Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Antoci

Applicazioni della teoria dello scattering all'operatore di Laplace-Beltrami sulle forme differenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 259–262.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 259-262

Applicazioni della teoria dello scattering all'operatore di Laplace-Beltrami sulle forme differenziali.

FRANCESCA ANTOCI

1. – Introduzione.

L'obiettivo principale della tesi è stato quello di investigare in quale misura la teoria dello scattering, sviluppata da Lax e Phillips per l'equazione delle onde per funzioni sia in ambito euclideo ([2]) sia poi in ambito iperbolico ([3]), possa essere estesa al caso dell'equazione delle onde per p-forme differenziali su varietà Riemanniane complete non compatte.

La teoria dello scattering è una branca estremamente vasta dell'analisi funzionale, legata, da un lato, a problemi basilari di fisica matematica e di meccanica quantistica, e, dall'altro, alla teoria spettrale degli operatori autoaggiunti. Proprio per questo, può essere uno strumento essenziale per l'indagine dei legami tra la geometria di una varietà, contenuta in qualche modo nello spettro dell'operatore di Laplace-Beltrami, e l'analisi che su tale varietà può essere sviluppata.

Ci sono vari approcci alla teoria dello scattering; tra gli altri, quello dinamico, basato sugli operatori d'onda, quello sviluppato da Lax e Phillips, quello stazionario.

Nella tesi ci si è concentrati in particolare sui primi due approcci, richiamati molto brevemente nelle sezioni successive (per un'esposizione esaustiva si veda ([4])).

2. – Approccio dinamico.

Nell'approccio dinamico si considerano due sistemi di evoluzione, uno, quello "non perturbato", descritto dal gruppo di operatori unitari $e^{iH_0 t}$ corrispondente a un operatore autoaggiunto H_0, e l'altro, quello "perturbato", descritto dal gruppo ad un parametro di operatori unitari $e^{iH_1 t}$ corrispondente ad un altro operatore autoaggiunto H_1. Per semplicità supporremo che sia H_0 sia H_1 agiscano su un medesimo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Se si indica con $P_{ac}(H_0)$ la proiezione di $\mathcal{H}$ sul sottospazio assolutamente continuo di H_0, gli operatori d'onda $W^{\pm}(H_1, H_0)$ sono definiti da:

$$W^{\pm}(H_1, H_0) := s - \lim_{t \to \mp\infty} e^{iH_1 t} e^{-iH_0 t} P_{ac}(H_0). \tag{1}$$

Gli operatori d'onda si dicono essere completi se sono degli isomorfismi dal sottospazio assolutamente continuo di H_0 al sottospazio assolutamente continuo di H_1.

Se gli operatori d'onda esistono e sono completi, l'operatore di scattering è definito come

$$S = W^+(H_1, H_0)(W^-(H_1, H_0))^{-1}. \tag{2}$$

Un esempio classico è quello in cui il primo sistema rappresenta l'evoluzione delle soluzioni dell'equazione delle onde in $\mathbf{R}^n$, e il secondo l'evoluzione delle soluzioni dell'equazione delle onde in un dominio esterno di $\mathbf{R}^n$, cioè in presenza di un ostacolo.

Perchè gli operatori d'onda esistano è necessario che la perturbazione "non si senta asintoticamente", dimodochè ogni soluzione del problema perturbato, per $t \to \pm\infty$, coincida con una soluzione del problema libero. L'operatore d'onda $W^{\pm}(H_1, H_0)$, se esiste, fa corrispondere ad ogni dato iniziale f del problema libero l'unico dato iniziale $f_{\pm}$ del problema perturbato tale che

$$\|e^{iH_1 t} f_{\pm} - e^{iH_0 t} f\|_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{3}$$

per $t \to \pm\infty$.

Se gli operatori d'onda $W^{\pm}(H_1, H_0)$ esistono e sono completi, $\sigma_{ac}(H_0) = \sigma_{ac}(H_1)$.

