Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppe Cardone

Su alcune questioni di Calcolo delle Variazioni: omogeneizzazione in domini perforati con condizioni di Neumann e rilassamento

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 41–44.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_41_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 41-44

Su alcune questioni di Calcolo delle Variazioni: omogeneizzazione in domini perforati con condizioni di Neumann e rilassamento.

GIUSEPPE CARDONE

La prima parte del lavoro originale contenuto nella presente tesi è dedicata alla teoria dell'omogeneizzazione, mentre la seconda è dedicata a problemi di rappresentazione integrale e rilassamento per funzionali integrali non limitati.

Nella prima parte si studia il comportamento asintotico, per ε che tende a zero, delle soluzioni u_ε del seguente problema

$$\begin{cases} -div(A^\varepsilon Du_\varepsilon)+H_\varepsilon(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)=f & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ (A^\varepsilon Du_\varepsilon)\cdot\nu=0 & \text{su } \partial T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon=0 & \text{su } \partial\Omega, \\ u_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad H_\varepsilon(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\in L^1(\Omega_\varepsilon), \quad H\varepsilon(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\, u_\varepsilon\in L^1(\Omega_\varepsilon), \end{cases}$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$, $\Omega_\varepsilon=\Omega\backslash T_\varepsilon$ è un dominio ottenuto rimuovendo da Ω un insieme chiuso T_ε di sfere di taglia ε e distribuite periodicamente in $\mathbf{R}^n$ con periodicità ε, $A(y)$ è una matrice misurabile, limitata, definita positiva ed $]0,1[^n$-periodica, $A^\varepsilon(x)=A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $H(y,s,\xi)$ è una funzione di Caratheodory definita su $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $]0,1[^n$-periodica in y tale che $H(y,s,\xi)s\geq 0$ (ipotesi di segno) ed a crescita quadratica in ξ, $H_\varepsilon(x,s,\xi)=H\left(\frac{x}{\varepsilon},s,\xi\right)$, f appartiene a $L^2(\Omega)$ e ν denota il vettore unitario normale esterno rispetto ad Ω_ε.

Si prova che, per un'opportuna classe di operatori di prolungamento $\{P_\varepsilon\}_\varepsilon$, quando ε che tende a zero, a meno di un'estratta,

$$\begin{aligned} &P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u && \text{debolmente in } H_0^1(\Omega), \\ &-div(A^\varepsilon \widetilde{Du_\varepsilon})\to -div(A^0 Du) && \text{fortemente in } H^{-1}(\Omega), \\ &H_\varepsilon(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)^\sim \rightharpoonup H^0(u,Du) && \text{debolmente in } L^1(\Omega), \end{aligned}$$

e u verifica

$$\begin{cases} -div(A^0 Du)+H^0(u,Du)=\theta f \quad \text{in } \Omega, \\ u\in H_0^1(\Omega), \quad H^0(u,Du)\in L^1(\Omega), \quad H^0(u,Du)\, u\in L^1(\Omega), \end{cases}$$

dove $^\sim$ denota il prolungamento a zero su Ω, $-div(A^0 Du)$ è l'omogeneizzato dell'operatore lineare $-div(A^\varepsilon Du_\varepsilon)$, $\theta=|\,]0,1[^n\backslash\overline{T}\,|$ e H^0 è definito da

$$H^0(s,\xi)=\int_{]0,1[^n\backslash\overline{T}} H(y,s,C(y)\,\xi) \qquad \forall(s,\xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,$$

dove $C\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ è la matrice dei correttori del problema lineare e T è la sfera di riferimento.

Si studia inoltre il comportamento asintotico di un problema analogo al precedente, eliminando, questa volta, le ipotesi di periodicità su Ω_ε, A^ε e H_ε ed assumendo, però, H_ε a crescita sub-quadratica in ξ.

Precisamente $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash T_\varepsilon$ è ottenuto rimuovendo da Ω un sottinsieme chiuso T_ε di $\mathbf{R}^n$ (i «buchi»), A^ε appartiene a una famiglia di matrici misurabili, equilimitate ed uniformemente definite positive, H_εè una funzione di Caratheodory definita su $\Omega_\varepsilon \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, a crescita sub-quadratica in ξ e verificante l'ipotesi disegno $H_\varepsilon(x, s, \xi)\, s \geqslant 0$.

