**Bollettino
Unione Matematica Italiana**

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano Aguzzoli

Temi geometrici e di teoria della dimostrazione nelle logiche proposizionali di Łukasiewicz

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 9–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_9_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 9-12

Temi geometrici e di teoria della dimostrazione nelle logiche proposizionali di Łukasiewicz.

Stefano Aguzzoli

Negli anni compresi tra il 1920 e il 1930 Łukasiewicz e Post furono i primi a introdurre le logiche polivalenti come generalizzazioni della logica classica. L'interesse giaceva nella possibilità di estendere il classico insieme $\{Falso, Vero\}$ di valori di verità tramite nuovi valori intermedi. In quest'ottica si è consolidata la convenzione di ammettere come insieme dei valori di verità un sottoinsieme dell'intervallo reale unitario $[0, 1]$ comprendente 0 e 1, rappresentanti rispettivamente i gradi di verità *Completamente Falso* e *Completamente Vero*. Negli ultimi decenni le logiche polivalenti sono state oggetto di un nuovo interesse suscitato dalle loro possibili applicazioni in svariate aree come la costruzione di Codici Correttori e le tecnologie basate sulla *Fuzzy Logic*. Nello studio dei fondamenti logico-matematici della *fuzzyness* tre sistemi *proposizionali* infinitovalenti si sono imposti come fondamentali [6]: la logica di *Gödel*, la logica *Prodotto*, la logica di *Łukasiewicz*.

Definizione 1. – *Le tre logiche suddette sono definite dalle seguenti scelte di connettivi, intesi come funzioni da* $[0, 1]^n$ *a* $[0, 1]$, *per* $n = 1, 2$:
Logica di Gödel:

congiunzione: $x \wedge y = \min(x, y)$;

implicazione: $x \rightarrow_G y = 1$ se $x \leqslant y$ e $x \rightarrow_G y = y$ *altrimenti*;

negazione: $x = x \rightarrow_G 0$.

Logica Prodotto:

congiunzione: $x \cdot y = xy$, *il prodotto di numeri reali;*

implicazione: $x \rightarrow_P y = 1$ *se* $x \leqslant y$ *e* $x \rightarrow_P y = y/x$ *altrimenti;*

negazione: $x = x \rightarrow_P 0 = x \rightarrow_G 0$.

Logica di Łukasiewicz:

congiunzione: $x \odot y = \max(0, x + y - 1)$;

implicazione: $x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y)$;

negazione: $\neg x = x \rightarrow 0 = 1 - x$.

L'insieme dei valori di verità di queste logiche è l'intervallo reale $[0, 1]$. *Una* *formula* φ *è una tautologia della logica se e solo se* $v(\varphi) = 1$ *per tutti gli assegnamenti* v*, dove un assegnamento è un'arbitraria funzione dall'insieme* $V = \{X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots\}$ *delle variabili proposizionali a* $[0, 1]$*, naturalmente estesa all'insieme delle formule della logica.*

Sebbene in letteratura la logica di Łukasiewicz risulti essere la più ampiamente studiata fra le tre logiche principali della fuzzyness, tuttora non ne esiste una consolidata e soddisfacente teoria della dimostazione, nemmeno a livello proposizionale, né esistono metodi efficienti di deduzione automatica. Allo scopo di derivare strumenti e concetti da impiegare nello sviluppo della teoria della dimostrazione, il lavoro di tesi si è concentrato sullo studio della classe di funzioni associata naturalmente alle formule della logica proposizionale di Łukasiewicz $Ł_\infty$. Tale classe di funzioni è stata caratterizzata da McNaughton [7].

Dato un intero $n > 0$, sia $P(n)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $g : [0, 1]^n \to [0, 1]$ per le quali esistono $p_1, \ldots, p_{m(g)}$ funzioni del tipo $p_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n + b_i$, con $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}, b_i$ interi, tali che per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ esiste un indice $j \in \{1, \ldots, m(g)\}$ per cui $g(x_1, \ldots, x_n) = p_j(x_1, \ldots, x_n)$. Per ogni punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ si fissi un assegnamento $v_{\mathbf{x}}$ che soddisfi $v_{\mathbf{x}}(X_i) = x_i$ per ogni variabile proposizionale $X_1, \ldots, X_n$. Sia $F(n)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : [0, 1]^n \to [0, 1]$ per le quali esiste una formula φ_f di $Ł_\infty$ nelle variabili $\{X_1, \ldots, X_n\}$ tale che per ogni punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n) \in [0, 1]^n$ vale $f(x_1, \ldots, x_n) = v_{\mathbf{x}}(\varphi_f)$. Il Teorema di caratterizzazione di McNaughton stabilisce che:

TEOREMA 1. – *Per ogni intero* $n > 0$, $P(n) = F(n)$.

