BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GABRIELE LOLLI

La matematica, la mente, il cervello

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.2, p. 121–146.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_2_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol III-A, Agosto 2000, 121-146

La matematica, la mente, il cervello.

GABRIELE LOLLI

È quasi naturale per chi abbia un atteggiamento scientifico, anche se non ideologicamente materialista, chiedersi come il pensiero sia prodotto dal cervello; nel caso della matematica la domanda su come essa sia possibile permette anche, e spesso nasconde quella su come sia possibile che non lo sia: i luoghi comuni sulla predisposizione ereditaria, sull'avere il «pallino» o sull'essere «negati» sono pregiudizi consolatori buoni per mettere l'animo in pace. D'altra parte, il «come è possibile che non lo sia» ha importanza educativa, non solo terapeutica, anche per seguire e adattarsi allo sviluppo cognitivo nei giovani.

I matematici si sono interrogati sulla produzione mentale della loro attività non appena si sono rese disponibili le prime osservazioni su quella scatola nera che è il cervello. All'inizio del secolo scorso ad esempio, Federigo Enriques aveva proposto una logica psicologica, in contrapposizione o integrazione di quella grammaticale ([1]); le operazioni psicologiche erano per lui, secondo il pensiero del tempo, associazioni e dissociazioni che permettono di costruire nuovi oggetti nel rispetto delle leggi logico-insiemistiche. Enriques garantiva la possibilità della conoscenza con l'assunzione di una corrispondenza tra gli invarianti del pensiero e gli invarianti dell'esperienza (postulato della conoscenza). Egli doveva tuttavia essere consapevole del carattere precario e incompleto delle sue considerazioni, se riteneva che ulteriori sostegni e approfondimenti dovessero essere perseguiti, auspicando nel 1901 che la psicologia razionale si integrasse con quella neurofisiologica; alla fine del capitolo sulla logica dei *Problemi della scienza* discute infatti le scarne conoscenze allora disponi-

([1]) Si veda Enriques (1906) e anche (1901). Per un'esposizione del pensiero di Enriques su questo argomento si veda Lolli (1998).

bili sul funzionamento del cervello, nella speranza che ne possano venire conferme alla sua impostazione.

Tra matematica e cervello c'è una relazione in entrambi i sensi. Oggi la matematica serve a studiare il cervello, grazie ai progressi nello studio di sistemi dinamici con retroazioni non lineari ([2]). Viceversa, ci si chiede se lo studio neurofisiologico del cervello possa dirci qualcosa di significativo e di preciso, in dettaglio, sui vincoli che l'architettura neuronale geneticamente determinata impone all'attività matematica. Sembra che finalmente si sia aperta una strada, con gli studi recenti di neurofisiologia e di psicologia evolutiva. L'argomento sta allora diventando appassionante e di moda. Hanno iniziato una dozzina d'anni fa Jean-Pierre Changeux e Alain Connes, un neuroscienziato e un matematico, a rifletterci insieme e a parlarne ([3]).

Le scoperte sulle facoltà umane derivanti dalla neurofisiologia del cervello finora erano basate soprattutto sullo studio delle patologie, dei cosiddetti deficit; recenti progressi nella strumentazione (PET, elettroencefalografia) permettono analisi non invasive molto più precise e positive.

Ma per poter essere interpretati in relazione alla mente umana, i risultati della neurofisiologia devono ancora, per ora, finché la ricerca rimane al livello chimico-biologico, essere integrati con altre ricerche e teorie, soprattutto psicologiche, ma anche linguistiche e antropologiche.

La psicologia purtroppo è condizionata dal carattere talvolta non conclusivo dei suoi esperimenti, e da una tendenza a generalizzazioni impulsive, volatili e nello stesso tempo ideologicamente rigide, che di solito finiscono per bloccare la ricerca. Un esempio è il peso avuto dalla teoria di Piaget relativa all'evoluzione mentale dei bambini, o quanto l'ostracismo seguito alla storia del cavallo intelligente Hans, all'inizio del Novecento, abbia indotto scetticismo e rinuncia a indagare sulle abilità animali con i numeri.

([2]) Un'introduzione è in Grossberg (2000).

([3]) Changeux e Connes (1989). La formula del dialogo tra rappresentanti di queste due discipline è riproposta nel recente Boncinelli e Bottazzini (2000).

Negli ultimi anni tuttavia, si sono fatti passi avanti notevoli nell'ideazione, controllo ed esecuzione di esperimenti con neonati o bambini di pochi mesi, ed anche con gli animali; i risultati hanno rivoluzionato le idee tradizionalmente accettate e si integrano con quelli ottenuti con il *functional imaging* dalla neurofisiologia.

Due libri recenti, di Dehaene (1997) e di Butterworth (1999), costituiscono un'esauriente introduzione all'argomento; apparentemente di divulgazione, essi sono in realtà, soprattutto il primo, una sintesi delle conclusioni temporanee della ricerca attuale. Importante e utile sul versante psicologico è anche il libro di Karmiloff-Smith (1992).

Questo articolo non è altro che una presentazione con invito alla loro lettura; ivi si troveranno gli ulteriori riferimenti bibliografici sulle ricerche di cui qui si dà notizia; tutte le informazioni di carattere neurofisiologico e psicologico, anche quelle di carattere provvisorio o congetturale, sono tratte da queste esposizioni.

Animali

Bisogna incominciare a riassumere le conclusioni a cui si è pervenuti a proposito delle capacità aritmetiche degli animali. Negli anni Cinquanta e Sessanta si è riusciti a predisporre esperimenti appropriati eliminando, o così si spera, tutte le possibili fonti di errori, in particolare l'involontaria comunicazione da parte dello sperimentatore, anche per vie non verbali o gestuali, ad esempio olfattive, che pure sono praticabili.

I topi imparano facilmente a svolgere compiti in cui devono contare piccoli numeri, ma le risposte restano sempre un po' imprecise: se 4 è la risposta corretta, 4 è la risposta nella maggioranza dei casi, dopo l'addestramento, ma talvolta anche 3 o 5.

Una constatazione importante, ottenuta usando stimoli diversi come suoni e luci insieme o mescolati, riguarda la natura astratta del contare, perché i topi generalizzano e contano sia rispetto alla durata che al numero delle note, o ai colori o altri stimoli combinati. Quindi il contare non è strettamente legato ad altre capacità percettive; si direbbe che sia una capacità autonoma, e che cogliere il numero approssimato di un insieme di oggetti non sia più difficile che coglierne la forma o il colore.

Per i topi non esistono resoconti di addizioni, mentre alcuni scimpanzé sono stati addestrati, sia pure con molta difficoltà e tempo, a fare addirittura qualche operazione con frazioni.

È invece ovvia per tutti gli animali l'utilità per la sopravvivenza di sapere riconoscere la relazione di «maggiore»; negli animali, studiati anche in condizioni selvatiche, questa capacità si manifesta non solo nell'opposizione grande-piccolo, o tanti-pochi, ma anche numericamente; alcuni animali, ad esempio tigri, non attaccano se non sono in numero superiore ai nemici, a meno che non ci siano i piccoli da difendere, ma il numero dei nemici è valutato di solito in base a indizi indiretti come rumori od odori, mentre il numero del proprio gruppo in base alla vista o altri stimoli.

