) \quad \begin{cases} a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nabla \cdot [k(\tilde{\theta}, \chi) \nabla \tilde{\theta}] = f & \text{in } \mathcal{O}'(Q), \\ \tilde{u} \in \alpha(\tilde{\theta}) & \text{in } Q. \end{cases}$$

Chi scrive non è a conoscenza di alcun risultato di esistenza per il corrispondente problema ai valori iniziali ed ai limiti. Tale problema presenta le difficoltà di un sistema iperbolico quasi-lineare, unite a quelle dovute alla discontinuità della relazione costitutiva (3.11)<sub>2</sub>.

UN PROBLEMA VETTORIALE DEL TIPO DI STEFAN. – I processi in materiali ferromagnetici in cui l'isteresi sia trascurabile presentano notevoli analogie con le transizioni di fase. Assumendo una relazione costitutiva lineare tra i campi  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$  (legge di Ohm) e trascurando la corrente di spostamento  $\partial \vec{D} / \partial t$ , le leggi di Maxwell forniscono le seguenti equazioni in unità di Gauss

$$(3.12) \quad 4\pi\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{H} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{in } Q;$$

qui  $c$  e  $\sigma$  rappresentano rispettivamente la velocità della luce nel vuoto e la conduttività elettrica.

Per materiali quali il ferro dolce si può assumere che i campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  siano legati da una relazione massimale monotona; ad esempio,

$$(3.13) \quad \vec{B} \in \vec{H} + 4\pi \mathcal{N} \vec{\beta}(\vec{H}) \quad \text{in } Q,$$

ove  $\mathcal{N}$  è una costante positiva e  $\vec{\beta}$  è il sottodifferenziale della funzione modulo (ovvia estensione vettoriale del grafico massimale monotono *sign*, cf. (2.6)):

$$(3.14) \quad \begin{cases} \vec{\beta}(\vec{v}) := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & \text{se } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ |\vec{\beta}(\vec{v})| \leq 1 & \text{se } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Le regioni caratterizzate da  $\vec{B} = \vec{0}$  e  $|\vec{B}| \geq 4\pi \mathcal{N}$  possono essere interpretate come due diverse fasi, rispettivamente non magnetizzata e magneticamente satura.

Il sistema (3.12) and (3.13) è la formulazione debole di un problema di frontiera libera vettoriale. Il metodo accennato nel paragrafo 2 permette di dimostrare che il corrispondente problema iniziale ed ai limiti è ben posto, cf. [63]. Tuttavia non è ovvio che le fasi siano effettivamente separate da una superficie: a priori non è esclusa l'esistenza di una *fase mista*, caratterizzata da  $0 < |\vec{B}| <$

$4\pi\mathcal{M}$  (una sorta di regione mushy magnetica). Sorprendentemente questo problema non ha ancora ricevuto l'attenzione che la sua rilevanza applicativa lascerebbe presumere.

Di notevole interesse sono pure i problemi di frontiera libera posti in teoria della *superconduttività*, di tipo I o di tipo II; cf. [21]. In particolare la relativa teoria di Landau-Ginzburg è stata oggetto di numerosi articoli negli ultimi anni.

OSSERVAZIONI FINALI SULLE TRANSIZIONI DI FASE. – Negli ultimi decenni il problema di Stefan e le sue generalizzazioni sono stati al centro di una ricerca imponente. Questo può essere in parte dovuto alla facilità con cui si formula il problema di Stefan, al suo combinare elementi analitici e geometrici, al suo suggestivo substrato fisico, alla sua rilevanza applicativa, al fatto di rappresentare il prototipo dei problemi evoluzioni a frontiera libera.

In particolare negli ultimi anni una particolare attenzione è stata rivolta a questioni riguardanti aspetti microstrutturali, sull'onda di una crescente collaborazione tra scienziati dei materiali e matematici. Comunque i modelli considerati sono alquanto semplificati, e riproducono solo in parte la varietà e la complessità fisica delle transizioni di fase; pertanto essi offrono ancora largo spazio sia alla ricerca fisico-matematica che a quella analitica, ... e ancor di più a quella interdisciplinare.

#### 4. – Isteresi.

COS'È L'ISTERESI? – L'isteresi si presenta in svariati fenomeni fisici: plasticità, ferromagnetismo, ferroelettricità, memoria di forma, sottoraffreddamento sono tra gli esempi più noti; essa compare anche in chimica, biologia, ingegneria, economia, ecc..

Per averne un'idea, si pensi ad una *scatola nera* che trasforma una funzione continua del tempo  $u$  in un'altra funzione continua del tempo  $w$ ; ad esempio nel ferromagnetismo  $u = H$  e  $w = B$ . In Fig. 6 è rappresentato schematicamente il caso scalare. Se  $u$  cresce da  $u_A$  a  $u_C$ , la coppia  $(u, w)$  si muove lungo la curva  $ABC$ ; se poi  $u$  decresce da  $u_C$  a  $u_A$ ,  $(u, w)$  si muove lungo la curva  $CDA$ . Se  $u$  inverte il senso del suo moto quando  $u_A < u(t) < u_C$ , allora  $(u, w)$  entra nella regione  $\mathcal{L}$  delimitata da  $ABCD$ , e si muove lungo una curva che prescritta dallo specifico modello di isteresi.

Ad ogni istante  $t$  in un intervallo  $[0, T]$ ,  $w(t)$  dipende dall'evoluzione precedente di  $u$  (*effetto di memoria*) e dallo stato iniziale del sistema. Questo conduce a formulare una relazione della forma

$$(4.1) \quad w(t) = [\mathcal{F}(u, w^0)](t) \quad \forall t \in [0, T].$$

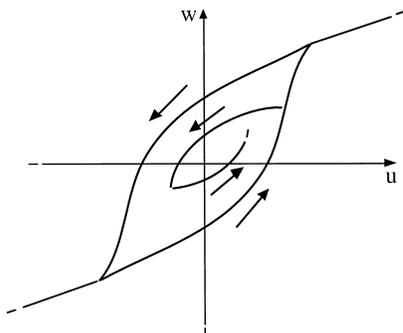


Figure 6. – Un tipico ciclo di isteresi.

Per ogni  $w^0$  fissato, si assume che  $\mathcal{F}(\cdot, w^0)$  operatori tra spazi di funzioni del tempo, che sia  $(u(0), w^0) \in \mathcal{L}$ , e  $[\mathcal{F}(u, w^0)](0) = w^0$ . Non escluderemo che  $\mathcal{F}$  possa essere ridotto alla composizione con una funzione assegnata. Il minimo requisito è che  $\mathcal{F}$  sia *causale*:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \forall u_1, u_2 \in \text{Dom}(\mathcal{F}), \forall t \in [0, T], \\ \text{se } u_1 = u_2 \text{ in } [0, t] \text{ allora } [\mathcal{F}(u_1, w^0)](t) = [\mathcal{F}(u_2, w^0)](t); \end{cases}$$

questo ovviamente esclude che  $[\mathcal{F}(u, w^0)](t)$  possa dipendere da  $u|_{[t, T]}$ .  $\mathcal{F}$  è allora detto un *operatore di memoria* (o con memoria).

In (4.1) si è implicitamente assunto che la coppia  $(u(0), w^0)$  caratterizzi lo stato iniziale del sistema. In modelli più raffinati lo stato invece dipende da variabili interne, il cui valore iniziale deve allora essere specificato.

INDIPENDENZA DALLA VELOCITÀ. – Il fenomeno che noi denominiamo *isteresi* è caratterizzato dalla invarianza del percorso della coppia  $(u(t), w(t))$  rispetto ad ogni omeomorfismo crescente  $\varphi: [0, T] \rightarrow [0, T]$ , ovvero

$$(4.3) \quad \mathcal{F}(u \circ \varphi, w^0) = \mathcal{F}(u, w^0) \circ \varphi \quad \text{in } [0, T].$$

In altri termini, per ogni  $w^0$  fissato, se  $u \mapsto w$  allora  $u \circ \varphi \mapsto w \circ \varphi$ . Si dice allora che  $\mathcal{F}$  è *indipendente dalla velocità*.

Pertanto ad ogni istante  $t$ ,  $w(t)$  dipende solo dall'immagine della funzione  $u: [0, t] \rightarrow \mathbf{R}$  e dall'ordine in cui tali valori sono stati assunti. Questa proprietà permette di rappresentare  $\mathcal{F}$  mediante curve nel piano  $(u, w)$  che si diramano e confluiscono, senza bisogno di specificare la velocità del punto  $(u, w)$  mobile lungo tali curve. Questo fornisce un *ritratto di fase* reminiscente dei sistemi dinamici autonomi.

Gli operatori di memoria indipendenti dalla velocità sono detti *operatori di isteresi*. Questa definizione esclude ogni memoria di tipo viscoso, quale quella

rappresentata mediante convoluzione temporale:

$$(4.4) \quad [\mathcal{F}(u, w^0)](t) := \int_0^{+\infty} \alpha(u(t-\tau), t-\tau) k(\tau) d\tau + w^0,$$

per date funzioni  $\alpha, k$ . In realtà, persino nei fenomeni di isteresi più tipici, la memoria non è del tutto indipendente dalla velocità, ed effetti di viscosità sono sovrapposti all'isteresi. Si noti comunque che più il processo è lento, più la componente dipendente dalla velocità risulta ridotta.

Tipicamente gli operatori di isteresi sono inizialmente definiti per argomenti monotoni a tratti; grazie ad una proprietà di uniforme continuità, sono quindi estesi per continuità ad uno spazio funzionale completo, solitamente  $C^0([0, T])$  o  $W^{1,1}(0, T)$ .

PROBEMATICA ESSENZIALE. – L'isteresi e gli operatori di isteresi sollevano diverse questioni, ad esempio:

- Formulazione di esempi, specialmente in connessione con fenomeni applicativi.
- Comprensione dei meccanismi alla base degli effetti di isteresi.
- Analisi delle proprietà degli operatori di isteresi.
- Classificazione, caratterizzazione, struttura dell'intera classe degli operatori di isteresi.
- Identificazione degli operatori di isteresi e dei loro parametri.
- Studio di equazioni contenenti operatori di isteresi: buona posizione, regolarità della soluzione, comportamento asintotico per  $t \rightarrow +\infty$ , ecc..
- Approssimazione e simulazione numerica di modelli di isteresi.
- Controllo di problemi con isteresi.
- Formulazione di nuovi modelli di isteresi.
- Individuazione di strumenti alternativi agli operatori di isteresi, ecc..