Lavorando dunque nell'ambito dell'H^0-convergenza (l'H^0-convergenza, introdotta da M. Briane, A. Damlamiane P. Donatoin [1], è una generalizzazione al caso di domini perforati dell'H-convergenza introdotta da F. Murate L. Tartar), si prova che esiste un'estratta, ancora denotata con $\{\varepsilon\}$, un'opportuna classe di operatori di prolungamento $\{P_\varepsilon\}_\varepsilon$, una matrice A^0 misurabile, limitata e definita positiva, una funzione di Caratheodory H su $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ soddisfacente le stesse proprietà di $\{H_\varepsilon\}_\varepsilon$, una funzione positiva χ_0 in $L^\infty(\Omega)$ ed u in $H_0^1(\Omega)$ tale che, per ε che tende a zero

$$
\begin{array}{ll}
\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0 & \text{debolmente* in } L^\infty(\Omega), \\
(A^\varepsilon, T_\varepsilon) & H^0\text{-converge a } \mathrm{A}^0, \\
P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{debolmente in } H_0^1(\Omega) \\
H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)^\sim \rightharpoonup H(x, u, Du) & \text{debolmente in } L^1(\Omega), \\
-div(A^\varepsilon \widetilde{Du_\varepsilon}) \rightharpoonup -div(A^0 Du) & \text{debolmentein } \mathcal{D}'(\Omega),
\end{array}
$$

dove $^\sim$ denota il prolungamento a zero su Ω e u verifica

$$
\begin{cases}
-div(A^0 Du) + H(x, u, Du) = \chi_0 f \text{ in } \Omega, \\
u \in H_0^1(\Omega), \quad H(x, u, Du) \in L^1(\Omega), \quad H(x, u, Du)\, u \in L^1(\Omega).
\end{cases}
$$

L'omogeneizzazione del problema non lineare con crescita sub-quadratica nel gradiente è stata studiata da L. Boccardo e T. Del Vecchio nel caso di dominio fisso, assumendo la limitatezza in L^∞ dei correttori del problema lineare e da P. Donato e L. Sgambati per domini perforati periodicamente, assumendo A sufficientemente regolare.

L'omogeneizzazione del problema non lineare con crescita quadratica nel gradiente è stata studiata da A. Bensoussan, L. Boccardo e F. Murat assumendo la limitatezza in L^∞ dei correttori del problema lineare, ed a A. Bensoussan, L. Boccardo, A. Dall'Aglio e F. Murat sotto le naturali ipotesi sui correttori del problema lineare. Il caso con dominio perforato periodicamente è stato studiato da P. Donato, A. Gaudiello e L. Sgambati.

Nel caso di domini perforati periodicamente la dimostrazione dei risultati principali è essenzialmente basata su un risultato per i correttori del problema non lineare (i correttori del problema non lineare sono gli stessi del corrispondente problema lineare). Per ottenere questo risultato si utilizza il teorema dell'energia per il corrispondente problema lineare.

Nel caso di un dominio fisso, la dimostrazione del teorema dell'energia si basa sulla stima di Meyers per le soluzioni del problema lineare. Si osservi però che nel caso di domini perforati Ω_ε non è possibile controllare la costante della stima di Meyers indipendentemente da ε. Tuttavia nel caso di domini perforati periodicamente, i correttori sono della particolare forma $C\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$. Si potrà dunque, usando una stima di Meyers con una costante indipendente da ε, ottenere per essi un controllo uniforme della norma in $(L^r(\Omega_\varepsilon))^{n^2}$ con $r > 2$. Questo permette di provare il teorema dell'energia per domini perforati.

Nel caso dell'H^0-convergenza si costruisce un correttore localmente limitato in L^2 che verifica, per l'assenza di un'uniforme stima di Meyers a causa della mancanza di periodicità, un classico risultato per i correttori soltanto in L^q con $q \in]1, 2[$. Tuttavia ciò permette di risolvere il caso sub-quadratico.

Nella seconda parte della tesi si prova un risultato di rappresentazione integrale per l'inviluppo semi continuo inferiormente di un funzionale integrale non limitato per opportuni valori su parti della frontiera.

Più precisamente, assegnata una funzione di Borel g su $\mathbf{R}^n$ a valori in $[0, +\infty]$, si denota con $\operatorname{dom} g = \{z \in \mathbf{R}^n : g(z) < +\infty\}$, g^{**} la funzione bipolare di g e $(g^{**})^\infty$ la funzione di recessione di g^{**}. Inoltre, se C è un sottinsieme di $\mathbf{R}^n$, si denota con aff (C) inviluppo affine di C, e, nel caso in cui C è anche convesso, con ri(C) l'interno relativo di C, cioè l'insieme dei punti interni di $\operatorname{dom} g$ nella topologia di aff $(\operatorname{dom} g)$.

Per ogni $u_0 \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n)$e ogni insieme aperto e limitato Ω, si consideri il funzionale integrale $G^0(u_0, \Omega, u) = \int_\Omega g(\nabla u)\, dx$, per $u \in u_0 + W^{1,\infty}_0(\Omega)$ e il suo rilassato nella topologia di $L^1(\Omega)$

$$\overline{G}^0(u_0, \Omega, u) = \inf\left\{\liminf_h \int_\Omega g(\nabla u_h)\, dx : u_h \in u_0 + W^{1,\infty}_0(\Omega),\ u_h \to u \text{ in } L^1(\Omega)\right\}.$$

