Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Groli

Problemi di scavalcamento per disequazioni variazionali ellittiche di tipo semilineare e quasilineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 97–100.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 97-100

Problemi di scavalcamento per disequazioni variazionali ellittiche di tipo semilineare e quasilineare.

Alessandro Groli

La tesi verte sullo studio della esistenza e molteplicità di soluzioni per disequazioni variazionali allorché fra l'ostacolo ed il comportamento a $+\infty$ della nonlinearità si realizza una situazione di tipo «jumping».

Nel caso semilineare e senza ostacolo in cui il «jumping» riguarda il comportamento della nonlinearità da $-\infty$ a $+\infty$ e coinvolge il primo autovalore, si tratta di un problema molto studiato che prende le mosse da un ormai classico lavoro di Ambrosetti e Prodi [1] e si sviluppa fino ai giorni nostri passando per il contributo di molti autori. In particolare negli anni '80 si sono avuti dei miglioramenti significativi con i lavori di Hofer e Solimini che hanno dimostrato degli ulteriori risultati di molteplicità con tecniche del grado e/o teoria di Morse.

Lo scopo principale è quello di riottenere e migliorare tali risultati di molteplicità, allorché da una equazione si passa ad una disequazione variazionale. L'aspetto più significativo è che in tale nuovo contesto le tecniche di teoria del grado o di teoria di Morse sembrano difficilmente adattabili. In effetti l'approccio seguito è assai diverso e si rifà piuttosto ad una tecnica recentemente introdotta da Marino e Saccon per studiare soprattutto il «jumping» per equazioni allorché vengono «saltati» alcuni autovalori successivi al primo.

Nel primo capitolo, dedicato al caso semilineare, vengono presentati i risultati ottenuti in collaborazione con i professori Antonio Marino e Claudio Saccon in [4]. Si tratta di studiare disequazioni variazionali semilineari della forma

$$(P)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (DuD(v-u) - g(x,u)(v-u) + h(v-u))\,dx \geqslant 0 \qquad \forall v \text{ in } K_\psi \\ u \in K_\psi, \end{cases}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ è un dominio limitato, $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione di Carathéodory, $\psi : \Omega \to]-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile (l'«ostacolo») e $h \in L^2(\Omega)$.

L'ipotesi che caratterizza il problema è la seguente:

$$(g,\alpha)\qquad \lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s} = \alpha \quad \textit{per q.o. } x \textit{ in } \Omega\,.$$

Più precisamente si vuole stimare il numero di soluzioni di (P) al variare del parametro α.

Tutti i risultati noti mostrano che la risolubilità e la molteplicità delle soluzioni del problema (P) dipendono dalla posizione che α occupa rispetto agli autovalori λ_i di $-\Delta$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (denotiamo con e_i le autofunzioni corrispondenti).

Appare naturale investigare le proprietà di (P) quando $h = h_0 + te_1$, dove $h_0 \in L^2(\Omega)$, $t \in \mathbf{R}$ ed e_1 è la prima autofunzione ($e_1 > 0$).

Denotato con (P_t) il problema (P) con $h = h_0 + te_1$:

$$(P_t)\ \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (DuD(v-u) - g(x,u)(v-u) + (h_0 + te_1)(v-u))\, dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in K_\psi, \\ u \in K_\psi, \end{cases}$$

in accordo con la natura asintotica dell'ipotesi (g, α), si è studiato il problema (P_t) per $t \gg 0$. Il problema ha una natura variazionale ossia introdotto il funzionale f_t così definito

$$f_t(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx + \int_\Omega u(h_0 + te_1)\, dx \qquad u \in K_\psi,$$

dove $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma$, le soluzioni di (P_t) sono i punti «inferiormente critici» di f_t sul vincolo K_ψ.

Sotto opportune ipotesi di crescita della nonlinearità g si è ottenuto un primo risultato.

TEOREMA 1.1. – *Supponiamo che $\alpha > \lambda_2$ e che valga (g, α).*
Allora esiste $\bar t$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $t \geqslant \bar t$ il problema (P_t) ha almeno 4 soluzioni.

Questo teorema estende un risultato di Marino e Passaseo nel quale veniva dimostrata l'esistenza di almeno 4 soluzioni nel caso in cui la funzione g fosse lineare. La tecnica usata consisteva nel considerare un problema ausiliario vincolato. Un tale approccio non sembra tuttavia applicabile in modo diretto quando la g non è lineare. Per questo motivo è stata utilizzata una tecnica del tutto diversa recentemente introdotta da Marino e Saccon.

La presenza dell'ostacolo rende inoltre il funzionale poco regolare: per questo è stato necessario utilizzare la teoria dell'analisi sottodifferenziale delle funzioni ϕ-convesse sviluppata da De Giorgi, Marino, Degiovanni, Scolozzi e Tosques.