Simili questioni possono essere poste per la più ampia classe degli operatori di memoria.

ISTERESI E MONOTONIA. – In vista dello studio delle equazioni differenziali contenenti operatori di isteresi, discutiamo brevemente le loro proprietà di monotonia.

Semplici controesempi mostrano che la proprietà di monotonia in  $L^2(0, T)$ ,

$$(4.5) \quad \int_0^T [\mathcal{F}(u_1, w^0) - \mathcal{F}(u_2, w^0)](u_1 - u_2) dt \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in \text{Dom}(\mathcal{F}),$$

è soddisfatta solo se  $\mathcal{F}$  è ridotto ad un operatore di sovrapposizione, ovvero non ha memoria.

La seguente proprietà detta di *monotonia a tratti* sembra particolarmente appropriata per gli operatori di isteresi, specialmente in connessione con le equazioni differenziali:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \forall (u, w^0) \in \text{Dom}(\mathcal{F}), \forall [t_1, t_2] \subset [0, T], \\ \text{se } u \text{ è non decrescente (non crescente, risp.) in } [t_1, t_2], \text{ allora} \\ \text{anche } \mathcal{F}(u, w^0) \text{ è non decrescente (non crescente, risp.) in } [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Ciò significa che le *curve di isteresi* sono non decrescenti, ed implica che

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} \geq 0 \quad \text{q.d. in } ]0, T[, \\ \forall u \in \text{Dom}(\mathcal{F}) \cap W^{1,1}(0, T) \text{ tale che } w := \mathcal{F}(u) \in W^{1,1}(0, T). \end{cases}$$

NOTA STORICA. – Il termine *isteresi* deriva dall'antico greco *υστερέειν*, che significa *ritardo nell'arrivo*. Infatti in un tipico ciclo di isteresi una variabile sembra ritardare rispetto all'altra (abbiamo però visto che il fenomeno è un po' diverso). Sembra che questo termine sia stata usato per la prima volta da Ewing per il ferromagnetismo nel 1882. Qui ci limitiamo a considerare brevemente due esempi fondamentali: plasticità e ferromagnetismo.

*Plasticità.* Sembra che i primi modelli di plasticità risalgano al 1864 (Tresca) e 1870 (Saint Vénant). Un'altro modello fu considerato da Duhem circa un secolo fa [138]. Nel 1924 Prandtl [150] introdusse un modello scalare di elasto-plasticità, che fu poi esteso ai tensori da Reuss nel 1930. Nel 1928 lo stesso Prandtl [151] propose un modello molto più generale, che fu poi riscoperto da Ishlinskii [141] nel 1944, e che è spesso attribuito a quest'ultimo.

La ricerca sulla plasticità proseguì poi in varie direzioni; in particolare nel 1967 Mróz [146] propose un modello le cui proprietà analitiche sono state recentemente studiate dal punto di vista dell'isteresi.

*Ferromagnetismo.* Nel 1887 Lord Rayleigh [153] propose un modello dell'isteresi ferromagnetica. Nel 1905 Madelung [142] studiò le proprietà delle curve

magnetiche rilevate sperimentalmente. Nel 1906 Weiss [172] introdusse la sua famosa *teoria del campo medio*, in cui compare il concetto di *dominio magnetico*. Weiss attribuì il comportamento ferromagnetico ad un non meglio precisato *campo molecolare*, la cui origine fu poi spiegata da Heisenberg nel 1928 in termini di meccanica quantistica. Nel 1935 Landau e Lifshitz [168] proposero una teoria quantitativa del ferromagnetismo, che rende conto tra l'altro dei domini magnetici; questa fu poi sviluppata da Brown [165], ed è oggi nota come *micro-magnetismo* (o *micromagnetica*).

Nel 1937 Landau avanzò una teoria fenomenologica generale delle transizioni di fase, la quale rende conto anche di diversi effetti di isteresi; cf. e.g. [169]. Questo approccio fu poi applicato a numerosi fenomeni, tra cui la ferroelettricità e lo studio dei cosiddetti *materiali con memoria di forma*, cf. e.g. Müller [147], [148].

Facendo seguito ad una idea di Weiss e de Freudenreich [160] del 1916, nel 1935 Preisach [152] introdusse un modello dell'isteresi ferromagnetica scalare, che tra l'altro si presta ad un'interessante rappresentazione grafica. Nel 1942 Néel ne propose un'interpretazione fisica. Il modello di Preisach è tuttora ampiamente usato, ed è applicato anche ad altri fenomeni, quali l'isteresi nei superconduttori del primo tipo e nella filtrazione nei mezzi porosi.

*Matematica dell'isteresi.* Sebbene gli studi di Volterra sugli effetti di memoria risalgano ad un secolo fa, la storia degli studi matematici dell'isteresi è sorprendentemente breve. Naturalmente gli strumenti essenziali dell'analisi sono sempre stati presenti nei vari modelli sviluppati dai fisici. Tuttavia sembra che le prime applicazioni dell'analisi funzionale risalgano solo al 1966, e siano dovute a Bouc [132], [133], allora studente dell'Ecole Polytechnique di Parigi (!).

Negli anni '70 M.A. Krasnosel'skiĭ ed un gruppo di matematici russi avviarono uno studio sistematico degli *operatori di isteresi*; si veda la monografia di Krasnosel'skiĭ e Pokrovskiĭ [114]. Nei primi anni '80 anche altri analisti europei iniziarono lo studio dell'isteresi, con particolare riferimento alle equazioni non lineari alle derivate parziali ed a problemi applicativi. Da allora l'interesse dei matematici per tali modelli è andato crescendo; in particolare negli ultimi anni diverse monografie sono state dedicate a questa nuova problematica.

## 5. – Alcuni modelli di isteresi.

Ci limitiamo a delineare alcuni fondamentali modelli di isteresi scalare, senza precisare gli spazi funzionali, per i quali rinviamo alla monografia [117].

MODELLO DI DUHEM. – Nella sua forma più semplice, l'operatore di Duhem  $(u, w^0) \mapsto w$  è definito dal seguente problema di Cauchy:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dt} = g_1(u, w) \left( \frac{du}{dt} \right)^+ - g_2(u, w) \left( \frac{du}{dt} \right)^- & \text{in } ]0, T[, \\ w(0) = w^0, \end{cases}$$

con  $g_1$  e  $g_2$  funzioni date. Dal momento che qui consideriamo solo tempi crescenti, ovvero  $dt \geq 0$ , l'equazione differenziale è equivalente a

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{dw}{du} = g_1(u, w) & \text{ove } u \text{ è crescente,} \\ \frac{dw}{du} = g_2(u, w) & \text{ove } u \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Il corrispondente operatore di isteresi dapprima è costruito per ogni funzione  $u$  lineare a tratti, quindi è esteso per continuità ad ogni  $u \in W^{1,1}(0, T)$ . Semplici controesempi escludono l'estendibilità a  $C^0([0, T])$ .

Questa formulazione può essere modificata in modo da confinare la coppia  $(u, w)$  ad un sottoinsieme di  $\mathbf{R}^2$ , ridefinendo opportunamente le funzioni  $g_1$  e  $g_2$  sul bordo di tale insieme; cf. Fig. 7.

«STOP», O MODELLO DI PRANDTL DELL'ELASTO-PLASTICITÀ. – Nel seguito indicheremo la derivazione nel tempo mediante il punto. Si consideri una molla lineare combinata *in serie* con un elemento di attrito. Denotando la deformazione con  $u$  e lo sforzo con  $w$ , si ottiene un'inclusione differenziale della forma seguen-

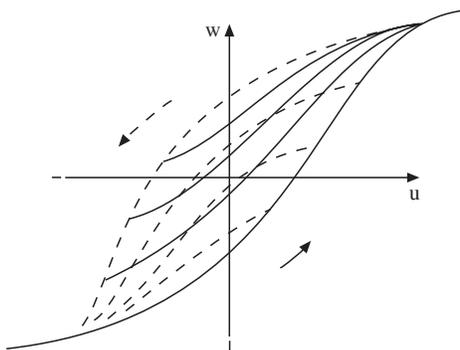


Figure 7. – Modello di Duhem.

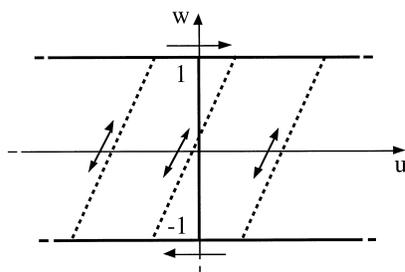


Figure 8. – Stop, o Modello di Prandtl.

te (qui scritta con costanti normalizzate):

$$(5.3) \quad \begin{cases} \dot{w} + \text{sign}^{-1}(w) \ni \dot{u} & \text{in } ]0, T[, \\ w(0) = w^0. \end{cases}$$

Poiché  $\text{sign}(c\xi) = \text{sign}(\xi)$  per ogni  $c > 0$  ed ogni  $\xi \in \mathbf{R}$ , la trasformazione  $u \mapsto w$  è indipendente dalla velocità; cf. Fig. 8.

Questa inclusione differenziale è equivalente ad una disequazione variazionale in  $]0, T[$ :

$$(5.4) \quad w \in [-1, 1], \quad (\dot{w} - \dot{u})(w - v) \leq 0 \quad \forall v \in [-1, 1].$$

«PLAY», O MODELLO DI PLASTICITÀ CON INCRUDIMENTO. – Consideriamo ora il modello duale del precedente, ottenuto combinando *in parallelo* una molla lineare con un elemento di attrito. A differenza di sopra, qui denotiamo la deformazione con  $w$  e lo sforzo con  $u$ . In tal modo otteniamo un'inclusione differenziale della forma (con costanti normalizzate):

$$(5.5) \quad \begin{cases} \text{sign}(\dot{w}) + w \ni u & \text{in } ]0, T[, \\ w(0) = w^0. \end{cases}$$

La trasformazione  $u \mapsto w$  è indipendente dalla velocità; cf. Fig. 9.