Se $\operatorname{dom} g$ è convesso, g è localmente limitata su ri$(\operatorname{dom} g)$, per ogni sottinsieme limitato L di $\operatorname{dom} g$, esiste z_L in ri$(\operatorname{dom} g)$ tale che la funzione $t \in [0, 1] \mapsto \gamma((1-\tau)\,\zeta_\Lambda + \tau\zeta))$ sia semicontinua inferiormente in $t = 1$, uniformemente per $z \in L$, ed inoltre $\operatorname{dom} g \neq \emptyset$, in [2] L. Carbonee R. DeArcangelis hanno provato che

$$\overline{G}^0(u_0, \Omega, u) = \int_\Omega g^{**}(\nabla u)\, dx + \\ + \int_\Omega (g^{**})^\infty\left(\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\right) d|D^s u| + \int_{\partial\Omega} (g^{**})^\infty((u_0 - u)\,\mathbf{n}_\Omega)\, dH^{n-1},$$

per ogni insieme aperto, limitato e convesso Ω, $u \in BV(\Omega)$ e $u_0 \in T(g, \Omega)$, dove

$$T(g, \Omega) = \{u_0 \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n) : \text{esiste } x_0 \in \Omega \text{ e un insieme compatto} \\ K \subseteq ri(\operatorname{dom} g) \text{ tale che } u_0(x + x_0) - u_0(x_0) \text{ è positivamente} \\ \text{1-omogenea e } \nabla \mathrm{u}_0(\mathrm{x}) \in \mathrm{K} \text{ per q.o. } x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Se $\operatorname{dom} g = \emptyset$ e se u assume il valore u_0 sull'intera frontiera di Ω, il risultato che si ottiene è poco significativo. Invece assegnando valori ad u soltanto su opportune parti della frontiera di Ω che giacciono, per esempio, su spazi affini ortogonali a $\operatorname{aff}(\operatorname{dom} g)$, è possibile ottenere risultati di rappresentazione più interessanti.

A tal fine nella seconda parte della tesi si introduce una trasformazione affine $E : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tale che, denotata con M_E la matrice ortogonale associata alla parte lineare di E, risulti E^{-1} $(\operatorname{aff}(\operatorname{dom} g) = \mathbf{R}^k \times \{0_{n-k}\}$ se $k > 0$ o $E^{-1}(\operatorname{aff}(\operatorname{dom} g) = 0$ se $k = 0$ ($k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ è la dimensione di $\operatorname{aff}(\operatorname{dom} g)$. Assegnato Ω in $\mathcal{A} = \{E(A \times B) : A \subseteq \mathbf{R}^k$ e $B \subseteq \mathbf{R}^{n-k}$ aperti, limitati e convessi$\}$ e posto $\partial_p \Omega = E((\partial A) \times B)$, si considera dunque il funzionale

$$\overline{G}^0(u_0, \Omega, u) =$$

$$= \inf\left\{\liminf_h \int_\Omega g(\nabla u_h)\, dx : u_h \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^n),\ u_h \to u \text{ in } L^1(\Omega),\ u_h = u_0 \text{ su } \partial_p \Omega\right\}.$$

Si prova, allora, che per ogni $\Omega \in \mathcal{A}$, $u_0 \in T(g, \Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$

$$\overline{G}^0(u_0, \Omega, u) = \int_\Omega g^{**}(\nabla u)\, dx +$$

$$+ \int_\Omega (g^{**})^\infty \left(\frac{dD^s u}{d|D^s u|}\right) d|D^s u| + \int_{\partial_p \Omega} (g^{**})^\infty ((u_0 - u)\, \mathbf{n}_\Omega)\, dH^{n-1}.$$

Infine si applica tale risultato a problemi di minimo di Dirichlet.

I risultati ottenuti nella tesi sono in parte contenuti in [3], [4], [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] Briane M., Damlamian A., Donato P., *H-convergence for perforated domains*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, College de France Seminair 14, H. Brezis and J.-L. Lions, eds. Longman, New York, **14** (1998).

[2] Carbone L., Dearcangelis R., *On the Relaxation of Dirichlet Minimum Problems for some Classes of Unbounded Integral Functionals*, Preprint. n. 21, Dip. Mat. e Appl. «R. Caccioppoli», Univ. di Napoli «Federico II» (1999).

[3] Cardone G., Demaio U., Durante T., *On the relaxation of some types of Dirichlet minimum problem for unbounded functionals*, Note di Matematica (inprint).

[4] Cardone G., Donato P., Gaudiello A., *A compactness result for elliptic equations with sub quadratic growth in perforated domains*, Nonlinear Analysis, **32** (1998), 335-361.

[5] Cardone G., Gaudiello A., *Homogenization of elliptic equations with quadratic growth in periodically perforated domains: the case of unbounded solutions*, Portugaliae Math., **54** (1997), 51-72.

Dipartimento di Ingegneria Civile, Seconda Università di Napoli
Via Roma, 29, 81031 Aversa (CE); e-mail: gcardone@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II»)-Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. L. Carbone, Università di Napoli «Federico II»