Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Vincenzo De Filippis

Derivazioni in anelli primi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 61–64.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 61-64

Derivazioni in anelli primi.

VINCENZO DE FILIPPIS

1. – Introduzione.

Fin dalla seconda metà degli anni '50 molti autori si interessarono alla struttura degli anelli associativi con particolare riguardo nei confronti della assegnazione di condizioni sufficienti affinché un qualsiasi anello potesse essere commutativo.

Uno dei metodi adottati per tale tipo di indagini è l'introduzione di speciali mappe nell'anello, quali per esempio automorfismi, derivazioni o altre applicazioni definite tramite le precedenti due, in modo che i valori assunti da queste applicazioni in un dato sottoinsieme dell'anello soddisfino alcune proprietà di commutatività, di regolarità o di nilpotenza.

In questa tesi viene effettuata una analisi di queste applicazioni quando l'anello in cui sono definite sia primo e talvolta semiprimo. L'obiettivo è quello di verificare in che modo la manipolazione delle condizioni soddisfatte da tali mappe possa incidere sulla struttura dell'anello. In particolare si osserva cosa accade quando i valori delle immagini siano nulli, invertibili, centrali o nilpotenti, facendo utilizzo principalmente di tecniche che combinano derivazioni ed automorfismi a condizioni di tipo Engel.

A tal proposito, siano x ed y elementi di un anello associativo R; per un dato intero k si definisca induttivamente il k-commutatore di x, y nel modo seguente: $[x, y]_0 = x$, $[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$ e per $k \geq 2$, $[x, y]_{k+1} = [[x, y]_k, y]$. Diremo che R soddisfa una condizione di tipo Engel se, per ogni coppia di elementi a, b in R, esiste un opportuno intero $k \geq 1$ tale che $[a, b]_k = 0$. Ovviamente un anello commutativo annulla tali commutatori, inoltre un anello nilpotente li annulla se k è sufficientemente grande. La questione principale è quella di stabilire quando un anello è commutativo o nilpotente, nel caso in cui un suo sottoinsieme soddisfi una condizione di tipo Engel. Essa trova le sue origini nei primi lavori di Engel sulle algebre di Lie e da allora è stata trattata da molti altri autori, con vari accorgimenti.

Ricordiamo che in un dato anello R, una derivazione è una mappa additiva $d : R \to R$ tale che, per ogni x, $y \in R$, $d(xy) = d(x)\,y + xd(y)$. Inoltre d è detta derivazione interna indotta da un certo elemento a di R se essa è definita $d(x) = d_a(x) = [a, x] = ax - xa$, per ogni x in R.

La connessione tra condizioni di tipo Engel e derivazioni appare per la prima volta in un ben noto lavoro di E. C. Posner del 1957. Egli prova che se R è un anello primo, d una derivazione non nulla di R tale che, per ogni $x \in R$, $[d(x), x] \in Z(R)$, il centro di R, allora R deve essere commutativo [5].

Nel 1993 C. Lanski ottiene una generalizzazione del risultato di Posner per ideali di Lie, che possiamo enunciare come segue: un anello primo R con una derivazione non nulla d ed un ideale di Lie non commutativo L tale che $[d(u), u]_k = 0$, per ogni $u \in L$, è necessariamente di caratteristica 2 e soddisfa $S_4(x_1, \ldots, x_4)$ [3].

Come vedremo quest'ultima conclusione si ripresenta sistematicamente quando le condizioni di commutatività vengano imposte ai valori assunti dalle derivazioni su ideali di Lie dell'anello o più in generale sulle valutazioni di un prefissato polinomio multilineare.

Successivamente P. H. Lee e T. K. Lee (1996) provano che se R è un anello primo, d una derivazione non nulla di R, $f(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio multilineare, $k \geqslant 1$ un intero ed I un ideale bilatero di R tali che $[d(f(r_1, \ldots, r_n)), f(r_1, \ldots, r_n)]_k = 0$, per ogni $r_1, \ldots, r_n \in I$, allora $f(x_1, \ldots, x_n)$ è centrale in R eccetto quando $car(R) = 2$ e R soddisfa $S_4(x_1, \ldots, x_4)$ [4].

Negli stessi anni veniva affrontato lo studio di derivazioni soddisfacenti condizioni analoghe di tipo Engel sulle potenze degli elementi dell'anello considerato. Naturalmente in tal caso è necessario richiedere che l'anello sia privo di ideali nil, per evitare situazioni patologiche. Più precisamente C. L. Chuang e J. S. Lin (1989) provano che se R è un anello privo di nil ideali bilateri non nulli, $k \geqslant 1$ un intero, $d = d_a$ una derivazione interna dell'anello, indotta dall'elemento $a \in R$ tali che $[d_a(x^n), x^n]_k = 0$, per ogni $x \in R$ ed opportuni $n = n(x) \geqslant 1$, interi dipendenti dalla scelta di x, allora a deve essere centrale in R. Inoltre la stessa conclusione vale se R è privo di nil ideali destri non nulli e $k = k(x) \geqslant 1$ dipende anch'esso dalla scelta di x [2].

Ancora C. L. Chuang generalizza quest'ultimo risultato nel 1994 al caso in cui la derivazione sia generica (e non necessariamente interna) [1].

2. – Risultati principali.

L'obiettivo di tale tesi è quello di proseguire sulle linee di ricerca precedentemente tracciate. L'ambiente di lavoro è quasi sempre un anello primo R sul quale sono definite derivazioni e/o automorfismi che soddisfano opportune e naturali condizioni, come quelle appena ricordate. Alcune delle conclusioni ottenute vengono poi estese al caso di anelli semiprimi.