Anche l'inclusione differenziale (5.5) è equivalente ad una disequazione variazionale in  $]0, T[$ :

$$(5.6) \quad (w - u)(\dot{w} - \dot{v}) + |\dot{w}| - |\dot{v}| \leq 0 \quad \forall v \in W^{1,1}(0, T).$$

Questo modello può anche rappresentare il *gioco meccanico*, donde il nome.

Stop e play sono facilmente estesi ai tensori, mediante inclusioni differenziali e disequazioni variazionali. Opportune combinazioni in serie e/o in parallelo forniscono modelli più complessi, noti come *modelli di Prandtl-Ishlinskii*, rap-

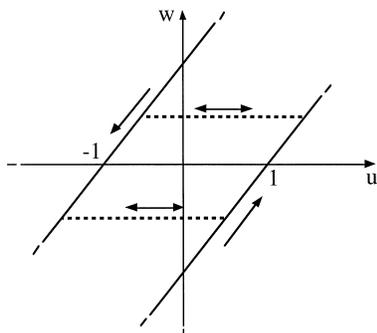


Figure 9. – Gioco (o play).

prestabili mediante sistemi di disequazioni variazionali. Tali modelli sono frequentemente usati in elasto-plasticità. Abbinati alle leggi della dinamica o della statica, forniscono problemi che sono stati dettagliatamente studiati nel quadro degli spazi di Sobolev anche prescindendo dagli operatori di isteresi; per es. cf. [167].

ISTERESI DISCONTINUA. – Fissata una coppia  $\varrho := (\varrho_1, \varrho_2) \in \mathbf{R}^2$  ( $\varrho_1 < \varrho_2$ ), introduciamo l'operatore *relay (ritardato)*  $h_\varrho$  rappresentato in Fig. 10. Ad esempio, sia  $u(0) < \varrho_1$ . Allora  $w(0) = -1$ , e  $w(t) = -1$  fintantoché  $u(t) < \varrho_2$ ; se  $u$  raggiunge  $\varrho_2$ , allora  $w$  salta a 1, dove rimane finché  $u(t) > \varrho_1$ ; se poi  $u$  raggiunge  $\varrho_1$ , allora  $w$  salta a  $-1$ , e così via. Nel caso in cui  $\varrho_1 < u(0) < \varrho_2$  occorre prescrivere il valore iniziale  $w^0 (= \pm 1)$ .

Dal momento che una funzione uniformemente continua può oscillare tra le soglie  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$  solo un numero finito di volte, è facile verificare che  $h_\varrho$  trasforma  $C^0([0, T]) \times \{-1, 1\}$  in  $BV(0, T)$ . In effetti  $h_\varrho$  è localmente limitato in tali spazi. La stessa proprietà di regolarizzazione vale per l'operatore play,

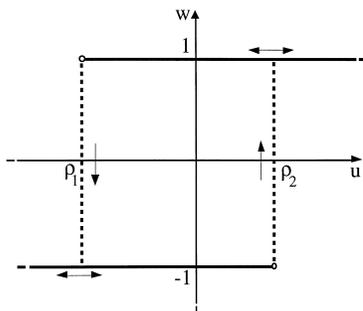


Figure 10. – Operatore relay (ritardato).

che d'altra parte può essere rappresentato come una media di relay aventi soglie traslate.

Questo operatore non è chiuso, rispetto alla topologia forte di  $C^0([0, T])$  per la funzione di ingresso  $u$  e rispetto alla topologia debole di  $BV(0, T)$  per la funzione di uscita  $w$ . La sua chiusura in tali topologie è a più valori, ma ancora tale che  $|w| = 1$  in  $[0, T]$ . In connessione con le equazioni alle derivate parziali, è importante identificare anche la chiusura di  $h_\varrho$  nella topologia debole di  $L^2(\Omega; C^0([0, T]))$  per  $u$  e nella topologia debole star di  $L^2_{w^*}(\Omega; BV(0, T))$  per  $w$ . Tale chiusura può essere espressa mediante un sistema di due disequazioni variazionali, cf. [117]; il suo grafico invade l'intero rettangolo  $[\varrho_1, \varrho_2] \times [-1, 1]$ , ovvero ogni valore di tale rettangolo può essere raggiunto dalla coppia  $(u, w)$ .

«PLAY» GENERALIZZATO. – Posto  $\tilde{\mathbf{R}}^- := \mathbf{R}^- \cup \{-\infty\}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$  e  $\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si assuma che

$$(5.7) \quad \begin{cases} \gamma_l, \gamma_r \text{ siano funzioni (eventualmente a più valori) monotone massimali} \\ \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{R}}), \text{ tali che } \inf \gamma_r(u) \leq \sup \gamma_l(u) \quad \forall u \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Si ponga quindi

$$(5.8) \quad \varphi(u, w) := \begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}^- & \text{se } w \in \gamma_l(u) \setminus \gamma_r(u), \\ \{0\} & \text{se } \sup \gamma_r(u) < w < \inf \gamma_l(u), \\ \tilde{\mathbf{R}}^+ & \text{se } w \in \gamma_r(u) \setminus \gamma_l(u), \\ \tilde{\mathbf{R}} & \text{se } w \in \gamma_r(u) \cap \gamma_l(u); \text{ cf. Fig. 11(b)}. \end{cases}$$

L'associato operatore *gioco* (o *play*) *generalizzato*, delineato in Fig. 11(a),

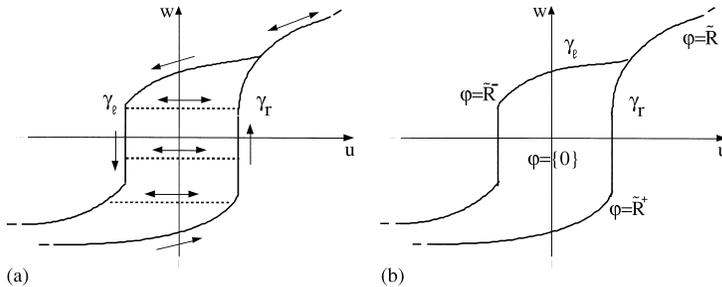


Figure 11. – Play generalizzato in (a); associata funzione ausiliaria  $\varphi$  in (b).

corrisponde alla inclusione differenziale

$$(5.9) \quad \frac{dw}{dt} \in \varphi(u, w) \quad \text{q.d. in } ]0, T[.$$

Quest'ultima va abbinata ad una condizione iniziale  $w(0) = w^0$ ; il dato  $w^0$  deve essere tale che  $(u(0), w^0)$  appartenga alla regione delimitata dai grafici di  $\gamma_r$  e  $\gamma_l$ . L'operatore  $(u, w^0) \mapsto w$  è di isteresi, l'indipendenza dalla velocità essendo facilmente verificata tramite la (5.9).

Si noti che quest'ultima classe di operatori include i relay ritardati.

Se le funzioni  $\gamma_r$  e  $\gamma_l$  sono continue, il corrispondente play generalizzato è continuo in  $C^0([0, T])$ . Sotto tale ipotesi, per ogni  $u \in \mathbf{R}$  si ponga  $K(u) := [\gamma_r(u), \gamma_l(u)]$  e si denoti con  $I_{K(u)}$  la corrispondente funzione indicatrice:  $I_{K(u)} := 0$  in  $K(u)$ ,  $I_{K(u)} := +\infty$  in  $\mathbf{R} \setminus K(u)$ . (5.9) è allora equivalente a  $(dw/dt) \in -\partial I_{K(u)}(w)$ , ovvero

$$(5.10) \quad w \in K(u), \quad \frac{dw}{dt}(w - v) \leq 0 \quad \forall v \in K(u), \text{ q.d. in } ]0, T[.$$

MODELLO DI PREISACH. – Questo è il più potente e flessibile modello di isteresi scalare sinora noto. Esso corrisponde ad una combinazione lineare di relay ritardati. Sia  $\mu$  una misura di Borel finita sul semipiano  $\mathcal{P} := \{\varrho := (\varrho_1, \varrho_2) \in \mathbf{R}^2: \varrho_1 < \varrho_2\}$  delle possibili soglie dei relay, e si ponga

$$(5.11) \quad \mathcal{H}_\mu(u, \{\xi_\varrho\}) := \int_{\mathcal{P}} h_\varrho(u, \xi_\varrho) d\mu(\varrho) \quad \text{in } [0, T].$$

Per ogni  $\varrho \in \mathcal{P}$ ,  $\xi_\varrho (\in \{-1, 1\})$  rappresenta lo stato iniziale del relay  $h_\varrho$ , nel caso in cui  $\varrho_1 < u(0) < \varrho_2$ ; cf. Fig. 12.

Se la misura  $\mu$  non ha masse concentrate in punti o su semirette parallele

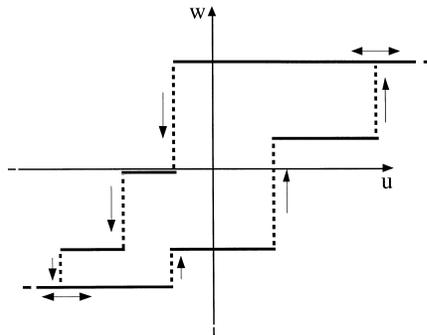


Figure 12. – Modello di Preisach corrispondente ad una combinazione lineare di tre relay.

agli assi, allora  $\mathcal{H}_\mu$  opera in  $C^0([0, T])$  ed è continuo rispetto alla topologia uniforme. Sotto ulteriori ipotesi su  $\mu$ ,  $\mathcal{H}_\mu$  opera in spazi più ristretti (quali  $C^{0,\alpha}([0, T])$ ,  $W^{1,p}(0, T)$ ,  $BV(0, T)$ , ecc.), è invertibile, e soddisfa altre proprietà. Ad esempio, se  $\mu \geq 0$  allora ogni curva di isteresi è monotona non decrescente; cf. [117].

È possibile caratterizzare gli operatori di Preisach nell'ambito degli operatori con memoria, ovvero indicare alcune proprietà soddisfatte solo da tali operatori, cf. [135], [144], [145].