La dimostrazione originale del Teorema 1 usa un argomento non costruttivo per mostrare l'inclusione $P(n) \subseteq F(n)$. La prima prova costruttiva del Teorema, data da Mundici, ha portato alla luce la profonda relazione esistente tra la costruzione di un certo tipo di forme normali per $Ł_\infty$ e la teoria della desingolarizzazione di varietà toriche. Nel secondo capitolo della tesi si approfondisce questo argomento ottenendo risultati parzialmente pubblicati in [5]. In particolare si sono sviluppati algoritmi per la costruzione di desingolarizzazioni ottimali per varietà associate a fan bi- e tri-dimensionali.

Nel terzo capitolo, il lavoro si concentra sull'individuazione e caratterizzazione di particolari sottoclassi di funzioni di McNaughton utili per lo sviluppo di metodi di deduzione automatica su frammenti di $Ł_\infty$. In particolare, in [9] si introduce un metodo basato su una generalizzazione del principio di *Risoluzione* basato sulla seguente nozione di *Letterale*:

DEFINIZIONE 3. – *Un letterale positivo è una funzione di McNaughton in una variabile non decrescente e non costante.*

Nella tesi si prova che

TEOREMA 2. – *La classe dei letterali positivi è la classe di funzioni associate a formule di* $Ł_\infty$ *in una variabile e costruite solo con i connettivi* $\odot$, $\oplus$: *dove* $x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y) = \min(1, x+y)$.

Si espone anche un algoritmo [1] per la costruzione di una formula associata a un dato letterale positivo che è polinomiale nella massima pendenza del letterale stesso.

L'analisi di particolari sottoclassi di funzioni di McNaughton porta all'individuazione di un'ulteriore classe $\mathcal{B}$ di formule in una variabile tali che [2]:

TEOREMA 3. – *Per ogni coppia di interi* $0 \leqslant h < n$ *esiste una formula* $\varphi(X) \in \mathcal{B}$ *tale che* $v(\varphi) = 0$ *per ogni assegnamento per il quale* $v(X) \leqslant h/n$, e $v(\varphi) = 1$ *per ogni assegnamento tale che* $v(X) \geqslant (h+1)/n$. *La formula* φ *conta meno di* $4n$ *occorrenze della variabile ed è costruibile in tempo polinomiale rispetto a* n.

Nel quarto capitolo ci si concentra sulle logiche di Łukasiewicz a $n+1$ valori ($Ł_n$), definite limitando l'insieme dei valori di verità a $S_n = \{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ e restringendo il range dei connettivi opportunamente. Si mostra come tradurre una formula di $Ł_n$ in una forma normale definita come combinazione inf-sup di formule in $\mathcal{B}$. Tale algoritmo di trasformazione è formulato come un calcolo a sequenti [3] denominato SC_n. I sequenti di SC_n sono della forma $\Gamma_1 \vdash \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \vdash \Delta_n$, per Γ_i, Δ_i insiemi finiti di formule. Le regole del calcolo possono essere formulate uniformemente al variare di n.

TEOREMA 4. – *Per ogni intero* $n > 0$, e per ogni coppia di insiemi finiti di formule Γ, Δ *di* $Ł_n$, *il calcolo* SC_n *prova* $\Gamma \vdash \Delta | \vdash | \ldots | \vdash$ *se e solo se* $\Gamma \vDash_n \Delta$: *vale a dire, se e solo se ogni assegnamento che rende vere in* $Ł_n$ *tutte le formule di* Γ *rende vera in* $Ł_n$ *almeno una formula di* Δ.