La capacità di confronto ha limitazioni dovute principalmente a due effetti, l'effetto *grandezza* e l'effetto *vicinanza*. Con il primo s'intende che quanto più sono vicini i numeri, tanto più è probabile confonderli; con il secondo che quanto più grandi sono tanto più è difficile distinguerli, se sono prossimi: 48 e 50 si confondono più facilmente di 4 e 6, ma 45 e 50 sono ben distinti.

Da queste e altre analoghe proprietà del comportamento degli animali viene indotta una caratteristica della loro dotazione mentale ereditaria.

Il modulo matematico

Il cervello umano ha organi mentali specializzati, anche se non si tratta di organi delimitati anatomicamente, ma piuttosto funzionalmente. Per esprimere questa struttura, si usa il concetto di *modulo*, introdotto dal filosofo Jerry Fodor ([4]) per descrivere l'elaborazione degli stimoli sensoriali: l'architettura della mente sarebbe composta da un'elaborazione centrale, dai trasduttori delle impressioni sensoriali e dai moduli, o analizzatori di input. I moduli trasformano le stimolazioni passate dai trasduttori in rappresentazioni. Sono geneti-

([4]) In Fodor (1983); per una discussione critica del concetto di modulo si veda Lolli (1995).

camente specificati, con architettura neurale fissa, il che significa che è geneticamente programmato che gruppi di neuroni, non necessariamente contigui (e non necessariamente tutti individuati), si attivino, a una scadenza geneticamente determinata, di solito precoce, per svolgere tali funzioni. Se non lo fanno, il recupero posteriore è molto problematico. I moduli hanno uno scopo finalizzato, sono veloci, automatici, ordinativi, cognitivamente impenetrabili, guidati dallo stimolo, informazionalmente isolati e hanno una base di dati riservata. Questi termini significano in breve che ad esempio non si può non vedere qualcosa nel campo visivo, non si deve ordinare di vederlo, e che salvo casi eccezionali il vederlo è insensibile ai disturbi di altre sensazioni e di altre attività di altri moduli o dell'elaborazione centrale. I processi centrali invece sono lenti, si possono attivare oppure no, migliorano con l'esercizio; il calcolo simbolico vero e proprio sembra di questo secondo tipo.

In verità è discutibile, e discusso, che si possano ammettere moduli con tutte queste caratteristiche. Steve Greenberg, *cit.*, è scettico in proposito e descrive modelli matematici che mostrano interazioni tra processi paralleli di elaborazioni sensoriali diverse. Ciò nonostante, l'applicazione del concetto si è estesa, anche in forma metaforica. La numerosità appare come una nuova dimensione della percezione sensoriale, accanto a quelle tradizionali, del colore o della forma. Il cervello dovrebbe avere perciò un modulo, che permette di cogliere la cardinalità di piccoli insiemi di oggetti ([5]).

Il modulo è descritto da Dehaene, in gergo informatico, come un *accumulatore*. L'accumulatore agisce in modo analogico, continuo, come un recipiente che si riempia d'acqua, *all'incirca* della stessa quantità, per esempio una *brocca*, per ogni unità presente. Così si rende ragione delle caratteristiche individuate nelle prestazioni degli animali, con tutti i loro effetti caratteristici.

Sono state costruite reti neurali che confermano la possibilità di un accumulatore del genere. In queste reti, dopo un addestramento

([5]) Karmiloff-Smith non ritiene che si possa parlare di un modulo matematico, ma che non si possano non ammettere predisposizioni innate che pongono vincoli all'elaborazione di quello che concerne il numero.

per normalizzare il riconoscimento di oggetti, indipendentemente dalla grandezza o durata di esposizione, si ottiene una rappresentazione di numeri che riflette le considerazioni precedenti sull'accumulatore; ad esempio un neurone che si attiva in presenza di quattro oggetti, con qualche risposta anomala su 3 o 5; il neurone reagisce alla presenza simultanea degli oggetti nel quadro percettivo, e non contandoli (un neurone naturale di questo genere genere è stato isolato solo una volta in un gatto, in circostanze eccezionali).

Questo ipotizzato elaboratore numerico è stato prefigurato, anche per gli esseri umani, da vari pensatori, come Tobias Dantzig, che nel 1954 parlava di una forma elementare di intuizione matematica, una facoltà che egli chiamava «senso del numero» e che permette di accorgersi che qualcosa è cambiato in una collezione piccola quando un oggetto è aggiunto o tolto, anche senza individuare l'oggetto stesso.

Bambini

Si ipotizza ora che gli esseri umani siano almeno dotati come gli animali, ma anche non di più, per quel che riguarda il modulo matematico con cui vengono alla luce. Le aree del cervello dedicate al modulo non sono nella parte tipicamente umana. Per una verifica, occorre rifarsi al periodo in cui ancora il linguaggio non è sviluppato, prima dell'esplosione lessicale dei 18 mesi.

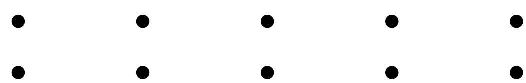
Ma per impostare questa ricerca, occorre preliminarmente smontare i divieti che vengono dalla teoria corrente — ora non più dominante. Secondo la teoria di Piaget, diventata nota come «costruttivismo», nel primo anno di vita non ci può essere alcuna capacità aritmetica. Le persone vengono al mondo come *tabula rasa*, solo con capacità percettive e motorie e una disposizione generale — o generica — ad imparare, riconoscendo, astraendo e interiorizzando le regolarità che incontrano. Piccoli scienziati induttivi.

Il primo anno di vita sarebbe dominato dall'attività di esplorazione sensomotoria, durante la quale s'incominciano a notare regolarità, ad esempio che un oggetto che scompare dietro la poltrona poi riappare, e si forma l'idea di oggetto; si procede per gradi e tappe, che la psicologia dello sviluppo ha individuato. Nel caso della matematica, le tappe prevedono oggetti, classi, seriazioni, inclusione, numero ([6]).

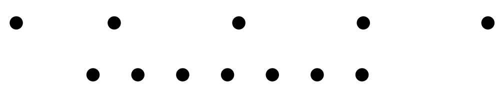
Il numero verrebbe al termine di una lunga esperienza, come invariante rispetto alle diverse disposizioni di oggetti (da cui la locuzione della «conservazione» del numero). La conservazione si raggiungerebbe intorno al quarto o quinto anno; prima, e in particolare nel primo anno, non essendoci l'idea della permanenza degli oggetti, non ci può neanche essere quella di numero. Dopo l'interiorizzazione della conservazione del numero, occorrono ancora due o tre anni per capire i fatti elementari dell'aritmetica (è famoso l'esperimento relativo a parti-e-tutto in cui si mostrano sei rose e due tulipani e si chiede se ci sono più rose o più fiori, e la risposta è «più rose»).

Ma è stato obiettato che probabilmente è la forma discorsiva degli esperimenti sulla conservazione che è responsabile del loro esito. Se si pongono problemi che non necessitano di parole, con le stesse condizioni degli esperimenti con gli animali, le prestazioni non sono certo inferiori.

L'esperimento Piagetiano della (non-)conservazione consiste nel mostrare due file di palline, prima allineate alla stessa distanza,



poi modificate,



e nel chiedere quale riga abbia più elementi. Nel secondo caso, la risposta di bambini di quattro anni è «la prima riga», anche se ci sono addirittura più palline addensate nella seconda.