MODELLO DI PREISACH E FERROMAGNETISMO. – Questo modello fu inizialmente proposto per il ferromagnetismo dal fisico ungherese F. Preisach nel 1935, ed è stato poi applicato anche allo studio di altri fenomeni. Esso offre un'interpretazione di diversi processi magnetici, ed è usato in molte applicazioni. Diverse varianti sono state anche proposte da fisici ed ingegneri per renderlo quantitativamente più aderente ai risultati sperimentali, cf. [112], [116].

L'identificazione della misura  $\mu$  corrispondente ad un dato materiale è un problema di ovvia rilevanza applicativa. Applicando una particolare funzione di ingresso e registrando la corrispondente funzione di uscita, si può facilmente valutare la misura di un arbitrario rettangolo del semipiano di Preisach (con lati paralleli agli assi), cf. [140].

La formulazione di un'estensione vettoriale di questo modello atta a rappresentare adeguatamente l'isteresi ferromagnetica su scala *macroscopica* è una delle principali questioni tuttora aperte, malgrado i ripetuti tentativi di fisici ed ingegneri.

IL MODELLO DI LANDAU E LIFSHITZ. – Nel paragrafo 2 abbiamo accennato a come su scala macroscopica l'evoluzione di un materiale ferromagnetico ad isteresi trascurabile conduca alla formulazione di un problema vettoriale a frontiera libera. Qui sopra abbiamo appena delineato un modello scalare dell'isteresi, posto su una scala più piccola ma ancora macroscopica. Il classico modello di Landau e Lifshitz invece intende rappresentare l'isteresi ferromagnetica vettoriale su scala *mesoscopica*.

Su una scala di lunghezze dell'ordine di  $10^{-6}$  cm, un materiale ferromagnetico può essere rappresentato come un continuo di (qui non meglio precisati) *magneti elementari* aventi magnetizzazione di modulo  $\mathfrak{N}$  prescritto:

$$(5.12) \quad |\vec{M}| = \mathfrak{N} \quad \text{in } \Omega .$$

Sia dato un campo applicato  $\vec{H}_{\text{app}}$ , e si definisca il *campo demagnetizzante*  $\vec{H}_{\text{dem}}(\vec{M})$  mediante le classiche equazioni della magnetostatica

$$(5.13) \quad \nabla \cdot (\vec{H}_{\text{dem}} + 4\pi\vec{M}) = 0, \quad c\nabla \times \vec{H}_{\text{dem}} = 4\pi\vec{J} \quad \text{in } \mathbf{R}^3 .$$

Queste equazioni sono poste in tutto lo spazio, e vanno accoppiate con una condizione di decadimento:  $\vec{H}_{\text{dem}}(x) \rightarrow \vec{0}$  per  $x \rightarrow \infty$ .

Ogni configurazione stazionaria minimizza un funzionale rappresentante la energia magnetica libera, qui scritta in forma semplificata per un materiale ad anisotropia uniaassiale e trascurando gli effetti magnetoelastici:

$$(5.14) \quad \mathcal{E}_{\text{mag}}(\vec{M}) := \frac{a}{2} \int_{\Omega} |\nabla \vec{M}|^2 dx - b \int_{\Omega} (\vec{M} \cdot \hat{z})^2 dx - \int_{\Omega} \left( \vec{H}_{\text{app}} + \frac{1}{2} \vec{H}_{\text{dem}}(\vec{M}) \right) \cdot \vec{M} dx;$$

qui  $a, b$  sono costanti positive,  $\hat{z}$  è il versore dell'asse d'anisotropia.

Il problema stazionario consiste nella minimizzazione del funzionale  $\mathcal{E}_{\text{mag}}(\vec{M})$  soggetto al vincolo (5.12). Questo rende conto della formazione di regioni (dette *domini di Weiss*) aventi magnetizzazione approssimativamente costante, separate da (sottili) zone di transizione. Mediante il metodo diretto del calcolo delle variazioni, è facile verificare che questo problema ha soluzione nello spazio  $H^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ ; in generale questa soluzione non è unica a causa della non convessità del vincolo (5.12).

Nel 1935 Landau e Lifshitz [168] proposero di descrivere l'evoluzione ferromagnetica mediante la seguente equazione:

$$(5.15) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \lambda_1 \vec{M} \times \vec{H}^e - \lambda_2 \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}^e) \quad \text{in } Q,$$

ove  $\lambda_1, \lambda_2$  sono costanti,  $\lambda_2 \geq 0$ , ed il *campo magnetico effettivo*  $\vec{H}^e$  è definito da

$$(5.16) \quad \vec{H}^e := - \frac{\partial}{\partial \vec{M}} \mathcal{E}_{\text{mag}}(\vec{M}) = \Delta \vec{M} + b(\vec{M} \cdot \hat{z}) \hat{z} + \vec{H} \quad \text{in } Q.$$

Moltiplicando l'equazione (5.15) per  $\vec{M}$ , si verifica facilmente che il vincolo (5.12) è conservato nel tempo. In effetti (5.15) è la più semplice dinamica per un magnete libero di ruotare e soggetto ad un campo  $H^e$ . Il problema iniziale ed ai limiti ottenuto accoppiando l'equazione di Landau e Lifshitz con il sistema di Maxwell e la legge di Ohm ha una soluzione debole; per esempio cf. [171], [163].

Dal punto di vista matematico l'equazione di Landau e Lifshitz non è un modello pienamente soddisfacente dell'isteresi ferromagnetica, in quanto manca del requisito essenziale dell'isteresi: l'indipendenza dalla velocità, cf. (1.3). La costante di rilassamento  $\lambda_2^{-1}$  è molto piccola; il passaggio al limite per  $\lambda_2 \rightarrow +\infty$  presenta tuttavia delle difficoltà analitiche. Una variante della (5.15) che supera questa difficoltà è stata proposta in [159].

## 6. – Equazioni differenziali con isteresi.

UN'EQUAZIONE ALLE DERIVATE ORDINARIE CON ISTERESI. – Il seguente semplice esempio può dare un'idea delle possibilità offerte dai modelli d'isteresi.

Si voglia rappresentare l'evoluzione della temperatura  $y$  in presenza di una sorgente di intensità  $f \in L^1(0, T)$  e di un termostato che tende a stabilizzare la temperatura  $y = 0$ ; pertanto supponiamo che per  $y < 0$  il termostato riscaldi, per  $y > 0$  raffreddi, per  $y = 0$  sia spento. Posto

$$(6.1) \quad \text{sign}_0(y) := -1 \quad \text{se } y < 0, \quad \text{sign}_0(0) = 0, \quad \text{sign}_0(y) := 1 \quad \text{se } y > 0,$$

consideriamo quindi il seguente problema senza diffusione:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + w = f(t) & \text{in } ]0, T[, \\ w = \text{sign}_0(y) & \text{in } ]0, T[, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

In alcuni casi, ad esempio per  $f = 1/2$ , (6.2) non ha soluzione; la difficoltà è legata al fatto che  $w$  può oscillare tra  $-1$  e  $1$  infinite volte. È quindi opportuno rivedere il modello. Sostituendo  $\text{sign}_0$  con il corrispondente grafo massimale monotono «sign» (ove  $\text{sign}(0) := [-1, 1]$ , cf. (2.6)), esisterebbe ben una soluzione:  $y \equiv 0$ ,  $w \equiv 1/2$ . Ma quale potrebbe essere l'interpretazione di valori di  $w$  diversi da  $-1, 0, 1$ ?

Proponiamo allora di sostituire la funzione  $\text{sign}_0$  con un relay ritardato  $h_\varrho$  avente soglie  $\varrho_1 < 0 < \varrho_2$ . Questo corrisponde ad un termostato che non è mai spento: un funzionamento senz'altro vicino a quello di un termostato usuale. Sostituiamo poi l'operatore  $h_\varrho$  con la sua chiusura rispetto alla topologia forte di  $C^0([0, T])$  per  $y$ , e quella debole star di  $BV(0, T)$  per  $w$ . Il problema ha allora una soluzione  $y$  tale che  $w \in \{-1, 1\}$ ; la funzione  $y$  può persino essere costruita direttamente a tratti.

ISTERESI NEI SISTEMI DISTRIBUITI. – Dapprima occorre estendere la nozione di operatore di isteresi a sistemi spazialmente distribuiti. Dato un dominio limitato  $\Omega$  di  $\mathbf{R}^N$  ed un operatore di isteresi continuo  $\mathcal{F}: \text{Dom}(\mathcal{F}) \subset C^0([0, T]) \times \mathbf{R} \rightarrow C^0([0, T])$ , definiamo il corrispondente operatore  $\tilde{\mathcal{F}}$  come segue:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \text{Dom}(\tilde{\mathcal{F}}) := \\ \{ (u, w^0) \in L^1(\Omega; C^0([0, T])) \times L^1(\Omega) : (u, w^0) \in \text{Dom}(\mathcal{F}) \text{ q.d. in } \Omega \}; \\ [\tilde{\mathcal{F}}(u, w^0)](x, t) := [\mathcal{F}(u(x, \cdot), w^0(x))](t) \quad \forall t \in [0, T], \text{ per q.o. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Nel seguito identificheremo  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\mathcal{F}$ , ed a volte sottintenderemo l'argomento  $w^0$ .

ALCUNE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI CON OPERATORI DI ISTERESI. – Sia  $A$  un operatore del secondo ordine,  $f$  una funzione  $Q := \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbf{R}$ , e si considerino le equazioni

$$(6.4) \quad \frac{\partial}{\partial t}[u + \mathcal{F}(u)] + Au = f \quad \text{in } Q,$$

$$(6.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}[u + \mathcal{F}(u)] + Au = f \quad \text{in } Q,$$

$$(6.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + Au + \mathcal{F}(u) = f \quad \text{in } Q.$$

L'equazione (6.4) può rappresentare l'evoluzione di un materiale ferromagnetico elettricamente conduttore; essa è derivata accoppiando le leggi di Maxwell con quella di Ohm e trascurando la corrente di spostamento, ipotesi quest'ultima soddisfatta nei metalli ed ampiamente utilizzata nelle applicazioni. Per  $N = 3$ ,  $u$  e  $\mathcal{F}(u)$  sono vettori tridimensionali e  $A := (\nabla \times)^2 (= \text{curl}^2)$ ; per  $N = 1$ ,  $u$  e  $\mathcal{F}(u)$  sono scalari e  $A := -d^2/dx^2$ . In un materiale isolante, considerando la corrente di spostamento si ottiene invece la (6.5). Quest'ultima equazione può anche rappresentare l'evoluzione meccanica di un corpo elasto-plastico. La (6.6) può descrivere la diffusione termica in presenza di una distribuzione di termostati.