Questo risultato di completezza è usato, insieme all'analisi geometrica condotta nel quinto capitolo, per la definizione di un calcolo a sequenti analitico per la logica infinitovalente di Łukasiewicz $Ł_\infty$. Le regole di tale calcolo comportano unicamente la manipolazione sintattica di formule, e questo è in netto contrasto con tutti gli altri calcoli proposti per $Ł_\infty$, che si basano su computazioni di carattere geometrico quali la risoluzione di vincoli lineari o l'ammissibilità di soluzioni per problemi di programmazione intera mista. L'analisi geometrica proposta [4] viene a raffinare un precedente risultato di Mundici [8]:

TEOREMA 5. – *Data una formula* φ *di* $Ł_\infty$ *in* n *variabili, esiste un assegnamento* v *per cui* $v(\varphi) > 0$ *se e solo se esiste* $\mathbf{x} = (h_1/k, \ldots, h_n/k) \in [0, 1]^n$, con $h_1, \ldots, h_n$, k *interi, tali che* $v_{\mathbf{x}}(\varphi) > 0$ *e* $k \leqslant 2^{(2\#\varphi)^2}$, dove $\#\varphi$ *denota il numero totale di occorrenze di variabili in* φ.

Il risultato provato nella tesi abbassa questo confine a $k \leqslant (\#\varphi/n)^n$. Inoltre:

TEOREMA 6. – *Una formula φ è una tautologia di $Ł_\infty$ se e solo se è una tautologia di $Ł_{2^{\#\varphi}}$.*

La riduzione della decisione della validità di una formula nella logica infinitovalente $Ł_\infty$ alla validità della stessa formula in una logica a finiti valori determinata unicamente dal numero totale di occorrenze di variabili nella formula in esame, permette lo sviluppo di un calcolo a sequenti per $Ł_\infty$, denotato SC_∞. I Sequenti di SC_∞ sono della forma $(\Sigma): \Gamma_1 \vdash \Delta_1 | \ldots | \Gamma_m \vdash \Delta_m$, dove Σ è un multiinsieme finito di formule, Γ_i, Δ_i sono insiemi finiti di formule, e il numero m di posti nel sequente è determinato da apposite regole del calcolo. Tutte le regole del calcolo agiscono unicamente a livello della manipolazione sintattica delle formule.

TEOREMA 7. – *Dati due insiemi finiti di formule Γ e Δ*, il calcolo SC_∞ *prova il sequente* $(\bigwedge\Gamma, \bigvee\Delta): \Gamma \vdash \Delta$ *se e solo se* $\Gamma \vDash_\infty \Delta$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGUZZOLI S., *The Complexity of McNaughton Functions of One Variable*, Advances in Applied Mathematics, **21** (1998), 58-77.

[2] AGUZZOLI S., *A note on the representation of McNaughton lines by basic literals*, Soft Computing, **2** (1998), 111-115.

[3] AGUZZOLI S., CIABATTONI A. e DI NOLA A., *Sequent Calculi for Finite-Valued Łukasiewicz Logics via Boolean Decomposition*, Journal of Logic and Computation, to appear.

[4] AGUZZOLI S., CIABATTONI A., *Finiteness in Infinite-Valued Łukasiewicz Logic*, Journal of Logic, Language and Information, to appear.

[5] AGUZZOLI S., MUNDICI D., *An Algorithmic Desingularization of Three-Dimensional Toric Varieties*, Tôhoku Mathematical Journal, **46** (1994), 557-572.

[6] HÁJEK P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer, Dordrecht (1999).

[7] MCNAUGHTON R., *A Theorem about Infinite-valued Sentential Logic*, Journal of Symbolic Logic, **16** (1951), 1-13.

[8] MUNDICI D., *Satisfiability in many-valued sentential logic is NP-Complete*, Theoretical Computer Science, **52** (1987), 145-153.

[9] MUNDICI D., OLIVETTI N., *Resolution and model building in the infinite-valued calculus of Łukasiewicz*, Theoretical Computer Science, **200** (1998), 335-366.

Dipartimento di Matematica, Università di Siena; e-mail: aguzzoli@unisi.it
Dottorato in Logica Matematica e Informatica Teorica
(sede amministrativa: Siena) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Franco Montagna, Università di Siena