Dapprima, fissato un sottoinsieme S di R, ci occupiamo dell'ipercentralizzatore di S in R. Esso è definito a partire dal k-commutatore di due elementi $a, b \in R$. Più precisamente l'ipercentralizzatore di S risulta il seguente sottoanello di R:

$$H_R(S) = \{x \in R : \forall u \in S \ \exists n = n(u) \geqslant 1,\, k = k(u) \geqslant 1 \ \text{ tali che } \ [x, u^n]_k = 0\}.$$

In questo ambito il nostro risultato principale afferma che se L è un ideale di Lie non centrale di R, ed R è privo di nil ideali destri non nulli, allora $H_R(L) = Z(R)$ oppure R soddisfa l'identità polinomiale standard $S_4(x_1, \ldots, x_4)$. Questa ultima conclusione è equivalente a dire che R si immerge in una algebra semplice 4-dimensionale sul proprio centro. Tutto ciò può essere riletto in termini di derivazioni e più precisamente con riferimento a derivazioni interne $d = d_a$ che soddisfino a condizioni di tipo Engel : $[d_a(u^n), u^n]_k = 0$, con n e k dipendenti dalla scelta di u in L. Successivamente diamo una estensione del precedente risultato per derivazioni generiche. In questo caso se d è non nulla allora nuovamente R soddisfa $S_4(x_1, \ldots, x_4)$.

In un secondo momento analizziamo ciò che accade quando la condizione di tipo Engel

$$[d(y), y]_k = 0$$

venga sostituita da quella similare

$$[d(y), y]_k = \begin{cases} 0 \\ \textit{invertibile} \end{cases}$$

al variare di y in un sottoinsieme notevole S dell'anello considerato.

Inizialmente consideriamo il caso in cui S consiste delle potenze n-esime degli elementi di R e proviamo che o R risulta commutativo (di modo che la condizione è banalmante soddisfatta) oppure esiste un corpo D per cui $R = D$ oppure $R = M_2(D)$.

In seguito studiamo il caso in cui S consiste delle valutazioni di un polinomio multilineare $f(x_1, \ldots, x_n)$ e, come nel teorema di Posner, l'indice k di commutazione è uguale a 1, cosicchè la condizione considerata si scrive esplicitamente:

$$[d(f(r_1, \ldots, r_n)),\ f(r_1, \ldots, r_n)] = \begin{cases} 0 \\ \textit{invertibile}\ . \end{cases}$$

Proviamo che tale condizione è possibile soltanto nei due casi in cui essa è manifestamente soddisfatta, cioè il caso in cui $f(x_1, \ldots, x_n)$ risulti un polinomio a valori centrali in R o l'altro in cui R è un corpo. Si noti che tale risultato, nel caso in cui S risulti un ideale di Lie non centrale di R e si abbia

$$[d(u), u] = \begin{cases} 0 \\ \textit{invertibile} \end{cases}$$

comporta necessariamente che R sia un corpo.

Inoltre otteniamo un risultato analogo nel caso in cui il posto del polinomio venga preso da un k-commutatore. Questo è certamente un primo passo verso l'eliminazione dell'ipotesi di multilinearità del polinomio.

A questo punto la nostra attenzione si focalizza nuovamente sullo studio delle proprietà del sottoinsieme

$$\{[d(u), u] : u \in L\}\,.$$

Più precisamente, proviamo che se esso è non nullo allora il suo annullatore è banale.

Per di più non può capitare che tutti i suoi elementi siano nilpotenti di indice limitato. Una situazione diversa si presenta invece quando si imponga la condizione più generale

$$[d(u), u]^n \in Z(R).$$

Proviamo infatti che, sotto tali ipotesi, R soddisfa $S_4(x_1, \ldots, x_4)$, e, come è noto, in tal caso il quadrato di ogni commutatore è centrale.

Abbiamo voluto ritagliare un piccolo spazio anche allo studio di anelli soddisfacenti altre condizioni che non siano esplicitamente di tipo Engel e nelle quali intervengano mappe che non siano necessariamente derivazioni. Il motivo di tale apparente divagazione risiede nell'intenzione di offrire nuove tracce di ricerca nelle quali siano coinvolte, accanto alle derivazioni, mappe additive generiche, e soprattutto gli automorfismi. In particolare analizziamo il caso in cui un anello primo R possegga una applicazione additiva φ tale che

$$\varphi(x) - x = \begin{cases} 0 \\ invertibile \end{cases}$$

al variare di x tra le valutazioni di un polinomio multilineare $f(x_1, \ldots, x_n)$. Proviamo che se φ è una derivazione non nulla o un automorfismo non banale e $f(x_1, \ldots, x_n)$ non è un polinomio centrale in R, allora R è un corpo D oppure $R = M_2(D)$.

Infine abbiamo dedicato la conclusione dei nostri lavori all'estensione di alcuni di questi risultati al caso in cui l'anello considerato sia semiprimo.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. L. Chuang, *Hypercentral derivations*, J. Algebra, **166** (1994), 34-71.

[2] C. L. Chuang e J. S. Lin, *On a conjecture by Herstein*, J. Algebra, **126** (1989), 119-138.

[3] C. Lanski, *An Engel condition with derivation*, Proc. Amer. Math. Soc., **118** No. 3 (1993), 1077-1083.

[4] P. H. Lee e T. K. Lee, *Derivations with Engel conditions on multilinear polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** No. 9 (1996), 2625-2629.

[5] E. C. Posner *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1093-1100.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina, Salita Sperone 31, 98166 Messina
e-mail: enzo@dipmat.unime.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Onofrio Mario Di Vincenzo
Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, Potenza