Jacques Mehler nel 1967 ha mostrato esiti diversi degli esperimenti. Bambini di tre o quattro anni compivano lo stesso errore di quelli di Piaget, mentre bambini di due o tre anni avevano il senso

([6]) Si ricordi che nelle scuole francesi per un certo periodo sono stati banditi gli esercizi di conteggio, perché prima si dovevano sviluppare i requisiti dell'inclusione, dell'inferenza transitiva e gli altri fondamenti logici previsti da Piaget.

della conservazione del numero se invece di palline si usavano praline. Un'altra variante dell'esperimento è quella di far sì che la redistribuzione degli oggetti sia accidentale, causata dall'urto di un giocattolo, come un orsetto, e allora anche i bambini di tre o quattro anni rispondono giusto alla domanda piagetiana.

Inoltre, sorprendentemente, i bambini più piccoli, quelli di due anni, rispondono giusto anche con le palline. Sembra che la permanenza del numero abbia un'oscillazione, e qualunque cosa questo significhi, certo comporta che non si possono applicare gli schemi di Piaget; la spiegazione secondo alcuni può essere che a tre o quattro anni i bambini riescono a interrogarsi su quello che ci si aspetta da loro, e la ripetizione del compito fa loro supporre di dover dare una risposta diversa. Incominciano ad apprezzare le forme discorsive dialogiche, incluso il gioco degli inganni, e questa crescita culturale potrebbe essere responsabile delle loro risposte contorte.

Altri pensano che la difficoltà e le incertezze dei bambini con i test di Piaget, che comunque esistono, richiedano una spiegazione più fisiologica che non il riferimento al linguaggio, e abbiano a che fare con la maturazione della corteccia prefrontale, una regione dove risiede l'abilità ad elaborare strategie e ad attenervisi ([7]).

Il problema ad ogni modo è, se la scala di Piaget non è corretta, dove si debba spostare in avanti la manifestazione di abilità numeriche. Negli anni Ottanta, abilità matematiche sono state individuate in bambini di sei mesi, o addirittura neonati.

Gli esperimenti sono basati sul tempo di fissazione, cioè di osservazione con interesse di fronte a cose nuove o inaspettate; i bambini guardano più a lungo gli eventi che deludono le loro aspettative, in positivo o in negativo; l'abitudine fa calare l'interesse, guardare una cosa nuova li disabitua e induce nuovo interesse. Si avrà cura ovviamente di variare le condizioni in modo da assicurarsi che non siano altri parametri ad attirare l'attenzione, o facoltà particolari (udito o vista) ad avere incorporata questa capacità.

([7]) Le ricerche sulla conservazione e le discussioni sulle tesi di Piaget sono sconfinate; si veda Karmiloff-Smith (1992), cap. IV, «Il bambino come matematico», per una rassegna parziale.

Bambini di quattro o cinque mesi riconoscono e distinguono 2 oppure 3 oggetti, o suoni, o azioni; dai sei agli otto mesi riescono a riconoscere l'uguaglianza numerica di fenomeni diversi corrispondenti, e a stabilire la corrispondenza. Quindi il numero è percepito in modo astratto, non solo associato a configurazioni geometriche o a schemi sonori. Anche dopo pochi giorni di vita i bambini reagiscono in modo diverso a 2 o 3 stimoli sensoriali, ma solo un po' più avanti si riescono a predisporre esperimenti più complessi per cogliere la presenza della nozione astratta di numero; il principio della corrispondenza biunivoca per valutare se due collezioni sono uguali per ora non si è riusciti a spostarlo prima; sembra ad ogni modo doversi considerare un vincolo innato.

Nel 1992 Karel Wynn ha pubblicato su *Nature* i risultati degli esperimenti che provano che bambini di quattro o cinque mesi sono in grado di eseguire semplici addizioni. Sanno fare (non simbolicamente) $1 + 1 = 2$ e $2 - 1 = 1$, e non commettono l'errore $1 + 1 = 1$ e neanche $1 + 1 = 3$; non si aspettano solo un cambiamento qualsiasi, ma quello giusto, e non è solo un'immagine diversa da quella attesa che li soddisfa. Questi bambini però distinguono a fatica tra 3 e 4, e prima di un anno nessuno distingue 4 da 5 o 6.

Contro Piaget, i bambini mostrano anche di credere molto presto alla permanenza di oggetti, sia pure in un modo complicato; per verificarlo, si è passati a studiare i loro sguardi, quando osservano oggetti che appaiono o scompaiono dietro schermi, anche quando essi mancano ancora, per l'insufficiente sviluppo della corteccia prefrontale, della capacità di afferrare, o di muoversi per afferrare. Tuttavia la storia è complicata: se da dietro a uno schermo escono alternativamente una palla verde e una gialla, e poi tolto lo schermo ce ne è una sola, non si meravigliano, fino a dopo un anno, e inizialmente solo se gli oggetti hanno proprio forma diversa, non solo il colore; ma se i due oggetti escono da dietro a due schermi, uno da una parte e uno dall'altra, ed è visibile, come a teatro, una parte centrale dove non passa niente, allora i bambini si aspettano che dietro gli schermi ci siano due oggetti; le traiettorie dei corpi sono per loro un indizio di diversità; i movimenti fisici degli oggetti intervengono nel loro riconoscimento. In modo analogo, contare proprietà astratte (come i tipi di frutta quando ci sono tre mele e due banane) non riesce neanche a tre o quattro anni (rispondono cinque); il numero è all'inizio una proprietà di insiemi di oggetti concreti.

Stranamente la nozione ordinale non sembra presente prima dei quindici mesi, quando i bambini incominciano a comportarsi come gli scimpanzé addestrati; prima riconoscono che $1 + 1 = 2$ è diverso da 1, ma senza avere il senso del maggiore.

Adulti

Facciamo un salto in avanti e consideriamo adulti che hanno imparato le cifre e gli algoritmi relativi; dietro le quinte l'accumulatore analogico continua a far sentire la sua azione, talvolta il suo disturbo, a riprova della sua esistenza.

Negli adulti, lo si sa da sempre, il riconoscimento del numero di gruppi di oggetti mostra fino a 3 l'effetto di subitizzazione (*subitizing*) ([8]), o risposta immediata, mentre da 4 in poi il tempo è una funzione lineare del numero, a 200 o 300 millisecondi per unità (i bambini almeno un secondo), cioè si conta ([9]); 4 è il punto oltre il quale l'accumulatore incomincia a sbagliare, o per difetto o per eccesso.

L'ipotesi che anche fino a tre si conti, ma molto rapidamente, è smentita dai pazienti affetti da lesioni cerebrali; una di queste provoca la *subitagnosia*, una situazione in cui non si riesce a passare in rassegna tutti i particolari di una scena, ma se ne dimentica sempre qualcuno o ci si ferma a metà; i pazienti con tale deficit non possono contare, ma fino a 3 non hanno problemi (il che vuol dire: fanno errori nel 7% di casi invece che nel 70%).

Negli adulti il limite di subitizzazione non è una barriera insormontabile, ma è il confine al di là del quale incomincia l'approssimazione, con fenomeni di distorsione. Ad esempio, se guardiamo puntini distribuiti in modo ordinato tendiamo a stimarne di più, mentre se sono disordinati tendiamo a stimarne di meno; si manifestano poi

([8]) Nella traduzione del libro di Butterworth è usata la parola «immediatizzazione».