UN PROBLEMA MODELLO. – Sia  $A := -\Delta \left( := -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)$ , ed  $\mathcal{F}: C^0([0, T]) \times \mathbf{R} \rightarrow C^0([0, T])$  sia un operatore di isteresi continuo, e si assuma che

$$(6.7) \quad u^0, w^0 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

PROBLEMA 6.1. – Si trovi  $u: \Omega \rightarrow C^0([0, T])$  misurabile tale che  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e, posto

$$(6.8) \quad w(x, t) := [\mathcal{F}(u(x, \cdot), w^0(x))](t) \quad \forall t \in [0, T], \text{ per q.o. } x \in \Omega,$$

sia  $w \in L^2(Q)$ ,  $u + w \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  e

$$(6.9) \quad \frac{\partial}{\partial t}(u + w) - \Delta u = f \quad \text{in } H^{-1}(\Omega), \text{ q.d. in } ]0, T[,$$

$$(6.10) \quad (u + w)|_{t=0} = u^0 + w^0 \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

Per quanto detto sopra, questo modello si applica all'isteresi ferromagnetica solo nel caso unidimensionale.

**TEOREMA 6.1.** – *Sia  $\mathcal{F}: C^0([0, T]) \times \mathbf{R} \rightarrow C^0([0, T])$  un operatore di isteresi continuo, monotono a tratti (nel senso della (4.6)), e tale che*

$$(6.11) \quad \begin{cases} \exists L, M, N \in \mathbf{R}^+ : \forall (v, \xi) \in C^0([0, T]) \times \mathbf{R}, \\ \|\mathcal{F}(v, \xi)\|_{C^0([0, T])} \leq L\|v\|_{C^0([0, T])} + M|\xi| + N. \end{cases}$$

*Inoltre q.d. in  $\Omega$  sia  $(u^0, w^0)$  uno stato iniziale ammissibile per  $\mathcal{F}$ , e*

$$(6.12) \quad u^0 \in H_0^1(\Omega), \quad w^0 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^2(Q) \cap W^{1,1}(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

*Allora il Problema 1 ha almeno una soluzione tale che*

$$(6.13) \quad u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad w \in L^2(\Omega; C^0([0, T])).$$

CENNO DI DIMOSTRAZIONE. – (cf. [156], [117; Chap. IX])

(i) *Approssimazione per discretizzazione temporale di tipo implicito.* Si fissi  $m \in \mathbf{N}$ , si ponga  $h := T/m$ ,  $u_m^0 := u^0$ , e si consideri la seguente famiglia di problemi.

**PROBLEMA 6.1<sub>m</sub>.** – *Per  $n = 1, 2, \dots, m$ , si trovi  $u_m^n \in H_0^1(\Omega)$  tale che, denotata con  $u_m$  la funzione interpolata lineare nel tempo di  $u_m^0 := u^0, \dots, u_m^m$  e posto  $w_m := \mathcal{F}(u_m, w^0)$ ,*

$$(6.14) \quad \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h} + \frac{w_m^n - w_m^{n-1}}{h} - \Delta u_m^n = f_m^n \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

Per ogni  $n$ ,  $u_m^0, u_m^1, \dots, u_m^{n-1}$  sono noti; quindi  $w_m^n$  dipende solo da  $u_m^n$  (in un certo senso, la discretizzazione temporale rimuove la memoria). Si può quindi facilmente mostrare che l'equazione (6.14) ha una soluzione.

(ii) *Stime a priori.* Si moltiplichi l'equazione (6.14) per  $u_m^n - u_m^{n-1}$ , si integri nello spazio e si sommi per  $n = 1, \dots, l$ , per ogni  $l \in \{1, \dots, m\}$ . La monotonia a tratti fornisce

$$\frac{w_m^n - w_m^{n-1}}{h} (u_m^n - u_m^{n-1}) \geq 0 \quad \text{q.d. in } \Omega, \forall n.$$

Con procedura standard si ottiene quindi

$$(6.15) \quad \|u_m\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \text{Costante},$$

da cui grazie alla (6.11) si ha

$$(6.16) \quad \|w_m\|_{L^2(\Omega; L^\infty(0, T))} \leq \text{Costante}.$$

(iii) *Passaggio al limite per compattezza.* In seguito alle stime precedenti esistono  $u$  e  $w$  tali che, a meno di estrarre sottosuccessioni,

$$(6.17) \quad \begin{cases} u_m \rightarrow u & \text{debolmente star in } H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ w_m \rightarrow w & \text{debolmente star in } L^2(\Omega; L^\infty(0, T)). \end{cases}$$

Quindi, a meno di estrarre ulteriori sottosuccessioni,  $u_m \rightarrow u$  uniformemente in  $[0, T]$ , q.d. in  $\Omega$ . Grazie alla continuità di  $\mathcal{F}$ , ciò implica  $\mathcal{F}(u_m, w^0) \rightarrow \mathcal{F}(u, w^0)$  uniformemente in  $[0, T]$ , q.d. in  $\Omega$ . Per la (6.17)<sub>2</sub> ciò implica la (6.7).

ALTRI RISULTATI. – Il precedente teorema può essere esteso in vari modi. Tra l'altro l'operatore  $\mathcal{F}$  può essere perturbato aggiungendovi un operatore con memoria dipendente dalla velocità.

Si possono facilmente dimostrare dei risultati di regolarità. Ad esempio, se  $\mathcal{F}$  opera ed è limitato in  $H^1(0, T)$ , allora grazie alla (6.13)  $w \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ; se inoltre  $f \in L^2(Q)$  allora  $\Delta u \in L^2(Q)$ .

Se  $\mathcal{F} := \mathcal{C}_\mu$  è l'operatore di Preisach corrispondente ad una misura  $\mu \geq 0$ , quindi per un'ampia e rilevante classe di operatori di isteresi, la soluzione del Problema 1 dipende dai dati con continuità e monotonia. La dimostrazione è basata sulla seguente proprietà, dovuta a Hilpert [139],

$$(6.18) \quad \left( \frac{d}{dt} [\mathcal{C}_\mu(u_1) - \mathcal{C}_\mu(u_2)] \right) \text{sign}_0(u_1 - u_2) \geq \frac{d}{dt} |\mathcal{C}_\mu(u_1) - \mathcal{C}_\mu(u_2)|$$

$$\forall u_1, u_2 \in W^{1,1}(0, T),$$

la funzione  $\text{sign}_0$  essendo definita come in (6.1).

Nel caso di operatori di isteresi *discontinui*, è necessario modificare la formulazione del Problema 1; si può comunque dimostrare l'esistenza di una soluzione se  $\mathcal{F}$  è chiuso in spazi di Sobolev opportuni, ed anche la sua unicità se l'operatore è della classe di Preisach.

Come già osservato, l'equazione (6.4) può rappresentare l'evoluzione di un materiale ferromagnetico. Per  $N = 3$  si incontrano però due difficoltà, e la questione dell'esistenza di una soluzione è ancora aperta. Infatti a tutt'oggi non si dispone di un valido modello vettoriale dell'isteresi ferromagnetica (su scala macroscopica). Inoltre la precedente tecnica per il passaggio al limite non può essere utilizzata, poichè l'iniezione  $\{\vec{v} \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^3) : \text{curl } \vec{v} \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)\} \rightarrow L^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$  non è compatta.

APPROCCIO BASATO SUI SEMIGRUPPI. – La disuguaglianza di Hilpert (6.18) vale anche per gli operatori di play generalizzato, ed è alla base dell'applicazione della teoria dei semigrupperi di contrazioni al Problema 6.1, cf. [158] [117; Chap. VIII].

Si assuma che  $\gamma_l, \gamma_r$  soddisfino (5.7). Accoppiando la (5.9) (posta puntualmente in  $\Omega$ ) con l'equazione (6.9), si ottiene il sistema

$$(6.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \xi - \Delta u = f & \text{in } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \xi = 0 & \text{in } Q, \\ \xi \in \varphi(u, w) & \text{in } Q, \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$(6.20) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{C}(U) + LU \ni F \quad \text{in } Q,$$

ove

$$U := (u, w), \quad LU := (-\Delta u, 0), \quad F := (f, 0),$$

$$\begin{cases} D(\mathcal{C}) := \{U := (u, w) \in \mathbf{R}^2 : \inf \gamma_r(u) \leq w \leq \sup \gamma_l(u)\}, \\ \mathcal{C}(U) := \{(\xi, -\xi) : \xi \in \varphi(U)\} \quad \forall U \in D(\mathcal{C}). \end{cases}$$

L'equazione (6.20) sarà abbinata alla condizione iniziale

$$(6.21) \quad U(0) = U^0 := (u^0, w^0) \quad \text{in } \Omega.$$

Si denoti con  $\mathbf{R}_1^2$  lo spazio di Banach dei vettori  $U := (u, w) \in \mathbf{R}^2$  dotato della norma non euclidea

$$\|(u, w)\|_{\mathbf{R}_1^2} := |u| + |w| \quad \forall (u, w) \in \mathbf{R}_1^2;$$

posto  $U^+ := (u^+, w^+)$ ,  $\mathbf{R}_1^2$  è un reticolo di Banach.

PROPOSIZIONE 6.2. – Si assuma che (5.7) valga, e che

$$(6.22) \quad \exists C_1, C_2 \in \mathbf{R}^+ : \forall v \in \mathbf{R}, \forall z \in \gamma_i(v), \quad |z| \leq C_1 |v| + C_2 \quad (i = l, r).$$

Allora l'operatore  $\mathcal{C} + L$  è  $T$ - ed  $m$ -accretivo in  $L^1(\Omega; \mathbf{R}_1^2)$

Applicando classici risultati della teoria dei semigruppì di contrazioni non lineari, per es. cf. per es. cf. Barbu [161] and B enilan [162], si ottiene quindi il seguente teorema.