Dunque la teoria dello scattering nell'approccio dinamico può essere usata per ottenere informazioni sullo spettro di un operatore "perturbato" H_1 a partire da quello di un operatore "non perturbato" H_0.

3. – L'approccio di Lax e Phillips.

Sia $U(t)$, $t \in \mathbf{R}$, un gruppo fortemente continuo di operatori unitari su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (come può essere, ad esempio, quello dell'equazione delle onde); un sottospazio chiuso D_+ (risp. D_-) di $\mathcal{H}$ si dice uscente (risp. entrante) per $U(t)$ se

1. per ogni $t > 0$ (risp. per ogni $t < 0$) $U(t)D_{\pm} \subseteq D_{\pm}$;
2. $\bigcap_t U(t)\, D_{\pm} = \{\underline{0}\}$;
3. $\overline{\bigcup_t U(t)\, D_{\pm}} = \mathcal{H}$.

Se $U(t)$ è il gruppo unitario che descrive l'evoluzione delle soluzioni dell' equazione delle onde in $\mathbf{R}^n$, per n dispari, D_+ (risp. D_-) può essere preso come lo spazio dei dati iniziali $f = (f_1, f_2)$ corrispondenti a soluzioni che si annullano per $|x| < t$, $\forall t > 0$ (risp. per $|x| < -t$, $\forall t < 0$). (Per questo è fondamentale che valga il principio di Huygens, da cui la scelta di n dispari).

Un altro esempio è il seguente: sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}; N)$, dove N è uno spazio di Hilbert, e sia $T_0(t)$ il gruppo delle traslazioni a destra di t unità; allora $D_+ := L^2(0, +\infty; N)$ e $D_- := L^2(-\infty, 0; N)$ sono rispettivamente sottospazi uscenti ed entranti per $T_0(t)$.

Il teorema di base della teoria dello scattering nell'approccio di Lax e Phillips asserisce che essenzialmente tutti i sottospazi uscenti ed entranti sono di questo tipo. Più precisamente,

TEOREMA 3.1. – *Dato un gruppo fortemente continuo di operatori unitari $U(t)$ agente su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, e dato un sottospazio uscente D_+ (risp.*

un sottospazio entrante D_-) per $U(t)$, ad esso si può associare una rappresentazione di traslazione uscente (risp. entrante), cioè un'applicazione unitaria

$$\mathcal{R}_\pm : \mathcal{H} \to L^2(\mathbf{R}; N)$$

tale che

$$\mathcal{R}_+ D_+ = L^2(0, +\infty; N)$$

$$(\textit{risp.}\ \mathcal{R}_- D_+ = L^2(-\infty, 0; N))$$

e

$$U_\pm(t) := \mathcal{R}_\pm U(t) \mathcal{R}_\pm^{-1} = T_0(t).$$

Nel caso dell'equazione delle onde su $\mathbf{R}^n$, per n dispari, queste rappresentazioni di traslazione possono essere costruite esplicitamente utilizzando la trasformata di Radon.

Se esistono sia un sottospazio uscente D_+ sia un sottospazio entrante D_- per $U(t)$ su $\mathcal{H}$, e se $D_+ \perp D_-$, l'operatore di scattering è definito da

$$S := \mathcal{R}_+ (\mathcal{R}_-)^{-1}. \tag{4}$$

La costruzione dei sottospazi uscenti ed entranti per il gruppo $U(t)$ è spesso ottenuta a partire da sottospazi uscenti ed entranti per un gruppo “non perturbato" $U_0(t)$ legato in qualche modo a $U(t)$; sotto certe ipotesi sul legame tra $U(t)$ e $U_0(t)$ gli operatori d'onda esistono, sono completi e gli operatori di scattering (2) e (4) coincidono.

È essenziale notare che se esistono sottospazi uscenti o entranti per $U(t) = e^{iHt}$, allora H deve necessariamente avere spettro puramente assolutamente continuo, con molteplicità spettrale costante, e uguale all'intera retta reale $\mathbf{R}$.