([9]) Tutte le civiltà che hanno nomi e segni per i numeri hanno per i primi tre la ripetizione del simbolo per l'1 (anche le cifre arabiche 2 e 3 sono una deformazione di questa notazione) mentre da 4 in poi sono completamente diverse.

l'effetto distanza e l'effetto grandezza. La legge scalare di Weber dice che se una persona discrimina con una certa percentuale di errore tra due insiemi con differenza n, e si se raddoppia uno degli insiemi, l'altro pure deve essere raddoppiato, sicché la differenza sia $2n$, per ottenere la stesse prestazioni. La percezione della numerosità è del tutto simile a quella che si riscontra negli animali.

Quando lavoriamo con i simboli, non ci possiamo liberare del tutto dalla comprensione della quantità che sta dietro a un numerale. Nel 1967 *Nature* ha pubblicato i risultati di esperimenti volti a valutare il tempo di risposta alla presentazione lampo di due cifre, con la richiesta di individuare quella corrispondente al numero più grande; si hanno tempi maggiori (di 100 millisecondi) se le due cifre indicano due numeri vicini rispetto a quando indicano due numeri lontani (7 e 9 rispetto a 2 e 9); non solo le persone normali, ma anche persone colte e scienziati, ancorché increduli, non possono che avere un tempo di reazione maggiore a riconoscere che 6 è maggiore di 5 rispetto a quello impiegato per riconoscere che 9 è maggiore di 2.

Si potrebbe dire che il nostro cervello ha una semantica, o una rappresentazione non verbale delle quantità, che è attiva anche quando si esaminano cifre, e che con la sua interferenza impone un costo misurabile alla velocità delle operazioni mentali. Potrebbe essere questo il motivo per cui non sono necessari particolari artifici per imparare i numeri naturali, mentre con gli altri numeri, non avendo una pre-esistente categoria corrispondente nel cervello, bisogna inserire metafore con frammenti di immagini già note, e modificarle ovviamente, per avere la nuova rappresentazione.

Ancora più istruttivo è il confronto tra numeri a due cifre, dove il procedimento seguito non è quello, basato sulla definizione della rappresentazione posizionale, di guardare prima la cifra delle decine e poi l'altra; infatti si verifica di nuovo l'effetto distanza, occorre più tempo a riconoscere che 71 è maggiore di 65 che a riconoscere che 79 è maggiore di 65. Praticamente vale anche per le cifre la legge di Weber: per distinguere due numeri quello che conta non è la loro distanza assoluta, ma quella relativa alla loro dimensione; come se ci fosse una scala logaritmica nel cervello per la rappresentazione dei numeri, così che per numeri grandi, più compressi tra loro, tutte le operazioni diventano più difficili.

Questa «compressione del numero» ha probabilmente diversi effetti, in particolare nelle valutazioni statistiche. Ad esempio, di fronte alla richiesta di valutare quale delle due seguenti successioni

879	5	1322	1987	212	1776	1561	437	1098	663
238	5	689	1987	16	1446	1018	58	421	117

sia più casuale, la maggior parte delle persone indica la seconda; nella prima numeri grandi sembrano apparire un po' troppo spesso; invece nella prima i numeri sono scelti in modo uniforme, a circa 200 l'uno dall'altro, nella seconda in modo esponenziale.

È provato che quando una cifra viene vista anche per un tempo inferiore a quello che serve per essere notata, e presente alla coscienza, essa tuttavia qualche reazione iniziale nel cervello la provoca, e interagisce con altre rappresentazioni. Con ulteriori ingegnosi esperimenti si è provato che il riflesso che associa numeri alle cifre li colloca anche in modo relativo ponendo i più grandi a destra dei più piccoli, a destra nella rappresentazione dello spazio. La retta numerica è orientata verso destra, ma sottoponendo a prova persone che hanno imparato a leggere da destra a sinistra si è notato che coloro che in seguito sono stati sottoposti a influenza occidentale avevano la stessa direzione per la retta, mentre gli altri avevano l'orientamento verso sinistra.

Alcune persone hanno però immagini più ricche e variate della retta, che si presenta non proprio come una retta, ma come una curva o un nastro con pieghe e ondeggiamenti, crescente verso l'alto a destra, di solito, con colori, e magari momenti di brusco piegamento, ma in generale continua; e molti associano colori ai numeri, fenomeno registrato nel secolo scorso da John Galton, e recentemente confermato da diverse prove ([10]). L'associazione dipende probabilmen-

([10]) Almeno il 10% delle persone ha quest'esperienza, che di solito inizia verso gli otto anni. Molte persone associano bianco e nero o con 0 e 1 o con 8 e 9, giallo, rosso e blu con numeri piccoli come 3, 4, marrone e grigio con numeri più grandi come 6, 7. Il fenomeno è simile alla sinestesia, l'esperienza di musicisti che i suoni abbiano forma, o i gusti odori.

te, secondo Dehaene (1997), pp. 85-6, che ammette il carattere congetturale della sua ipotesi, dal fatto che quando a scuola si deve dare più spazio alla retta numerica, ci deve essere un'espansione della parte della corteccia dedicata alla mappa dei numeri, e questo avviene a spese di un restringimento della parte circostante, che è dedicata a colori e forme; ma in alcuni soggetti quest'ultima si può ritirare meno, e si ha una sovrapposizione di funzioni. Le mappe corticali si sovrappongono e si colonizzano, come provato con quelli che hanno subito amputazioni. La parte interessata è quella parieto-occipitale sinistra, nella regione di giunzione dei lobi parietale occipitale e temporale.

Baby aritmetica e calcolometria

I bambini imparano a contare in modo corretto intorno ai tre anni e mezzo, arricchendo la loro padronanza della corrispondenza biunivoca; diventano consapevoli che si può variare l'ordine degli oggetti purché non se ne salti nessuno e nessuno venga contato più volte, e similmente la recitazione dei numerali non faccia salti o ripetizioni (uno, due, quattro, sette); ma spesso alla fine del conto ancora non sanno rispondere alla domanda quanti?, cioè non possiedono quello che viene chiamato dagli psicologi principio di cardinalità; ad esso arrivano solo fino verso la fine del quarto anno.

Poi incominciano a fare l'addizione, per esempio $2 + 4$, con le dita, contando prima una mano e poi l'altra, magari usando il naso come indicatore; quindi passano a contare a voce, e devono imparare *a contare quanto si conta*, con il secondo addendo (un salto di livello fondamentale per la stessa teoria astratta della computabilità); la fase successiva è quella in cui partono da 2 invece di contare anche fino a 2; secondo alcuni fino a questo momento non hanno davvero il principio di cardinalità; infine passano a contare partendo dall'addendo maggiore.