**TEOREMA 6.3.** – *Le condizioni (5.7) e (6.22) siano soddisfatte, e sia  $U^0 := (u^0, w^0) \in L^1(\Omega; \mathbf{R}_1^2)$  tale che  $U^0 \in \text{Dom}(\varphi)$  q.d. in  $\Omega$ , e  $f \in L^1(\Omega \times ]0, T])$ . Allora il problema di Cauchy (6.20), (6.21) ha una ed una sola soluzione «mild»  $U: [0, T] \rightarrow L^1(\Omega; \mathbf{R}_1^2)$ , la quale dipende con continuit  e monotonia dai dati  $u^0, w^0, f$ . Inoltre se  $f \in BV(0, T; L^1(\Omega))$  e  $\Delta u^0 \in L^1(\Omega)$ , allora  $U$    Lipschitziana.*

Questo approccio pu  essere esteso ad un’ampia classe di operatori di isteresi discontinui, ottenuta combinando linearmente operatori di play generalizzati. Tale classe include tra gli altri gli operatori di Preisach, dal momento che i relay rientrano tra i play generalizzati.

Questa impostazione pu  essere adattata anche ad altre equazioni differenziali, tra cui le equazioni iperboliche quasilineari del primo ordine della forma

$$(6.23) \quad \frac{\partial}{\partial t}(u + w) + \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l}(b_l u) + cu = f \quad \text{in } Q,$$

ove  $b_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) e  $c$  sono funzioni regolari date.

**ALTRE EQUAZIONI CON OPERATORI DI ISTERESI.** – Si pu  dimostrare l’esistenza di una soluzione anche per problemi iniziali ed ai limiti associati all’equazione (6.6). Se  $\mathcal{F}$    Lipschitziana in  $C^0([0, T])$ ,   facile mostrare l’unicit  della soluzione mediante il teorema di Banach delle contrazioni, cf. [117]. Se invece  $\mathcal{F}$    continua in  $C^0([0, T])$  ma non Lipschitziana, si possono dare controesempi all’unicit  anche per  $\mathcal{F}$  monotona a tratti, cf. [].

In generale l’analisi dell’equazione iperbolica quasilineare (6.5)   ben pi  ardua, salvo nel caso in cui  $\mathcal{F}$  pu  essere rappresentato mediante una disequazione variazionale, cf. [117]. Importanti risultati per tale equazione sono stati comunque ottenuti da Krej c , cf. [115].

**OSSERVAZIONI FINALI SULL’ISTERESI.** – Negli ultimi anni sono apparse diverse monografie sull’isteresi, e vari convegni hanno riunito matematici e scienziati applicativi attorno a tale tema. Comunque molto resta ancora da fare; tra l’altro ulteriori progressi nella formulazione, analisi, identificazione e soluzione numerica di modelli di isteresi potrebbero essere di grande utilit  per le applicazioni. Finora questa ricerca   stato al centro dell’interesse di un gruppo di matematici alquanto ristretto. Pertanto l’isteresi si presenta come un territorio potenzialmente fertile ed in gran parte inesplorato.

## BIBLIOGRAFIA

Le referenze bibliografiche sono articolate in cinque sezioni:

- 1) Opere generali sulle transizioni di fase.
- 2) Altri lavori sulle transizioni di fase.
- 3) Opere generali sull'isteresi.
- 4) Altri lavori sull'isteresi.
- 5) Altri referenze.

Questa raccolta non intende assolutamente essere esaustiva; in particolare le sezioni 2 e 4 sono limitate alle opere citate nel testo, in gran parte nelle brevi note storiche. Per un quadro meno incompleto si vedano ad esempio la monografia [19] e l'articolo di rassegna [35] per le transizioni di fase, la monografia [117] per l'isteresi, e le altre opere qui citate.

1. *Opere generali sulle transizioni di fase*

MONOGRAFIE A CARATTERE FISICO

- [1] F. F. ABRAHAM, *Homogeneous Nucleation Theory*, Academic Press, New York 1974.
- [2] J. C. BRICE, *The Growth of Crystals from Liquids*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [3] B. CHALMERS, *Principles of Solidification*, Wiley, New York 1964.
- [4] J. W. CHRISTIAN, *The Theory of Transformations in Metals and Alloys. Part 1: Equilibrium and General Kinetic Theory*, Pergamon Press, London 1975.
- [5] R. H. DOREMUS, *Rates of Phase Transformations*, Academic Press, Orlando 1985.
- [6] M. C. FLEMINGS, *Solidification Processing*, McGraw-Hill, New York 1973.
- [7] W. KURZ - D. J. FISHER, *Fundamentals of Solidification*, Trans Tech, Aedermannsdorf 1989.
- [8] R. PAMPLIN (ed.), *Crystal Growth*, Pergamon Press, Oxford 1975.
- [9] V. P. SKRIPOV, *Metastable Liquids*, Wiley, Chichester 1974.
- [10] D. TURNBULL, *Phase Changes*, Solid State Physics, **3** (1956), 225-306.
- [11] A. R. UBBELOHDE, *The Molten State of Matter*, Wiley, Chichester 1978.
- [12] P. D. WOODRUFF, *The Solid-Liquid Interface*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1973.

MONOGRAFIE A CARATTERE MATEMATICO

- [13] V. ALEXIADES - A. D. SOLOMON, *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*, Hemisphere Publishing, Washington DC 1993.
- [14] M. BROKATE - J. SPREKELS, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Heidelberg 1996.
- [15] M. E. GURTIN, *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*, Clarendon Press, Oxford 1993.
- [16] A. M. MEIRMANOV, *The Stefan Problem*, De Gruyter, Berlin 1992 (Russian edition: Nauka, Novosibirsk 1986).
- [17] A. ROMANO, *Thermomechanics of Phase Transitions in Classical Field Theory*, World Scientific, Singapore 1993.

- [18] L. RUBINSTEIN, *The Stefan Problem*. A.M.S., Providence 1971 (Russian edition: Zvaigzne, Riga 1967).
- [19] A. VISINTIN, *Models of phase transitions*, Birkhäuser, Boston 1996.

## ARTICOLI DI RASSEGNA E BIBLIOGRAFIE

- [20] J. R. CANNON, *The One-Dimensional Heat Equation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 23, Addison Wesley, Menlo Park 1984.
- [21] S. J. CHAPMAN - S. D. HOWISON - J. R. OCKENDON, *Macroscopic models for superconductivity*, S.I.A.M. Rev., **34** (1992), 529-560.
- [22] I. I. DANILYUK, *On the Stefan problem*, Russian Math. Surveys, **40** (1985), 157-223.
- [23] A. FASANO, *Las Zonas Pastosas en el Problema de Stefan*, Cuad. Inst. Mat. Beppo Levi, No. 13, Rosario 1987.
- [24] A. FASANO, *Esperienza di collaborazione con industrie su programmi a lungo termine*, Boll. Un. Matem. Ital., **7-A** (1997), 1-40.
- [25] A. FASANO, *Phase transition with supercooling*, Boll. Un. Matem. Ital., (8) (1998), 49-69.
- [26] E. MAGENES, *Problemi di Stefan bifase in più variabili spaziali*, Le Matematiche, **36** (1981), 65-108.
- [27] E. MAGENES, *Stefan problems with a concentrated capacity*, Boll. Un. Matem. Ital., (8) (1998), 71-81.
- [28] M. NIEZGÓDKA, *Stefan-like problems*, In: Free Boundary Problems: Theory and Applications (A. Fasano, M. Primicerio, eds.). Pitman, Boston 1983, pp. 321-347.
- [29] O. A. OLEĪNIK - M. PRIMICERIO - E. V. RADKEVICH, *Stefan-like problems*, Meccanica, **28** (1993), 129-143.
- [30] M. PRIMICERIO, *Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, **32** (1973-74), 183-206.
- [31] M. PRIMICERIO, *Problemi di diffusione a frontiera libera*, Boll. Un. Matem. Ital., **18-A** (1981), 11-68.
- [32] J.-F. RODRIGUES, *The variational inequality approach to the one-phase Stefan problem*, Acta Applicandae Mathematicae, **8** (1987), 1-35.
- [33] D. A. TARZIA, *A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat Diffusion Equation. The Stefan Problem*, Progetto Nazionale M.P.I. «Equazioni di Evoluzione e Applicazioni Fisico-Matematiche», Firenze, 1988.
- [34] C. VERDI, *Numerical methods for phase transition problems*, Boll. Un. Matem. Ital., (8) (1998), 83-108.
- [35] A. VISINTIN, *Introduction to the models of phase transitions*, Bull. Un. Matem. Ital., **I-B** (1998), 1-47.
- [36] D. G. WILSON - A. D. SOLOMON - J. S. TRENT, *A Bibliography on Moving Boundary Problems with Key Word Index*, Oak Ridge National Laboratory, 1979.

## ATTI DI CONVEGNI

- [37] A. BOSSAVIT - A. DAMLAMIAN - M. FRÉMOND (EDS.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Pitman, Boston 1985.
- [38] J. M. CHADAM - H. RASMUSSEN (EDS.), *Emerging Applications in Free Boundary Problems*, Longman, Harlow 1993.
- [39] J. M. CHADAM - H. RASMUSSEN (eds.), *Free Boundary Problems Involving Solids*, Longman, Harlow 1993.
- [40] J. M. CHADAM - H. RASMUSSEN (eds.), *Free Boundary Problems in Fluid Flow with Applications*, Longman, Harlow 1993.

- [41] J. I. DIAZ - M. A. HERRERO - A. LIÑÁN, J. L. VÁZQUEZ (eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Longman, Harlow 1995.
- [42] A. FASANO - M. PRIMICERIO (eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Pitman, Boston 1983.
- [43] K.-H. HOFFMANN - J. SPREKELS (eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Longman, Harlow 1990.
- [44] K.-H. HOFFMANN - J. SPREKELS (eds.), *Free Boundary Value Problems*, Birkhäuser, Boston 1990.
- [45] N. KENMUCHI - M. NIEZGÓDKA - P. STRZELECKI (eds.), *Nonlinear Analysis and Applications*, Gakkotosho, Tokyo 1996.
- [46] E. MAGENES (ed.), *Free Boundary Problems*, Istituto di Alta Matematica, Roma 1980.
- [47] M. NIEZGÓDKA - P. STRZELECKI (EDS.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Longman, Harlow 1996.
- [48] J. R. OCKENDON - W. R. HODGKINS (eds.), *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*, Clarendon Press, Oxford 1975.
- [49] D. G. WILSON - A. D. SOLOMON - P. T. BOGGS (eds.), *Moving Boundary Problems*, Academic Press, New York 1978.