4. – Scattering per forme differenziali su varietà.

Estendere la teoria dello scattering di Lax e Phillips al caso dell'equazione delle onde per forme differenziali su una generica varietà Riemanniana si rivela essere complicato e, nella maggior parte dei casi, impossibile, non solo per via delle ostruzioni spettrali già ricordate, ma anche per la mancanza di strumenti analitici essenziali, quale la trasformata di Radon e l'analisi di Fourier.

Dunque si è scelto di considerare lo spazio iperbolico H^{n+1}, sia perchè su questo tipo di varietà è stata costruita una trasformata di Radon ([5]), sia perchè in questo caso lo spettro dell'operatore di Laplace-Beltrami sulle p-forme è noto ([4]).

PROPOSIZIONE 4.1. – Per $p = \frac{n+1}{2}$ $\sigma_p(\Delta_p) = \{0\}$, 0 *è un autovalore di molteplicità infinita, e* $\sigma(\Delta_p) = \sigma_{ac}(\Delta_p) = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, *con molteplicità costante; per* $p \neq \frac{n+1}{2}$, $\sigma_p(\Delta_p) = \emptyset$ *e* $\sigma(\Delta_p) = \sigma_{ac}(\Delta_p) = \left[\min\left\{\left(\frac{n-2p}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2p+2}{2}\right)^2\right\}\right)$, *con molteplicità non costante.*

Di qui segue una prima serie di risultati ottenuti nella tesi:

1. A causa di ostruzioni spettrali, non è possibile sviluppare una teoria dello scattering secondo l'approccio di Lax e Phillips per l'equazione delle onde per p-forme su H^{n+1};

2. Il principio di Huygens per l'equazione delle onde per le p-forme su H^{n+1} non vale.

Il primo risultato segue dal calcolo dello spettro del generatore del gruppo $U(t)$ associato all'equazione delle onde, mentre per il secondo si è dimostrato che se valesse il principio di Huygens sarebbe possibile costruire un sottospazio entrante per $U(t)$.

Se invece si considerano le k-forme cochiuse su H^{2k+1} (o, per dualità, le $(k+1)$-forme chiuse su H^{2k+1}), tramite la trasformata di Radon introdotta in ([5]) si riesce a dimostrare la validità del principio di Huygens per l'equazione delle onde. Di qui segue un'altra serie di risultati ottenuti:

1. Per l'equazione delle onde per le k-forme cochiuse su H^{2k+1} esistono sottospazi entranti ed uscenti.

2. Lo spettro dell'operatore di Laplace-Beltrami sulle k-forme cochiuse è uguale a $[0, +\infty)$, è puramente assolutamente continuo e ha molteplicità costante.

Nella tesi, inoltre, provando l'esistenza di opportuni operatori d'onda, si è dimostrato che se M è la varietà Riemanniana completa ottenuta modificando la metrica euclidea su $\mathbf{R}^n$ su un insieme compatto, allora lo spettro assolutamente continuo dell'operatore di Laplace-Beltrami sulle 1-forme è uguale a $[0, +\infty)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. DONNELLY, *The differential form spectrum of hyperbolic space*, manuscripta math., **33** (1981), 365-385.

[2] P. D. LAX, R. S. PHILLIPS, *Scattering Theory*, Revised Edition, Academic Press (1989).

[3] P. D. LAX, R. S. PHILLIPS, *Scattering Theory for Automorphic functions*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton (1976).

[4] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics vol. III Scattering theory*, Academic Press, New York (1972).

[5] T. P. BRANSON, G. OLAFSSON, H. SCHLICHTKRULL, *A bundle valued Radon transform, with applications to invariant wave equations*, Quart. J. Math. Oxford (2), **45** (1994), 429-461.

Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino
e-mail: antoci@calvino.polito.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Genova)- Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Edoardo Vesentini, Politecnico di Torino