Ma conviene soffermarsi su un problema molto importante che emerge da questi dati: come mai i bambini che già dispongono chiaramente del principio di cardinalità non superano ancora il compito della conservazione del numero? Dietro a questo problema di psicologia evolutiva riconosciamo anche tante dispute fondazionali sulla priorità dell'aspetto ordinale o cardinale del numero. Nel caso dei bambini la risposta sembra dipendere, secondo Karmiloff-Smith, dal fatto che principi (innati) diversi entrano in gioco nei due compiti dell'uso del linguaggio e dell'apprendere a contare. Un principio del linguaggio è che gli oggetti della stessa categoria ricevono la stessa etichetta, o nome comune, e un secondo principio impone che se un oggetto ha una etichetta non può riceverne un'altra dello stesso livello categoriale. Di fronte a quattro cucchiai in fila, ognuno riceve la stessa etichetta «cucchiaio», «cucchiaio», «cucchiaio», «cucchiaio»; nel contarli, essi ricevono invece le etichette «uno», «due», «tre», «quattro», e se varia l'ordine, lo stesso cuccchiaio riceve etichette diverse. I principi del contare sono quelli dell'irrilevanza dell'oggetto e della stabilità dell'ordinamento, da cui i bambini imparano che i termini numerici *non* sono nomi degli oggetti. I bambini memorizzano in modo diverso rappresentazioni pertinenti al contare e al nominare, circostanza che suggerisce di nuovo l'innatismo di questi diversificati principi guida. Il linguaggio della matematica ha dunque una specifica sintassi, oltre che un suo lessico, di cui i bambini devono impadronirsi, all'inizio come nel prosieguo della crescita della conoscenza. Anche la successiva competenza matematica e l'uso del linguaggio matematico sono correlati positivamente, e i bambini meno dotati tendono a interpretare quest'ultimo in termini di linguaggio quotidiano.

I bambini devono passare attraverso una ristrutturazione delle loro teorie sui numeri e degli algoritmi corrispondenti ([11]); la teoria iniziale è forse quella di considerare numero come ciò che si ottiene quando si conta; in eseguito i numeri diventano qualcosa su cui si eseguono operazioni aritmetiche. La necessità di una tale ristrutturazione, contro il forte vincolo inziale, è probabilmente alla radice di tante difficoltà dei bambini con le estesioni dei domini numerici.

Per eseguire l'addizione, dopo il semplice contare si imparano o si inventano altre strategie, come quella di contare a coppie se ci sono nume-

([11]) Quest'idea, chiamata principio di Ristrutturazione Rappresentazionale, è il filo conduttore delle ipotesi sviluppate da Karmiloff-Smith sull'evoluzione psicologica dei bambini.

ri pari: per fare $8 + 4$ si dice 8/10/12; per eseguire $8 - 2$ si conta all'indietro da 8, per fare $8 - 6$ si conta in avanti da 6; questo negli anni prescolari, da 4 a 7; non si nota un particolare ordine nella costruzione di strategie, del cui successo però i soggetti sembrano tenere traccia e tendere ad attenervisi; nell'invenzione di strategie, è come se ci fosse un senso della grandezza che guida verso la soluzione meno costosa.

Un bambino di 7 anni somma contando l'addendo più piccolo, anche se non dà alcun segno di contare, sia verbalmente che in silenzio; lo si può provare misurando il tempo di risposta, proporzionale all'addendo minore. Si è pensato, dopo le prime misure fatte su adulti, che anch'essi seguissero lo stesso metodo, ma la velocità sembrava impossibile, 20 millesimi di secondo per cifra; si è capito che questo tempo era piuttosto proporzionale al prodotto, o alla radice del prodotto dei due addendi, e che era analogo per la moltiplicazione, chiara prova che le risposte erano estratte dalla memoria. Sembra assodato che gli adulti si basano principalmente sulla memoria per questo tipo di risposte. Solo qualcuno per particolari moltiplicazioni usa qualche euristica (per esempio, dovendo moltiplicare per 9, moltiplicare per 10 e togliere un fattore).

Tuttavia le tabelline sono difficili da ricordare, nonostante ci siano solo, considerando la commutatività, 45 addizioni e 36 moltiplicazioni da memorizzare. Ci va più di un secondo per un adulto per rispondere a 3×7, con errori sopra il 10%, e più di due secondi per i prodotti difficili come 8×7. La memoria è associativa, cioè intreccia multipli legami tra dati disparati, il che è un bene, perché permette di ricostruire memorie da frammenti, e vedere analogie; diventa un ostacolo quando ci sono ripetizioni, apparenti regolarità e situazioni ambigue, che devono essere tenute ben distinte e non richiamarsi l'una con l'altra. Quando si sbaglia 7×8, non si dice mai 55 ma sempre qualche altro risultato presente nella tavola.

Quando un soggetto vede due numeri, automaticamente la memoria evoca la loro somma, anche se non è chiesta, e di fatto non utilizzata (ma si vede che interferisce nella risposta, dal tempo). Poi spesso si sovrappongono addizione e moltiplicazione. Quando s'impara la moltiplicazione, il tempo dell'addizione momentaneamente cresce, e s'incominciano a fare confusioni $(2 + 3 = 6)$.

La memoria verbale, quella delle filastrocche, è un aiuto potente, fin troppo, in quanto produce anche errori, per gli effetti di rima, o trascinamento di parole, come 5×6 uguale a 36.

Nel caso dei numeri a più cifre intervengono gli algoritmi scolastici, con i noti errori sistematici dovuti ad autonoma modificazione da parte del discente. Gli errori sistematici hanno una loro coerenza, sono stati molto studiati; Dehaene sostiene che siano dovuti a un insegnamento insufficiente.

I libri di testo esaminati da Dehaene non spiegano mai completamente l'algoritmo della sottrazione, ma si accontentano di alcuni esempi, oltre a qualche indicazione generale, e lo studente dovrebbe imparare da questi esempi e da quelli svolti dal maestro; ma non sono mai contemplati proprio tutti i casi. Magari in tutti gli esempi ci sono solo due cifre, e quando si passa a tre, un bambino pensa che il riporto vada fatto sempre sull'ultima cifra a sinistra. Il bambino è abituato a imparare per esempi, e si concentra su di essi anche quando viene offerta la spiegazione verbale completa.

Queste riflessioni sono da prendere attentamente in considerazione quando si discute del ragionamento e della categorizzazione per prototipi. Ma molti errori, che si catalogano sotto il termine comune di impulsività matematica, sono dovuti ad un insufficiente sviluppo della corteccia prefrontale.

Patologie e lesioni cerebrali

La neuropsicologia cognitiva è basata sulle lesioni cerebrali per la raccolta di informazioni sulla struttura e il funzionamento del cervello. Il concetto cruciale è quello di *dissociazione*, cioè il fatto che in seguito a un danno cerebrale un dominio di competenza diventa inaccessibile mentre altri restano intatti: quando due abilità mentali sono così dissociate, si può ipotizzare che esse coinvolgano distinti circuiti neuronali ([12]).

Per dare un esempio, si pensi a due pazienti reali, uno dei quali è

([12]) Naturalmente ci sono altre spiegazioni che devono essere valutate, come ad esempio l'eventualità che una delle due competenze sia più facile da reimparare con l'attivazione di altri circuiti.

in grado di leggere bene la struttura sintattica dei numeri, per intendersi legge 2370 come «duemila trecento settanta», solo che frequentemente o regolarmente legge una cifra al posto di un'altra (per esempio in realtà legge il numero precedente come «duemila trecento cinquanta»). Un altro paziente non sbaglia mai in questo modo, ma non riesce a cogliere la struttura del numero, magari legge 270 come «ventimila settanta». L'esistenza di due pazienti del genere fa supporre che le regioni cerebrali dedicate al recupero delle parole nel lessico mentale siano diverse da quelle più rivolte alla lettura della struttura grammaticale.

Nonostante la terminologia talvolta semplificata, non si deve pensare ad aree dedicate, come nella frenologia dell'Ottocento; esiste sempre una cooperazione di diverse aree, e si pensa che sia casomai l'esercizio, nella fase di crescita del cervello che va fino alla pubertà e oltre, a sviluppare certe parti; lo si è osservato nei violinisti, per la zona che controlla la sensibilità delle dita, e pare, secondo misurazioni fatte nel 1985, che il cervello di Einstein, che è stato studiato con molte aspettative e ha provocato molta delusione per la sua ordinarietà, abbia una densità cellulare superiore in una zona posteriore che è di fatto sede di attività numerica.