Il principale risultato del primo capitolo è il seguente:

TEOREMA 1.2. – *Sia $\lambda_k > \lambda_2$.*
Allora esiste $\sigma > 0$ tale che per ogni α in $]\lambda_k, \lambda_k + \sigma]$, se vale (g, α) esiste $\bar t$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $t \geqslant \bar t$, il problema (P_t) ha ameno 6 soluzioni.

Per ottenere i due risultati si sono utilizzati, come detto, alcuni teoremi variazionali, chiamati da Marino e Saccon ∇-teoremi. Dapprima si è verificato che, nel caso in cui g sia lineare, vi sono le condizioni per poter applicare tali teoremi e quindi dedurre l'esistenza di almeno 4 e 6 soluzioni. Poi con un procedimento di «riscalamento» si è verificato che tali condizioni permangono quando dal caso lineare si passa a quello generale per t molto grande.

Nel secondo capitolo è stato considerato lo stesso tipo di problema per un operatore più generale di tipo quasilineare, ossia

$$(P_t) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,u)\, D_i u D_j(v-u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N D_s a_{ij}(x,u)\, D_i u D_j u (v-u) \right\} dx \\ \displaystyle - \int_\Omega g(x,u)(v-u)\, dx \geq \langle -t\phi_1, v-u \rangle \quad \forall v \in \widetilde{K}_\theta, \\ u \in K_\theta, \end{cases}$$

dove $t > 0$, $\theta \in H_0^1(\Omega)$, $K_\theta = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq \theta \ \ q.o.\}$ e $\widetilde{K}_\theta = \{v \in K_\theta : (v-u) \in L^\infty(\Omega)\}$.

Le funzioni a_{ij} verficano certe ipotesi standard già presenti in lavori precedenti ([2, 3]). In particolare si suppone che

$$\lim_{|s| \to +\infty} a_{ij}(x,s) = A_{ij}(x)$$

e si denota con μ_i la successione degli autovalori dell'operatore $-\sum D_j(A_{ij} D_i u)$ con condizioni omogenee di Dirichlet e con ϕ_i la successione delle autofunzioni (essendo la prima autofunzione $\phi_1 > 0$).

Quando $\theta \equiv -\infty$, ossia non c'è ostacolo e la disequazione variazionale diventa una equazione, il problema è stato studiato da A. Canino in [2]. In tale lavoro l'esistenza di almeno 2 soluzioni è provata per t grandi, quando $\alpha > \mu_1$.

Al contrario, non vi è in letteratura nessun risultato sul problema con ostacolo. Supposto che la funzione g soddisfi certe ipotesi di crescita del tutto naturali, si sono dimostrati i seguenti risultati:

TEOREMA 2.1. – *Supponiamo* $\alpha > \mu_1$ *e che valga* (g, α).
Allora esiste $\bar{t} \in \mathbf{R}$ *tale che per ogni* $t \geq \bar{t}$ *il problema* (P_t) *ha almeno* 2 *soluzioni.*

TEOREMA 2.2. – *Supponiamo* $\alpha > \mu_2$ *e che valga* (g, α).
Allora esiste $\bar{t} \in \mathbf{R}$ *tale che per ogni* $t \geq \bar{t}$ *il problema* (P_t) *ha almeno* 3 *soluzioni.*

Come nel caso semilineare il problema ha una struttura variazionale: per ottenere una soluzione u, è sufficiente trovare un punto critico del funzionale $f_t \colon K_\theta \to \mathbf{R}$ definito da

$$f_t(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,u)\, D_i u D_j u\, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx + t \int_\Omega \phi_1 u\, dx$$

dove $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma$. Tuttavia a causa delle ipotesi più generali sulle funzioni a_{ij} il funzionale f_t non è di classe $\mathcal{C}^1$ né localmente lipschitziano né ϕ-convesso né di classe $\mathcal{C}(p, q)$. Perciò è stata utilizzata una differente teoria di punti critici sviluppata da Corvellec, Degiovanni e Marzocchi.

Un aspetto assai significativo è costituito dalla verifica dei fatti più basilari, in particolare la condizione di Palais-Smale. Infatti, nel caso delle equazioni quasilineari, la verifica di tale condizione richiede l'uso di un certo numero di funzioni test di tipo esponenziale (si veda, ad esempio, [2, 3]). Tali test non risultano essere ammissibili nel caso delle disequazioni variazionali, per cui la tecnica dimostrativa ha richiesto una revisione non banale.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ambrosetti A., Prodi G. *On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., **93** (1972), 231-246.

[2] Canino A. *On a jumping problem for quasilinear elliptic equations*, Math. Z., **226** (1997), 193-210.

[3] Canino A., Degiovanni M., *Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions (Montreal 1994) NATO ASI Series, **C-472** (1995), 1-50.

[4] Groli A., Marino A., Saccon C., *Variational theorems of mixed type and asymptotically linear variational inequalities*, Topological Meth. Nonlinear Anal., **12** (1998), 109-136.

via Borsellino n. 4 - 25014 Castenedolo (BS); e-mail: groli@paley.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttori di ricerca: Prof. Antonio Marino e Prof. Claudio Saccon, Università di Pisa