## 2. Altri lavori sulle transizioni di fase

- [50] I. ATHANASSOPOULOS - L. A. CAFFARELLI - S. SALSA, *Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems*, Ann. Math., **143** (1996), 413-434.
- [51] I. ATHANASSOPOULOS - L. A. CAFFARELLI - S. SALSA, *Regularity of the free boundary in phase transition problems*, Acta Math., **176** (1996).
- [52] I. ATHANASSOPOULOS - L. A. CAFFARELLI - S. SALSA, *Phase transition problems of parabolic type: flat free boundaries are smooth*, Comm. Pure Appl. Math., **51** (1998), 77-112.
- [53] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. Mat. Pura Appl., **92** (1972), 107-127.
- [54] C. BAIOCCHI - A. CAPELO, *Variational and Quasivariational Inequalities, Applications to Free Boundary Problems*, Wiley, Chichester 1983.
- [55] A. E. BERGER - H. BRÉZIS - J. W. ROGERS, *A numerical method for solving the problem  $u_t - \Delta f(u) = 0$* , R.A.I.R.O., Analyse Numérique, **13** (1979), 297-312.
- [56] A. E. BERGER - J. W. ROGERS, *Some properties of the nonlinear semigroup for the problem  $u_t - \Delta f(u) = 0$* , Nonlinear Analysis, T.M.A., **8** (1984), 909-939.
- [57] H. BRÉZIS, *On some degenerate nonlinear parabolic equations*, In: Nonlinear Functional Analysis (F. E. Browder, ed.). Proc. Symp. Pure Math., **XVIII** A.M.S., Providence 1970, pp. 28-38.
- [58] L. A. CAFFARELLI, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Math., **139** (1977), 155-184.
- [59] L. A. CAFFARELLI, *Some aspects of the one-phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 73-77.
- [60] L. A. CAFFARELLI - L. C. EVANS, *Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **81** (1983), 199-220.
- [61] L. A. CAFFARELLI - A. FRIEDMAN, *Continuity of the temperature in the Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 53-70.
- [62] J. R. CANNON - C. D. HILL, *On the infinite differentiability of the free boundary in a Stefan problem*, J. Math. Anal. Appl., **22** (1968), 385-387.

- [63] A. DAMLAMIAN, *Homogenization for eddy currents*, Delft Progress Report, 6 (1981), 268-275.
- [64] E. DiBENEDETTO, *Regularity results for the  $n$ -dimensional two-phase Stefan problem*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. (1980), 129-152.
- [65] E. DiBENEDETTO, *Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **121** (1982), 131-176.
- [66] E. DiBENEDETTO - V. VESPRI, *On the singular equation  $\beta(u)_t = \Delta u$* , Arch. Rational Mech. Anal., **132** (1995), 247-309.
- [67] J. D. P. DONNELLY, *A model for non-equilibrium thermodynamic processes involving phase changes*, J. Inst. Math. Appl., **24** (1979), 425-438.
- [68] G. DUVAUT, *Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degrés)*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **276-A** (1973), 1461-1463.
- [69] G. DUVAUT, *The solution of a two-phase Stefan by a variational inequality*, In: Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion (J. R. Ockendon, W. R. Hodgkins, eds.), Clarendon Press, Oxford 1975, pp. 173-181.
- [70] G. W. EVANS, *A note on the existence of a solution to a Stefan problem*, Quart. Appl. Math., **IX** (1951), 185-193.
- [71] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *General free boundary problems for the heat equation*, J. Math. Anal. Appl.: I, **57** (1977), 694-723; II, **58** (1977), 202-231; III, **59** (1977), 1-14.
- [72] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., **72** (1979), 247-273.
- [73] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Phase-change with volumetric heat sources: Stefan's scheme vs. enthalpy formulation*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl., **4** (1985), 131-149.
- [74] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Mushy regions with variable temperature in melting processes*, Boll. Un. Mat. Ital., **4-B** (1985), 601-626.
- [75] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *A parabolic-hyperbolic free boundary problem*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **17** (1986), 67-73.
- [76] A. FASANO - M. PRIMICERIO, *A critical case for the solvability of Stefan-like problems*, Math. Meth. Appl. Sci., **5** (1983), 84-96.
- [77] A. FASANO - M. PRIMICERIO - S. KAMIN, *Regularity of weak solutions of one-dimensional two-phase Stefan problems*, Ann. Mat. Pura Appl., **115** (1977), 341-348.
- [78] M. FRÉMOND, *Variational formulation of the Stefan problem, coupled Stefan problem, frost propagation in porous media*, In: Proc. Conf. Computational Methods in Nonlinear Mechanics (J. T. Oden, ed.). University of Texas, Austin (1974), pp. 341-349.
- [79] A. FRIEDMAN, *Free boundary problems for parabolic equations. I, II, III*, J. Math. Mech., **8** (1959), 499-517; **9** (1960), 19-66; **9** (1960), 327-345.
- [80] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964.
- [81] A. FRIEDMAN, *The Stefan problem in several space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **133** (1968), 51-87.
- [82] A. FRIEDMAN, *One dimensional Stefan problems with non-monotone free boundary*, Trans. Amer. Math. Soc., **133** (1968), 89-114.
- [83] A. FRIEDMAN, *Analyticity of the free boundary for the Stefan problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **61** (1976), 97-125.
- [84] A. FRIEDMAN - D. KINDERLEHRER, *A one phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J., **25** (1975), 1005-1035.

- [85] I.G. GÖTZ - B. B. ZALTZMAN, *Nonincrease of mushy region in a nonhomogeneous Stefan problem*, Quart. Appl. Math., **XLIX** (1991), 741-746.
- [86] L. S. JIANG, *The two-phase Stefan problem. I, II*, Chinese Math., **4** (1963), 686-702; **5** (1964), 36-53.
- [87] S. KAMENOMOSTSKAYA, *On the Stefan problem*, Math. Sbornik, **53** (1961), 489-514 (Russian).
- [88] D. KINDERLEHRER - L. NIRENBERG, *Regularity in free boundary value problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4** (1977), 373-391.
- [89] D. KINDERLEHRER - L. NIRENBERG, *The smoothness of the free boundary in the one-phase Stefan problem*, Comm. Pure Appl. Math., **31** (1978), 257-282.
- [90] I. I. KOLODNER, *Free boundary problem for the heat equation with applications to problems with change of phase*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 220-231.
- [91] G. LAMÉ, B.P. CLAYPERON, *Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe solide*, Ann. Chem. Phys., **47** (1831), 250-256.
- [92] S. LUCKHAUS, *Solutions of the two-phase Stefan problem with the Gibbs-Thomson law for the melting temperature*, Euro. J. Appl. Math., **1** (1990), 101-111.
- [93] A. M. MEIRMANOV, *On the classical solvability of the Stefan problem*, Soviet Math. Dokl., **20** (1979), 1426-1429.
- [94] A. M. MEIRMANOV, *On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations*, Math. U.S.S.R.-Sbornik, **40** (1981), 157-178.
- [95] A. M. MEIRMANOV, *An example of nonexistence of a classical solution of the Stefan problem*, Soviet Math. Dokl., **23** (1981), 564-566.
- [96] O. A. OLEĪNIK, *A method of solution of the general Stefan problem*, Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 1350-1353.
- [97] M. PRIMICERIO, *Mushy regions in phase-change problems*, In: Applied Functional Analysis (R. Gorenflo, K.-H. Hoffmann, eds.). Lang, Frankfurt (1983), pp. 251-269.
- [98] J.-F. RODRIGUES (ed.), *Mathematical Models for Phase Change Problems*, Birkhäuser, Basel 1989.
- [99] L. RUBINSTEIN, *On the determination of the position of the boundary which separates two phases in the one-dimensional problem of Stefan*, Dokl. Acad. Nauk US-SR, **58** (1947), 217-220.
- [100] L. RUBINSTEIN - A. FASANO - M. PRIMICERIO, *Remarks on the analyticity of the free boundary for the one-dimensional Stefan problem*, Ann. Mat. Pura Appl., **125** (1980), 295-311.
- [101] D. SCHAEFFER, *A new proof of infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem*, J. Differential Equations, **20** (1976), 266-269.
- [102] G. SESTINI, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, Rivista Mat. Univ. Parma, **3** (1952), 3-23; **8** (1958), 1-209.
- [103] R. E. SHOWALTER, *Mathematical formulation of the Stefan problem*, Int. J. Eng. Sc., **20** (1982), 909-912.
- [104] J. STEFAN, *Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*, Sitzungber., Wien, Akad. Mat. Natur., **98** (1889), 473-484. Also *ibid.* pp. 614-634, 965-983, 1418-1442.
- [105] A. VISINTIN, *Two-scale Stefan problem with surface tension*, In: Nonlinear Analysis and Applications (N. Kenmochi, M. Niezgodka, P. Strzelecki, eds.) (Gakkotosho, Tokyo 1996), 405-424.
- [106] A. VISINTIN, *Two-scale model of phase transitions*, Physica D, **106** (1997), 66-80.

- [107] A. VISINTIN, *Nucleation and mean curvature flow*, Communications in P.D.E.s, **23** (1998), 17-35.
- [108] W. P. ZIEMER, *Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations*, Trans. A.M.S., **271** (1982), 733-748.