Gli esatti circuiti usati nei calcoli aritmetici ancora ci sfuggono, ma incomincia a formarsi una mappa abbastanza raffinata dei percorsi cerebrali dei dati numerici. Le informazioni sufficientemente assodate che si ricavano dagli studi riassunti da Dehaene sono le seguenti.

Le aree della matematica approssimata sono diverse da quelle della elaborazione simbolica, come è provato dall'esistenza di pazienti con deficit complementari.

Le varie competenze relative ai numeri vanno dalla lettura e scrittura, con riconoscimento delle cifre o in lingua, alla loro pronuncia e alla loro scrittura, alle diverse operazioni su di essi: ciascuna di queste capacità poggia su reti neuronali altamente specializzate (probabilmente usiamo diversi circuiti per il riconoscimento della cifra 5, per la pronuncia del suo nome e per la sua scrittura) che comunicano attraverso molte corsie parallele. Sono state rilevate le più svariate e inaspettate dissociazioni (tipo leggere le parole ma non le cifre arabe, avere la memoria a breve termine danneggiata, in

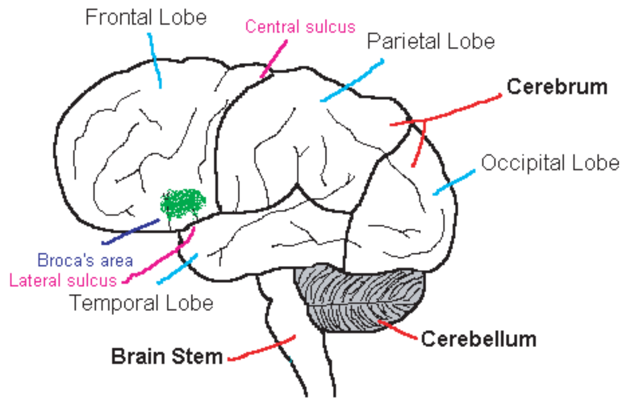


Figura 1. – Una tradizionale rappresentazione delle aree del cervello dedicate alle diverse funzioni cognitive, senza alcuna considerazione dell'attività matematica.

modo da non poter trattenere più di due *item*, ma con la capacità di fare operazioni con numeri di due cifre). Si ha sicura indipendenza tra numero e linguaggio e memoria e capacità di ragionamento (il che non vuol dire che non siano tutte necessarie per imparare).

Recenti ricerche mostrano che pazienti acalculici non necessariamente perdono le loro capacità algebriche; una paziente aveva perso la memoria della tavola pitagorica per lesione subcorticale, ma era in grado ad esempio di ricalcolarsi 7×8 scomponendolo in $7 \times 10 - 7 \times 2$. Un'altra, laureata in chimica, analogamente era in grado di riconoscere la correttezza o meno di identità algebriche letterali.

Per quel che riguarda il calcolo, oltre alla corteccia parietale inferiore sinistra interviene un altro circuito neuronale, una voluta cortico subcorticale che coinvolge i gangli basali; lì ci sono gli automatismi verbali, come quelli che riguardano proverbi e preghiere, e pare anche le risposte alle moltiplicazioni: leggere «due per cinque» attiva circuiti che mettono in eccitazione questi gangli con la risposta automatica. Ci sono pazienti con danni ai gangli, e intatti invece i circuiti che permettono di leggere e riconoscere i numeri, e anche fare calcoli ripartendo dalle definizioni, ma che non sono in grado di rispondere a 2×3.

I rapporti tra i due emisferi del cervello riempirebbero da soli un

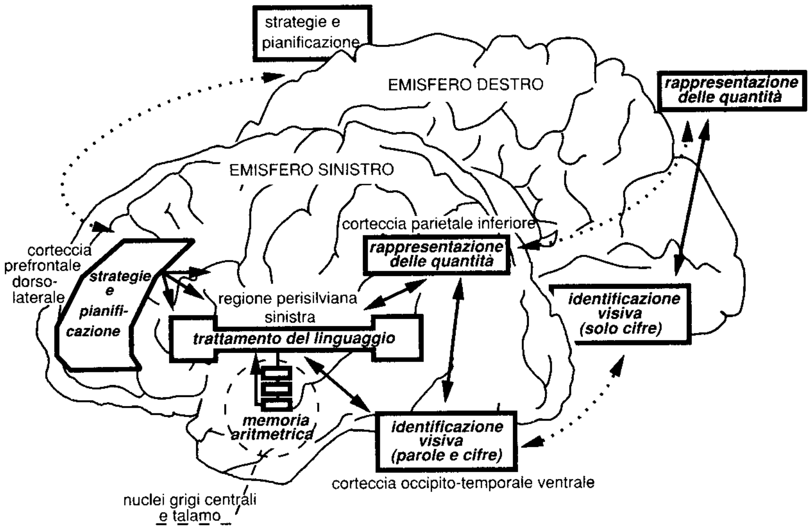


Figura 2. – Rappresentazione approssimata e provvisoria delle aree del cervello interessante all'attività matematica (da pag. 195 di S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, 1997, per cortesia dell'Autore.

trattato, e hanno anche suggerito fantasiose teorizzazioni, ad esempio sulle cartatteristiche maschili e femminili dell'intelligenza. Dalla ricerca neurofisiologica vengono informazioni più sobrie: i due emisferi, studiati separatamente nei casi di corpo calloso reciso, hanno alcune capacità matematiche comuni; entrambi, separatamente riconoscono la diversità o eguaglianza delle cifre, entrambi, separatamente riconoscono la relazione d'ordine tra i numeri; naturalmente quando si passa ai calcoli mentali e al linguaggio solo il sinistro funziona. Il destro non riesce a produrre tutte le parole (vedendo la cifra 5 non riesce a pronunciarla, anche se con la mano, sinistra, guidata dall'emisfero destro, riesce a far capire che è maggiore di tre). L'emisfero destro analogamente non riesce a fare semplicissime operazioni aritmetiche (più o meno 2), dividere per 2 e simili. Non è ancora chiaro se l'emisfero di destra riesca a fare operazioni approssimate (la difficoltà degli esperimenti consiste nel fatto che il paziente deve anche capire il problema).

L'area parietale inferiore è ancora in gran parte sconosciuta, ma questa parte della corteccia, in particolare la convoluzione posteriore nota come giro angolare, o area di Broadmann 39, gioca un ruolo fondamentale nella rappresentazione del numero come quantità. In essa vi è una confluenza di flussi di dati che provengono dalla visione, dall'udito e dal tatto. Controlla le dita, la scrittura, il senso dello spazio.

È una tentazione pensare che queste capacità siano collegate, ma non è chiaro se si tratti solo di vicinanza spaziale; la regione potrebbe essere divisa in microregioni specializzate, e solo confinanti, anche perché i diversi deficit relativi alle molteplici competenze ivi confluenti sono anche stati osservati separatamente, oltre che insieme; ma certo è una tentazione, almeno l'ipotesi che quell'area sia dedicata in generale alla rappresentazione di informazione spaziale continua, tra cui c'è anche quella della retta numerica. Essa è al di sopra di un'area che costruisce mappe astratte della distribuzione di oggetti nello spazio.

