BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANNA VERDE

Regolarità degli Jacobiani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 415–417.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_415_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Regolarità degli Jacobiani.

ANNA VERDE

Prendendo spunto dalla teoria $\mathcal{H}^1$ degli Jacobiani sviluppata in [1], studiamo l'operatore non lineare

$$Z : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$$

che associa ad un elemento h dello spazio di Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, l'elemento

$$Zh = h \log \left(e + \frac{|h|}{\|h\|} \right)$$

Notiamo che

$$(2) \quad Zh \in L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow h \in L \log L(\mathbb{R}^n)$$

Lo spazio di Zygmund $L \log L(\mathbb{R}^n)$ è munito della norma $\|h\|_{L \log L(\mathbb{R}^n)} = \|Zh\|_1$. Sebbene in generale Zh non appartenga allo spazio L^1_{loc} , siamo comunque in grado di dare significato a Zh come distribuzione di Schwartz di ordine 1.

Per una distribuzione F di ordine 1 possiamo introdurre la seminorma $[F]_R = \sup \{ |F\varphi| ; \varphi \in C_0^\infty(B) \|\nabla\varphi\|_\infty = 1 \}$ dove l'estremo superiore è su tutte le sfere $B \subset \mathbb{R}^n$ di raggio R . Con tale notazione, possiamo enunciare brevemente la nostra stima

$$(3) \quad [Zf - Zg]_R \leq C_R \|f - g\|_{\mathcal{H}^1} \log \left(e + \frac{\|f\|_{\mathcal{H}^1} + \|g\|_{\mathcal{H}^1}}{\|f - g\|_{\mathcal{H}^1}} \right)$$

Richiamiamo un risultato di E. Stein [S]:

$$h \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n), \quad h \geq 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto} \Rightarrow h \log h \in L^1_{loc}(\Omega)$$

La stima (3) consente di provare il seguente risultato,

TEOREMA 1. – *Supponiamo che le funzioni h_k convergano ad h in $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e siano non negative in un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora*

$$(4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k - h\|_{L \log L(E)} = 0$$

per ogni compatto $E \subseteq \Omega$.

Interessanti conseguenze di tali risultati riguardano l'operatore Jacobiano. Precisamente si ha che se $F \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ allora $J(F) \log |J(F)|$, con $J(F) =$

$\det DF$, ha significato come distribuzione di Schwartz. Inoltre nel caso di Jacobiani non negativi si ha

COROLLARIO 1. – Sia $\{F_k\}$ una successione di mappe che conservano l'orientamento $F_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ convergenti ad F in $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|J(F_k) - J(F)\|_{L \log L(E)} = 0$$

per ogni compatto $E \subset \Omega$.

Poichè $J(F_k) - J(F)$ può cambiare segno in Ω , la convergenza forte in $L \log L(E)$ non è una immediata conseguenza del risultato di S. Müller [5]:

$$F \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad J(F)(x) \geq 0 \Rightarrow J(F) \in L \log L(E).$$

Lo studio di fenomeni di cancellazione per Jacobiani può essere osservato anche negli spazi di Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}(\Omega)$ su domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dove $\mathcal{P}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione di Orlicz, cioè una funzione continua, strettamente crescente e tale che $\mathcal{P}(0) = 0$ e $\mathcal{P}(\infty) = \infty$. Seguendo la teoria classica degli spazi di Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$, definiamo la funzione massimale $\mathcal{M}f = \mathcal{M}_{\Omega}(f)$ di una distribuzione $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e diciamo che $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}(\Omega)$ se $\mathcal{M}f$ appartiene allo spazio di Orlicz $L^{\mathcal{P}}(\Omega)$. In analogia con R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes [1] mostriamo che lo Jacobiano debole o distribuzionale J_F di una mappa F con $|DF|^n \in L^{\mathcal{P}}(\Omega)$, definito come

$$(7) \quad J_F(\varphi)(x) = \int_{\Omega} \varphi(x) J(F)(x) dx \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

appartiene agli spazi di Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}(\Omega)$.

Precisamente si ha

TEOREMA 2. – Sia $\mathcal{P}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione di Orlicz convessa tale che la funzione $t \rightarrow t^{-\alpha} \mathcal{P}(t)$ sia crescente per $\alpha > \frac{n}{n+1}$. Consideriamo $F = (F^1, \dots, F^n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ nella classe di Sobolev-Orlicz $W^{1,\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con Ω cubo di $\mathbb{R}^n$ e $\Phi(t) = \mathcal{P}(t^n)$. Allora:

i) Lo Jacobiano debole J_F appartiene allo spazio di Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}(\Omega)$ e

$$(8) \quad \|J_F\|_{\mathcal{H}^{\mathcal{P}}(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}}(n) \|DF\|_{L^{\Phi}(\Omega)}^n$$

ii) Se, inoltre, $\int_1^{\infty} s^{-2} \mathcal{P}(s) ds = \infty$ e J_F è positivo allora la distribuzione J_F appartiene a $L_{loc}^{\mathcal{R}}(\Omega)$. Per ogni compatto $E \subset \Omega$ si ha

$$(9) \quad \|J_F\|_{L^{\mathcal{R}}(E)} \leq C_{\mathcal{P}}(n, E) \|DF\|_{L^{\Phi}(\Omega)}^n$$

dove $\mathcal{R}$ è la funzione definita da

$$(10) \quad \mathcal{R}(\tau) = \mathcal{P}(\tau) + \tau \int_0^\tau s^{-2} \mathcal{P}(s) ds ,$$

Tale teorema ha come caso particolare il risultato di S. Müller [5].

In altre parole, il Teorema 2 si può leggere come un risultato di maggiore integrabilità per determinanti Jacobiani nell'ambito degli spazi di Orlicz.

BIBLIOGRAFIA

- [1] COIFMAN R., LIONS P. L., MEYER Y. e SEMMES S., *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl., **7** (1993), 247-286.
- [2] GRECO L. e VERDE A., *On some nonlinear expressions of the Jacobian*, Differential and integral equations, in corso di stampa.
- [3] IWANIEC T. e VERDE A., *Note on the operator $\mathcal{L}(f) = f \log |f|$* , Jour. of Funct. Anal., **169** (1999), 391-420.
- [4] IWANIEC T. e VERDE A., *A study of Jacobians in Hardy-Orlicz Spaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect., **129 A** (1999), 539-570.
- [5] MÜLLER S., *A surprising higher integrability property of mappings with positive determinant*, Bull. AMS, **21** (1989), 245-248.
- [6] STEIN E. M., *Note on the class $L \log L$* , Studia Math., **32** (1969), 305-310.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»

Università degli studi di Napoli «Federico II»

e-mail: averde@matna2.dma.unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI

Direttore di ricerca: Prof. Carlo Sbordone

Università degli studi di Napoli «Federico II»