### 3. Opere generali sull'isteresi

#### MONOGRAFIE

- [109] G. BERTOTTI, *Hysteresis in Magnetism*, Academic Press, Boston 1998.
- [110] M. BROKATE, *Optimale Steuerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Nichtlinearitäten vom Hysteresis-Typ*, Lang, Frankfurt am Main (1987). English translation: Optimal control of ordinary differential equations with nonlinearities of hysteresis type. In: Automation and Remote Control, **52** (1991), **53** (1992).
- [111] M. BROKATE - J. SPREKELS, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Berlin 1996
- [112] E. DELLA TORRE, *Magnetic Hysteresis*, IEEE Press, 1999.
- [113] A. IVÁNYI, *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.
- [114] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ - A. V. POKROVSKIĬ, *Systems with Hysteresis*, Springer, Berlin 1989 (Russian ed. Nauka, Moscow 1983).
- [115] P. KREJČÍ, *Convexity, Hysteresis and Dissipation in Hyperbolic Equations*, Gakkotosho, Tokyo 1997.
- [116] I. D. MAYERGOYZ, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer, New York 1991.
- [117] A. VISINTIN, *Differential Models of Hysteresis*, Springer, Berlin 1994.

#### ARTICOLI DI RASSEGNA

- [118] M. BROKATE, *Elastoplastic constitutive laws of nonlinear kinematic hardening type*, In: Functional analysis with current applications in science, technology and industry (M. Brokate, A. H. Siddiqi, eds.), Longman, Harlow (1998), pp. 238-272.
- [119] Y. HUO - I. MUELLER, *Non-equilibrium thermodynamics of pseudoelasticity*, Cont. Mech. Thermodyn., **5** (1993), 163-204.
- [120] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ, *Equations with non-linearities of hysteresis type*, VII Int. Konf. Nichtlin. Schwing., Berlin 1975; Abh. Akad. Wiss. DDR, **3** (1977), 437-458 (Russian).
- [121] P. KREJČÍ, *Evolution variational inequalities and multidimensional hysteresis operators*, In: Nonlinear differential equations (P. Drábek, P. Krejčí, P. Takáč, eds.) Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, London (1999), pp. 47-110.
- [122] I. MUELLER, *Six lectures on shape memory*, Proceedings of a Summer School held in Banff in 1995. AMS. CRM Proceedings and Lecture Notes, **13** (1998), pp. 125-161.
- [123] J. W. MACKI - P. NISTRI - P. ZECCA, *Mathematical models for hysteresis*, S.I.A.M. Review, **35** (1993), 94-123.
- [124] A. VISINTIN, *Mathematical models of hysteresis*, In: Topics in Nonsmooth Mechanics (J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, G. Strang, eds.), Birkhäuser, Basel 1988, pp. 295-326.
- [125] A. VISINTIN, *Mathematical models of hysteresis*, In: Modelling and optimization of distributed parameter systems (K. Malanowski et al., ed.), Chapman and Hall, (1996), pp. 71-80

- [126] A. VISINTIN, *Mathematical models of hysteresis. A survey*, In: Nonlinear Partial Differential Equations. College de France. Vol. XIII (D. Cioranescu, J. L. Lions, eds.), Longman, Harlow (1998), pp. 327-338.
- [127] A. VISINTIN, *Six talks on hysteresis*, Proceedings of a Summer School held in Banff in 1995. AMS. CRM Proceedings and Lecture Notes, **13** (1998), pp. 207-236.

## ATTI DI CONVEGNI

- [128] M. BROKATE - K. DRESSLER - P. KREJČÍ - T. I. SEIDMAN - L. TAVERNINI - A. VISINTIN, *Contributions to the session on Problems in Hysteresis*, In: Nonlinear Analysis, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts (ed. V. Lakshmikantham), De Gruyter, Berlin (1996), 797-806.
- [129] M. BROKATE - N. KENMOCHI - I. MÜLLER - J. F. RODRIGUES - C. VERDI (A. VISINTIN, ed.), *Phase Transitions and Hysteresis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1584. Springer, Berlin 1994.
- [130] A. VISINTIN (ed.), *Models of Hysteresis*, Proceedings of a meeting held in Trento in 1991. Longman, Harlow 1993.

## 4. Altri lavori sull'isteresi

- [131] A. BOSSAVIT - C. EMSON - I. D. MAYERGOYZ, *Géométrie différentielle, éléments finis, modèles d'hystérésis*, Eyrolles, Paris 1991.
- [132] R. BOUC, *Solution périodique de l'équation de la ferromagnétisation avec hystérésis*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **263** (1966), 497-499.
- [133] R. BOUC, *Modèle mathématique d'hystérésis et application aux systèmes à un degré de liberté*, Thèse, Marseille 1969.
- [134] M. BROKATE, *Optimale Steuerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Nichtlinearitäten vom Hysteresis-Typ*, Habilitations Schrift. Lang, Frankfurt am Main 1987. English translation: Optimal control of ordinary differential equations with nonlinearities of hysteresis type. In: Automation and Remote Control, **52** (1991) and **53** (1992).
- [135] M. BROKATE, *On a characterization of the Preisach model for hysteresis*, Rend. Sem. Mat. Padova, **83** (1990), 153-163.
- [136] V. CHERNORUTSKIĬ - D. RACHINSKIĬ: *On uniqueness of an initial-value problem for ODE with hysteresis*, NoDEA, **4** (1997), 391-399.
- [137] A. DAMLAMIAN - A. VISINTIN, *Une généralisation vectorielle du modèle de Preisach pour l'hystérésis*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **297** (1983), 437-440.
- [138] P. DUHEM, *The evolution of mechanics*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980. Original edition: L'évolution de la mécanique. Joanin, Paris 1903.
- [139] M. HILPERT, *On uniqueness for evolution problems with hysteresis*, In: Mathematical Models for Phase Change Problems (J. F. Rodrigues, ed.) (Birkhäuser, Basel 1989), 377-388.
- [140] K.-H. HOFFMANN - J. SPREKELS - A. VISINTIN, *Identification of hysteresis loops*, J. Comp. Phys., **78** (1988), 215-230.
- [141] A.Y. ISHLINSKIĬ, *Some applications of statistical methods to describing deformations of bodies*, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Techn. Ser., **9** (1944), 580-590 (Russian).
- [142] E. MADELUNG, *Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors*. Ann. Phys., **17** (1905), 861-890.

- [143] M.A. KRASNOSEL'SKIĬ - B. M. DARINSKIĬ - I. V. EMELIN - P. P. ZABREĬKO, E. A. LIFSIC - A. V. POKROVSKIĬ, *Hysterant operator*, Soviet Math. Dokl., **11** (1970), 29-33.
- [144] I. D. MAYERGOYZ, *Mathematical models of hysteresis*, Phys. Rev. Letters, **56** (1986), 1518-1521.
- [145] I. D. MAYERGOYZ, *Mathematical models of hysteresis*, I.E.E.E. Trans. Magn., **22** (1986), 603-608.
- [146] Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic work-hardening*, J. Mech. Phys. Solids, **15** (1967), 163-175.
- [147] I. MÜLLER, *A model for a body with shape-memory*, Arch. Rational Mech. Anal., **70** (1979), 61-77.
- [148] I. MÜLLER, *On the size of hysteresis in pseudoelasticity*, Continuum Mech. Thermodyn., **1** (1989), 125-142.
- [149] L. NÉEL, *Theorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh. I. Les déplacements d'une paroi isolée; II. Multiples domaines et champ coercive*, Cahiers de Physique, **12** (1942), 1-20; **13** (1943), 18-30.
- [150] L. PRANDTL: *Spannungverteilung in plastischen Körpern*, In: Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech. Delft (1924), pp. 43-54.
- [151] L. PRANDTL, *Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper*, Z. Angew. Math. Mech., **8** (1928), 85-106.
- [152] F. PREISACH, *Über die magnetische Nachwirkung*, Z. Physik, **94** (1935), 277-302.
- [153] LORD RAYLEIGH, *On the behaviour of iron and steel under the operation of feeble magnetic forces*, Phil. Mag., **23** (1887), 225-248.
- [154] C. VERDI - A. VISINTIN, *Numerical approximation of hysteresis problems*, I.M.A. J. Numer. Anal., **5** (1985), 447-463.
- [155] C. VERDI - A. VISINTIN, *Numerical approximation of the Preisach model for hysteresis*, Math. Model. and Numer. Anal., **23** (1989), 335-356.
- [156] A. VISINTIN, *A model for hysteresis of distributed systems*, Ann. Mat. Pura Appl., **131** (1982), 203-231.
- [157] A. VISINTIN, *On the Preisach model for hysteresis*, Nonlinear Analysis, T.M.A., **9** (1984), 977-996.
- [158] A. VISINTIN, *Hysteresis and semigroups*, In: Models of hysteresis (A. Visintin, ed.), Longman, Harlow (1993), pp. 192-206.
- [159] A. VISINTIN, *Modified Landau-Lifshitz equation for ferromagnetism*, Physica B, **233** (1997), 365-369.
- [160] P. WEISS - J. DE FREUDENREICH, *Etude de l'aimantation initiale en fonction de la température (suite et fin)*, Arch. Sci. Phys. Nat., (Genève), **42** (1916), 449-470.

##### 5. Altre referenze

- [161] V. BARBU, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, Leyden 1976.
- [162] PH. BÉNILAN, *Equations d'Évolution dans un Espace de Banach Quelconque et Applications*, Thèse, Orsay 1972.
- [163] M. BERTSCH - P. PODIO-GUIDUGLI - V. VALENTE, *On the dynamics of deformable ferromagnets 1. Global weak solutions for soft ferromagnets at rest*, Preprint, 1999.
- [164] H. BRÉZIS, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [165] W. F. BROWN JR., *Micromagnetics*, Krieger, Huntington 1978.

- [166] H. S. CARSLAW - J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press and Oxford University Press, New York, 1988.
- [167] G. DUVAUT - J. L. LIONS, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris 1972.
- [168] L. LANDAU - E. LIFSHITZ, *On the theory of dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, *Physik. Z. Sowietunion*, **8** (1935), 153-169.
- [169] L. LANDAU - E. LIFSHITZ, *Statistical physics*, Pergamon Press, Oxford 1969.
- [170] J. L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris 1969.
- [171] A. VISINTIN, *On Landau-Lifshitz equations in ferromagnetism*, *Japan J. Appl. Math.*, **2** (1985), 69-84.
- [172] P. WEISS, *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique*, *J. Physique*, **6** (1907), 661-690.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento  
38050 Povo (Trento) - Italia  
E-mail: Visintin@science.unitn.it