Sempre in quell'area si manifesta l'*epilessia aritmetica*; i pazienti quando risolvono problemi aritmetici hanno ivi scariche ritmiche che innescano attacchi di epilessia (niente di analogo succede con la lettura o altri compiti intellettuali). Altri casi sono noti di persone che mentre studiano, soprattutto matematica, all'improvviso hanno paralisi di arti e blocco del pensiero.

Il comportamento collettivo dei vari circuiti dà l'apparenza di una supervisione coordinata delle varie attività del cervello. Al coordinamento è preposta soprattutto la parte frontale, la corteccia prefrontale e la corteccia anteriore cingolata. Lesioni in quest'area non impediscono l'esecuzione di semplici operazioni aritmetiche, ma lo svolgimento di una serie di compiti nell'ordine giusto, e quindi ad esempio la moltiplicazione a più cifre. Non è più fornita un'adeguata memoria di lavoro. La stima dei numeri da attribuire a certe grandezze, il loro confronto per coerenza (non dire ad esempio che un palazzo ha altezza maggiore di quella attribuita a una montagna), sembrano concentrate in questa zona centrale esecutiva. Quest'area è influenzata gravemente dall'esposizione all'alcol durante la gravidanza di madri alcoliste.

La nostra specie è proprio caratterizzata da una crescita delle parti frontali del cervello, di cui ora costituiscono un terzo; ha una lenta maturazione, che spiega molte difficoltà dell'insegnamento con i piccoli.

Se l'accumulatore si può pensare che sia da tempo nel cervello, la parte dedicata alla manipolazione simbolica, che è recentissima nella nostra civiltà, deve per forza invadere circuiti che sarebbero dedicati ad altro, o lo sono in persone che non coltivano per nulla la matematica.

L'apprendimento probabilmente non attiva circuiti radicalmente nuovi, che dormivano, ma sceglie, raffina e specializza circuiti preesistenti finché la loro funzione si differenzia da quella originaria. Come certe regioni genericamente dedicate al riconoscimento di volti o di oggetti diventano specializzate per esempio nella lettura, quando si impara a leggere, altri ancora più specifici diventano dedicati alla lettura delle cifre e di numeri.

È la cosiddetta plasticità neuronale; che poi è anche quella che permette di curare e superare certe lesioni, attivando altri circuiti in sostituzione; ma la plasticità non è illimitata. Qualche volta non si realizza, come nei bambini che nel corso del loro sviluppo patiscono difetti nella maturazione cerebrale; bambini che pur essendo intelligenti in altro, hanno l'acalculia di sviluppo; bambini che sono del tutto normali con le operazioni sui numeri a una cifra ma assolutamente non riescono a coordinare gli algoritmi con più cifre; bambini fluentissimi nel linguaggio, ma che non leggono le parole numeriche, se vedono «tre» leggono «otto». La distruzione di pochi neuroni altamente specializzati in queste limitate funzioni non sempre è riparata dai neuroni vicini. Non tutti i neuroni quindi possono assumere le funzioni collegate ai numeri; forse perché per essere riciclati in questo modo devono essere di un tipo particolare.

I calcolatori prodigio

Una segnalazione a parte merita, tra matematici, il tema dei calcolatori prodigio, o delle persone con memoria eccezionale (per certi versi simili, per altri con peculiarità uniche dei matematici). Il tema è stato sviscerato in tutti gli aspetti, e per maggiori informazioni rinviamo al Cap. V di Dehaene (1997).

Possiamo distinguere, in prima approssimazione, i professionisti, in mancanza di una parola migliore, coloro cioè che si esibiscono, che si analizzano e magari in pensione rivelano i loro segreti, dai casi patologici.

I professionisti, oltre a una grande memoria, sviluppano e applicano tecniche che smitizzano in parte le loro prestazioni: l'uso dell'aritmetica modulo 7 per le risposte sul calendario, algoritmi particolari che ottimizzano la successione delle operazioni parziali nei calcoli con grandi numeri — come la moltiplicazione eseguita da sinistra verso destra, l'applicazione di tavole pitagoriche memorizzate per numeri a due o più cifre, trasformazioni algebriche, molteplici fatti relativi alla divisibilità, che sono noti ma di solito non tutti simultaneamente presenti alla mente dei calcolatori normali, e in generale una combinazione di euristiche del genere.

La memoria e la capacità di calcolo possono essere fortemente migliorate con l'esercizio; esperimenti psicologici hanno mostrato che con cento ore di allenamento intensivo si può arrivare in alcuni soggetti a tenere nella memoria di lavoro numeri fino a venti cifre, invece dell'usuale dimensione otto; con trecento ore di pratica la velocità di calcolo di un soggetto è quadruplicata, fino ad arrivare ad eseguire mentalmente moltiplicazioni come 59.451×86 in trenta secondi.

Tuttavia i veri prodigi non calcolano, hanno menti iconiche. Sono soprattutto alcuni soggetti autistici che suscitano meraviglia e interrogativi. I due gemelli raccontati in Sacks (1985) *vedono* 111 (quando si rovescia la scatola dei fiammiferi) immediatamente, senza contare, vedono la centoundicità, e la sua scomposizione in 37×3; e non sanno fare le operazioni. Inoltre provano piacere, un piacere intenso, privato, complice e sereno nello scambiarsi numeri primi di sei cifre, poi di otto e ancor più.

Personaggi con queste capacità conoscono i numeri come amici, ognuno singolarmente e in tutte le loro relazioni, soprattutto nella loro composizione a partire dai numeri primi. Molti bambini autistici subiscono il fascino particolare dei numeri primi.

Questi casi suggeriscono che «in alcune situazioni si può assistere al "debloccaggio" di capacità intuitive matematiche, come ad esempio la capacità di riconoscere numeri primi anche molto grandi... Alcuni autori suggeriscono che questo significhi che le nostre strutture neurali profonde siano dotate di capacità di calcolo molto maggiori di quella che giunge fino alle aree corticali dove circuiti rientranti e autoriflessivi creano un'immagine cosciente. I nostri limiti matematici sarebbero dovuti ad un'inibizione attiva delle nostre potenzialità, in un certo senso saremmo "protetti" contro un eccesso d'intuizione matematica che potrebbe essere controproducente in alcune situazioni di selezione evolutiva. Questa è un'ipotesi criticabile, ma che andrebbe comunque considerata. Sembra che lo stesso avvenga per la memoria visiva» ([13]).

Il debloccaggio si manifesta non tanto, o non solo, in capacità algoritmiche potenziate, ma nella visione dei numeri come strutture spaziali, configurazioni in uno spazio mentale «quasi sensoriale» (Dehaene), come estensioni a noi ancora sconosciute delle rappresentazioni più ricche, mosse, colorate della retta numerica. Connes ha usato questi termini per esprimere la sua fede platonista, in Changeux e Connes (1989).

Guardare dentro la scatola nera

Oggi si può praticamente aprire la scatola ed esaminare aree finora inaccessibili e non note perché magari non c'era mai stato un paziente con lesioni in quella parte specifica.

La PET, tomografia a emissione di positroni, usa un tracciante che emette positroni, per esempio una molecola d'acqua in cui un atomo di ossigeno è rimpiazzato da uno di ossigeno 15 instabile. Questo emette un positrone, antimateria, che dopo poco collide con un elettrone e si elidono emettendo raggi gamma ad alta energia che escono senza fare danni dallo scalpo.

Le tecniche basate sul flusso del sangue hanno limiti dovuti al fatto che in pochissimo tempo, dell'ordine di pochi decimi di secondo, il cervello fa molte operazioni, ad esempio quando confronta due cifre per dire quale è più grande (quattro decimi). Occorrono secondi in-

([13]) Un *referee* anonimo, che ringrazio.

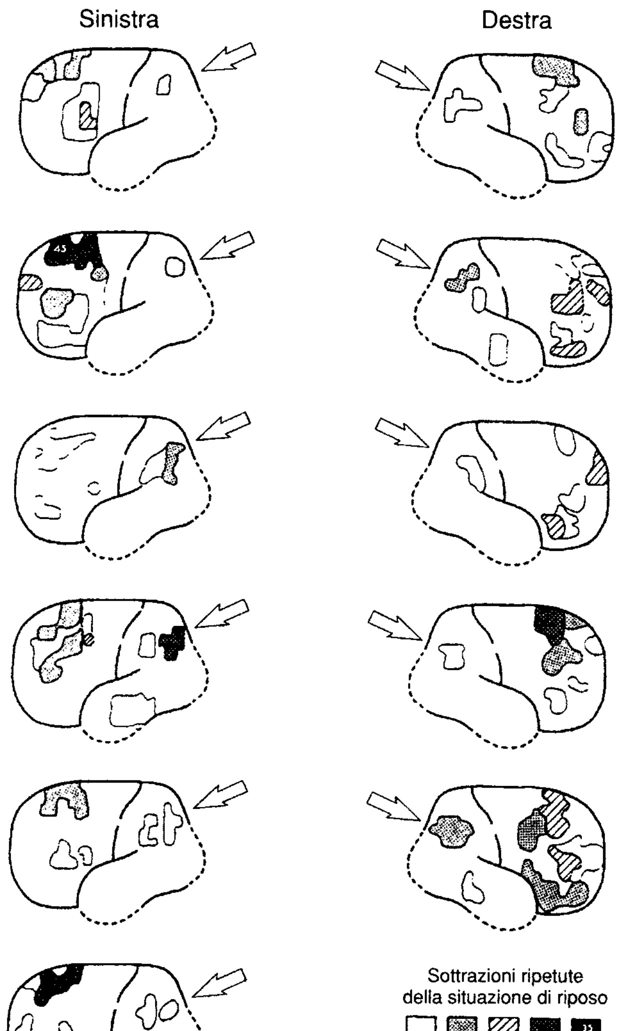


Figura 3. – Rilevamento dell'attività cerebrale dei due emisferi durante l'esecuzione di calcoli aritmetici (da pag. 214 di S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, 1997, per cortesia dell'Autore).

vece prima che il flusso di sangue aumenti quando un neurone supera la soglia di attivazione.

Servono meglio tecniche che misurano il potenziale in diversi punti, e il flusso di corrente elettrica, come l'elettroencefalografia: con esse si riescono a misurare attività dell'ordine del millisecondo; si vede ad esempio che quando si confrontano due cifre, all'inizio sono attivate aree di riconoscimento puramente lessicale e solo intorno al 190 millisecondo cominciano ad attivarsi aree che hanno a che fare con il numero, cioè con il significato, e in entrambi gli emisferi, e l'attivazione è più forte se i numeri sono vicini, confermando che si ha a che fare proprio con i numeri e non con le parole.

Si sono avute conferme a quanto dedotto dai deficit, e ulteriori informazioni, in parte accennate nella descrizione precedente. Siamo solo all'inizio, la mappa deve essere più fine. In polemica contro l'esaltazione che circonda quest'impresa Fodor (2000) ha affermato: «La differenza tra cercare di scoprire come la struttura della mente dipenda dalla struttura del cervello e costruire mappe cerebrali di cosa si accende quando si pensa a una teiera è più o meno la stessa che c'è tra uno scienziato che ha un'ipotesi e uno che ha solo una macchina fotografica». Gli esempi riportati sembrano assicurare che ci sono ipotesi, o che alcune possono anche essere suggerite dall'osservazione della mappa.

Conclusioni

Le ricerche contemporanee di neurofisiologia e di psicologia di cui abbiamo dato notizia in questo articolo si possono riassumere nel seguente quadro. Con qualche sfumatura, gli studiosi concordano sull'attivazione geneticamente programmata e precoce di circuiti che permettono di cogliere la numerosità; con la crescita del cervello non si ha un aumento della potenza di questo modulo, ma su di esso s'inserisce lo sviluppo della matematica simbolica, un'impresa molto complessa in cui intervengono circuiti collegati o derivati da quelli linguistici, sia lessicali che grammaticali, insieme alla memoria e alla capacità di coordinamento. Lo studio del cervello, agevolato da nuove tecniche, promette di costruire una mappa dell'attività cerebrale durante l'attività matematica. Queste conoscenze hanno rilevanza non solo clinica ma anche pedagogica: l'evoluzione psicologica si rivela molto più articolata degli schemi semplificati finora adottati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

BONCINELLI E. - BOTTAZZINI U., *La serva padrona*, Raffaello Cortina, Milano, 2000.

BUTTERWORTH B., *The Mathematical Brain*, Macmillan, London, 1999; trad. it. *Intelligenza Matematica*, Rizzoli, Milano, 1999.

CHANGEUX J.-P. - CONNES A., *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris, 1989; trad. it. *Materia e pensiero*, Bollati Boringhieri, 1991.

DANTZIG T., *Number. The Language of Science*, Macmillan, New York, 1954; trad. it. *Il numero, linguaggio della scienza*, La Nuova Italia, Firenze, 1965.

DEHAENE S., *The Number Sense*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997; trad. it. *Il pallino della matematica*, Mondadori, Milano, 2000.

ENRIQUES F., «Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria», *Rivista Filosofica*, 4 (1901), ristampato in F. Enriques, *Natura, ragione e storia* (a cura di L. Lombardo-Radice), Edizioni Scientifiche Einaudi (1958), pp. 71-94.

ENRIQUES F., *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, 1906.

FARACOVI POMPEO O. - SPERANZA F. (a cura di), *Federigo Enriques. Filosofia e storia del pensiero scientifico*), Belforte Editore Libraio, Livorno, 1998.

FODOR J., *The Modularity of Mind*, A Bradford Book, The Mit Press, Cambridge MA, 1983; trad. it. *La mente modulare*, Il Mulino, Bologna, 1988.

FODOR J., lettera, *London Review of Books*, vol. **22**, n. 1, 6 gennaio 2000, p. 5.

GROSSBERG S., «Linking Mind to Brain: The Mathematics of Biological Intelligence», *Notices AMS*, n. 11, **47** (2000), pp. 1361-72.

KARMILOFF-SMITH A., *Beyond Modularity*, The MIT Press, Cambridge MA, 1992; trad. it. *Oltre la mente modulare*, Il Mulino, Bologna, 1995.

LOLLI G., «Razionalità e modularità della mente», Tavola Rotonda Centro Scienza Cognitiva, Torino, 27 aprile 1995.

LOLLI G., «La fondazione psicologica della logica», in Faracovi e Speranza (1998), pp. 73-87.

SACKS O., «I gemelli», in *The Man Who Mistook His Wife for a Hat*, Gerald Duckworth & Co., London, 1985; trad. it. *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*, Adelphi, Milano, 1986.

Gabriele Lolli, Dipartimento di Matematica - Università di Torino